SERIE

# SCHAUM

# CIRCUITOS ELECTRICOS

JOSEPH A. EDMINISTER

TEORIA Y
391
PROBLEMAS RESUELTOS

schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill

*SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM*

# TEORIA Y PROBLEMAS

DE

# CIRCUITOS ELECTRICOS

JOSEPH A. EDMINISTER, M. S. E.

*Assistant Professor of Electrical Engineering*
*The University of Akron*

•

TRADUCCION Y ADAPTACION

JOSÉ BESCÓS BELARRA
*Ingeniero de Armamento*
*Licenciado en Ciencias*

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
*Ingeniero de Armamento*
*Licenciado en Ciencias Físicas*
*Diplomado en Ingeniería Nuclear*

# Prólogo

Este libro se ha concebido como complemento a los textos usuales de electricidad o bien como libro de texto básico para un primer curso de análisis de circuitos. En él se ha dado una importancia especial a las leyes fundamentales, a los teoremas y a las técnicas que son comunes a los diversos enfoques expuestos en otras obras.

Está dividido en capítulos que tratan los campos de teoría y estudio ya reconocidos. Cada capítulo empieza por establecer las definiciones, teoremas y principios pertinentes, junto con ejemplos, figuras y demás material aclaratorio. A continuación, se presentan dos series, adecuadamente graduadas, de problemas resueltos y de problemas propuestos. Los primeros sirven para aclarar y ampliar la teoría. Presentan métodos de análisis, proporcionan ejemplos prácticos y centran la atención en aquellos aspectos de detalle que son esenciales para que el alumno pueda aplicar correctamente y con seguridad los principios fundamentales. El gran número de problemas propuestos como complemento permite realizar un repaso de todas las materias contenidas en el capítulo.

Los temas tratados incluyen el análisis de respuestas y formas de ondas, sistema de números complejos, notación matricial, circuitos en serie y paralelos, potencia y factor de potencia, fenómenos de resonancia. Se han utilizado ampliamente las matrices y determinantes en el estudio de los métodos de análisis basados en las corrientes, en las mallas y las tensiones en los nudos. También se ha empleado el cálculo matricial en el estudio de las transformaciones estrella-triángulo y en los teoremas de circuitos, tales como los de superposición y reciprocidad. Se ha procurado explicar con sumo detalle el tema de los circuitos con acoplo magnético y lo mismo puede decirse de los sistemas polifásicos de todos los tipos, dedicando atención especial al circuito equivalente monofásico por sus importantes aplicaciones. Se estudian, simultáneamente, las series trigonométricas y las exponenciales de Fourier, verificando frecuentes conversiones de los coeficientes de unas a otras para ver con claridad su correspondencia. El régimen transitorio en corrientes continua y alterna se explica y resuelve empleando ecuaciones diferenciales clásicas, de manera que esta materia puede estudiarse perfectamente antes de ver la notación fasorial del Capítulo 5; en rigor, así se recomienda para aquellos alumnos cuyos conocimientos matemáticos se lo permitan. El método de la transformada de Laplace se aplica a muchos de los problemas ya estudiados y resueltos en el Capítulo 16 por ecuaciones diferenciales. Esto permite comparar los dos métodos y ver claramente las peculiaridades y ventajas del método en cuestión.

Queremos aprovechar esta ocasión para expresar profunda gratitud al personal de la Schaum Publishing Company y, en especial, al señor Nicola Miracapillo, por sus valiosas sugerencias y útil colaboración. A mi esposa Nina le debo mucho más que un simple agradecimiento por su continuo apoyo y estímulo que tanto han contribuido a la realización de esta obra.

JOSEPH A. EDMINISTER

Universidad de Akron
21 de agosto de 1965

# Tabla de materias

# Capítulo 1

# Definiciones y parámetros de un circuito

## SISTEMAS DE UNIDADES

En ingeniería eléctrica se emplea el sistema internacional de unidades S. I., que considera como magnitudes fundamentales la longitud ($L$), la masa ($M$), el tiempo ($T$) y la intensidad de corriente ($I$), cuyas unidades respectivas son el metro (m), el kilogramo (kg), el segundo (s) y el amperio (A). Abreviadamente, este sistema se llama mksa, que corresponde a las iniciales de las unidades citadas.

Todas las fórmulas del libro aparecen racionalizadas, es decir, la constante de la ley de Coulomb de la electrostática se iguala a $1/4\pi\epsilon$, y la correspondiente a la ley de Laplace del magnetismo se iguala a $\mu/4\pi$.

La unidad de fuerza en el sistema racionalizado mksa es derivada; se llama newton y tiene de símbolo N. Una fuerza de 1 newton es aquella que aplicada a un sólido de 1 kilogramo de masa le comunica una aceleración de 1 metro por segundo en cada segundo. Por consiguiente:

$$\text{Fuerza (N)} = \text{masa (kg)} \times \text{aceleración (m/s}^2)$$

La unidad de trabajo y, por tanto, la de energía, también es derivada; se llama julio (J) y corresponde al trabajo realizado por una fuerza de 1 newton cuando su punto de aplicación se desplaza 1 metro en la dirección del movimiento. La unidad de potencia, en estas condiciones, se llama vatio (W) y corresponde al julio por segundo. Resumiendo, pues, 1 J = 1 N · m y 1 W = 1 J/s.

## LEY DE COULOMB

Establece que la fuerza (de atracción o de repulsión) entre dos cargas eléctricas puntuales, $q$ y $q'$, es directamente proporcional al producto de ambas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia $r$. Matemáticamente, se escribe en la forma

$$F = k\frac{qq'}{r^2}$$

siendo $k$ la constante de proporcionalidad (con dimensiones) y que depende, por una parte, del sistema de unidades empleado y, por otra, del medio donde estén situadas las cargas. Concretamente, en el sistema mksa en el que la unidad de carga eléctrica es derivada y se llama culombio (C), y en el vacío o espacio libre el valor de dicha constante es

$$k_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

Como ya hemos adelantado, el sistema mksa racionalizado es aquel que hace $k_0 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$, con lo que la ley de Coulomb adquiere la forma $F = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{qq'}{r^2}$. En el vacío (subíndice cero) tendremos $k_0 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$, de donde

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} = \frac{1}{4\pi(9 \times 10^9)} = \frac{10^{-9}}{36} = 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

Si el medio donde se hallan las cargas no es el vacío, la fuerza que aparece entre las cargas inducidas reduce la resultante. En el aire, el valor de $\epsilon$ es ligeramente superior a $\epsilon_0$ y, en la práctica, se consideran iguales. Para otros medios distintos del aire, el valor de $\epsilon$ se define por

$$\epsilon = K\epsilon_0$$

en donde $K$ es una constante de proporcionalidad adimensional que se llama *constante dieléctrica relativa* o *capacidad inductiva específica* del medio en cuestión. El valor $\epsilon = K\epsilon_0$ se denomina *permitividad* o *constante dieléctrica absoluta* del medio, con lo que $\epsilon_0$ es la *permitividad del vacío*. Para el espacio libre, pues, $K = 1$ y $\epsilon = \epsilon_0$.

Hemos dicho anteriormente que la unidad de carga en el sistema mksa es el culombio (C); se puede definir como aquella carga que, situada frente a otra igual a 1 metro de distancia y en el vacío, se repelen con una fuerza de $9 \times 10^9$ newton. Los submúltiplos más utilizados del culombio son

$$1\ \mu\text{C} = 1 \text{ microculombio} = 10^{-6}\text{ C}$$
$$1 \text{ pC} = 1 \text{ picoculombio} = 10^{-12}\text{ C}$$

La carga elemental correspondiente al electrón ($-e$), o al protón ($+e$), vale $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C.

## DIFERENCIA DE POTENCIAL $v$

La diferencia de potencial o tensión $v$ entre dos puntos de un campo eléctrico es, por definición, el trabajo necesario para desplazar la unidad de carga eléctrica positiva de un punto al otro en contra o a favor de las fuerzas del campo. En el sistema mksa, la unidad de diferencia de potencial es el *voltio* (V) y corresponde al trabajo de 1 julio (J) al desplazar 1 culombio (C) de carga de uno al otro punto, es decir, 1 V = 1 J/C.

Si entre dos puntos existe una diferencia de potencial $v$ (d.d.p.), el trabajo necesario para desplazar una carga $q$ será $qv$ y la carga se moverá del punto de mayor al de menor potencial.

Un agente o dispositivo, tal como una batería o un generador, posee una fuerza electromotriz (f.e.m.) si es capaz de suministrar a una carga eléctrica la energía suficiente para hacerla circular por él, del terminal de menor al de mayor potencial. La f.e.m. se mide por la d.d.p. en bornes del generador cuando no suministra corriente eléctrica, es decir, en circuito abierto.

## CORRIENTE ELECTRICA $i$

Todo cuerpo con electrones libres capaces de moverse entre los átomos de la red cristalina del mismo se llama conductor. Una de las causas que origina este movimiento es la aplicación al conductor de una diferencia de potencial.

Cuando de un punto a otro de un conductor se desplaza una o más cargas eléctricas diremos que circula por él una corriente eléctrica. Si la carga se transfiere a una velocidad de 1 culombio por segundo (C/s) la corriente por el conductor tiene una intensidad de 1 amperio (A); es decir, 1 A = 1 C/s. En general, la intensidad de corriente instantánea $i$ en un conductor es

$$i\,(\text{A}) = \frac{dq\,(\text{C})}{dt\,(\text{s})}$$

Por convenio, se ha establecido como sentido positivo de la intensidad de la corriente eléctrica el opuesto al del movimiento de los electrones. Véase Figura 1-1.




Fig. 1-1

## POTENCIA $p$

La potencia eléctrica $p$ se define por el producto de la diferencia de potencial o tensión aplicada $v$ y la intensidad de corriente $i$ a que da lugar. La unidad de potencia es el vatio (W), de manera que 1 W = 1 V · A. Matemática se escribe:

$$p\,(\text{W}) = v\,(\text{V}) \times i\,(\text{A})$$

Por definición, corriente eléctrica positiva es aquella que circula en el sentido indicado por la flecha que aparece en el generador o fuente de tensión, es decir, del terminal o polo negativo al positivo, como se indica en la Fig. 1-2. Si la potencia $p$ es positiva quiere decir que la fuente entrega corriente al circuito, esto es, suministra energía.

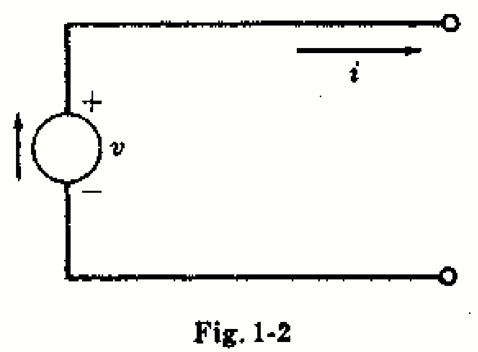



Fig. 1-2

En el caso de que la potencia $p$ sea una función periódica del tiempo $t$, de periodo $T$, se define el valor medio por:

$$\text{Potencia media } P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

## ENERGIA $w$

Como la potencia $p$ es la variación de energía transferida en la unidad de tiempo,

$$p = \frac{dw}{dt} \quad \text{de donde} \quad W = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt$$

siendo $W$ la energía total suministrada durante un intervalo de tiempo dado.

La unidad de energía, como ya dijimos, es el julio: 1 J = 1 W · s.

## ELEMENTO RESISTIVO, BOBINA Y CONDENSADOR

Al suministrar energía eléctrica a un elemento pasivo de un circuito, éste se comporta o responde de una, o más, de estas tres formas. Si la energía la disipa el elemento, es *resistivo* puro; si la almacena en un campo magnético, es una *bobina* pura, y si la acumula en un campo eléctrico, es un *condensador* puro. En la práctica, los componentes de un circuito se comportan de más de una de dichas formas, y muchas veces de las tres simultáneamente; pero lo normal es que predomine uno de los efectos citados sobre los otros. Se puede diseñar una bobina con un gran coeficiente de autoinducción; sin embargo, el hilo con el que se fabrica presenta cierta resistencia imposible de anular; es un ejemplo típico de un elemento, bobina, que se comporta ante la energía eléctrica de dos maneras, es decir, tiene dos propiedades.

## RESISTENCIA $R$

La diferencia de potencial $v(t)$ en bornes o terminales de un elemento resistivo puro es directamente proporcional a la intensidad de corriente $i(t)$ que circula por él. La constante de proporcionalidad $R$ se llama resistencia eléctrica del elemento. Matemáticamente se expresa en la forma.

$$v(t) = R\,i(t) \quad \text{o bien} \quad i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

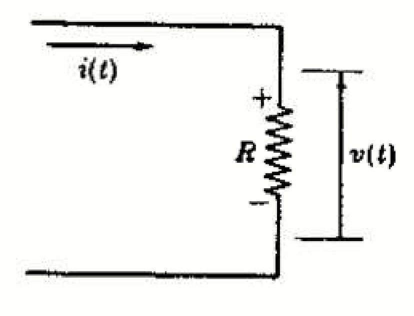


Fig. 1-3

La unidad de medida de la resistencia en el sistema mksa es el ohmio (Ω) y corresponde a la resistencia de un elemento que al aplicarle una d.d.p. de 1 voltio circula por él 1 amperio, es decir, 1 Ω = 1 V/A.

Obsérvese que no se ha hecho restricción alguna sobre la forma de las funciones $v(t)$ e $i(t)$; pueden ser constantes en el tiempo, como ocurre en los circuitos de corriente continua (c.c.) o funciones trigonométricas seno o coseno, como en los circuitos de corriente alterna (c.a.).

Respecto a la notación, las funciones del tiempo las representaremos por letras minúsculas ($v$, $i$, $p$); las magnitudes constantes se indicarán por las mayúsculas correspondientes ($V$, $I$, $P$), así como los picos, valores máximos o amplitudes con el subíndice $m$ ($V_m$, $I_m$, $P_m$).

## AUTOINDUCCION $L$

Al variar con respecto al tiempo la corriente que circula por un circuito, el flujo magnético que lo atraviesa experimenta los mismos cambios. Ahora bien, toda variación de flujo magnético origina una fuerza electromotriz que se opone a dicha variación. En estas condiciones, si por una bobina circula una corriente de intensidad variable, se origina en ella una f.e.m. inducida $v$ que es directamente proporcional, siempre que la permeabilidad magnética sea constante, a la variación con respecto al tiempo de dicha intensidad. Matemáticamente se expresa en la forma

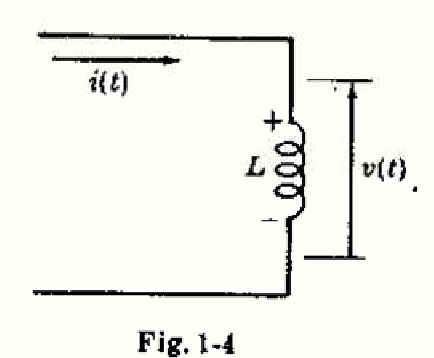


Fig. 1-4

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \quad \text{o bien} \quad i(t) = \frac{1}{L}\int v\,dt$$

El coeficiente de proporcionalidad $L$ se llama *coeficiente de autoinducción* o, simplemente, *autoinducción* de la bobina.

Si la tensión $v$ se expresa en voltios (V) y $di/dt$ en amperios/segundo (A/s) el coeficiente de autoinducción $L$ se mide en voltios × segundo/amperio y se llama *henrio* (H); es decir, 1 H = 1 V · s/A. Según esto, una bobina tiene un coeficiente de autoinducción de 1 H si al circular por ella una corriente que varíe a razón de 1 A/s se induce una f.e.m. entre sus bornes de 1 V.

## CAPACIDAD $C$

La diferencia de potencial $v$ en bornes de un condensador es proporcional a la carga $q$ en él almacenada. La constante de proporcionalidad $C$ se llama *capacidad* del condensador. Matemáticamente se expresa en la forma

$$q(t) = C\,v(t), \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}, \quad v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

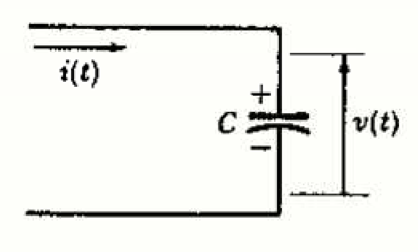


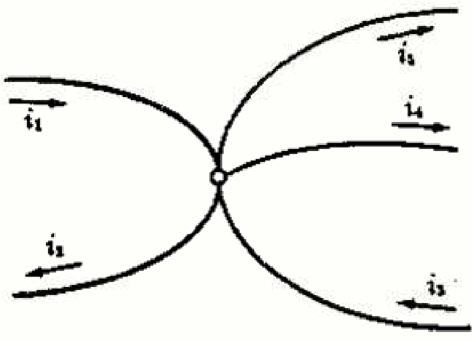
Fig. 1-5

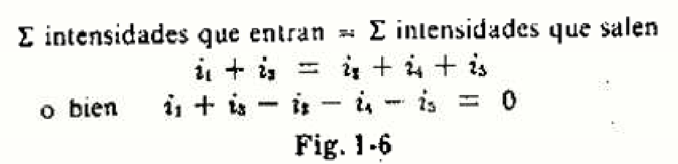
En el sistema mksa la unidad de capacidad se llama *faradio* (F). La capacidad de un condensador es de 1 faradio cuando almacena 1 culombio (C) de carga al aplicarle una d.d.p. de 1 voltio; es decir, 1 F = 1 C/V. Como se trata de una unidad muy grande, se emplean los submúltiplos siguientes:

$$1\ \mu F = 1 \text{ microfaradio} = 10^{-6}\ F \qquad y \qquad 1\ pF = 1 \text{ picofaradio} = 10^{-12}\ F$$

## LEYES DE KIRCHHOFF

1. La suma de las intensidades de corriente que llegan a un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen de él. Si se consideran positivas las corrientes que llegan y negativas las que salen, esta ley establece que la suma algebraica de las intensidades de todas las corrientes que concurren en un nudo es cero.

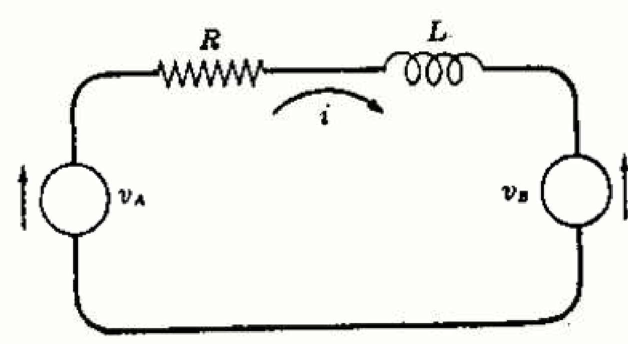




Σ intensidades que entran = Σ intensidades que salen

$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$

o bien $i_1 + i_3 - i_2 - i_4 - i_5 = 0$

Fig. 1-6




Σ subidas de tensión = Σ caídas de tensión

$v_A - v_B = Ri + L(di/dt)$

o bien $v_A - v_B - Ri - L(di/dt) = 0$

Fig. 1-7

2. En un circuito cerrado o malla, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices aplicadas, o subidas de tensión, es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en todos los elementos pasivos. En otras palabras, la suma algebraica de las diferencias de potencial en todo circuito cerrado es nula. Es importante observar que las fuerzas electromotrices de las fuentes o generadores que contenga la malla han de sumarse algebraicamente, considerando como positivas las fuentes cuyo sentido de polaridades (*de* − *a* +) coincida con el asignado previamente a la corriente en el circuito.

**Respuesta de los elementos pasivos de un circuito**

| Elemento | Tensión en bornes del elemento | Corriente por el elemento |
|---|---|---|
| Resistencia $R$ (resistivo) | $v(t) = R\,i(t)$ | $i(t) = \dfrac{v(t)}{R}$ |
| Autoinducción $L$ (bobina) | $v(t) = L\dfrac{di}{dt}$ | $i(t) = \dfrac{1}{L}\int v\,dt$ |
| Capacidad $C$ (condensador) | $v(t) = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$ | $i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$ |

**Sistema internacional de unidades mksa**

| Magnitud | | Unidad | | Magnitud | | Unidad | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Longitud | $l$ | metro | m | Carga | $Q, q$ | culombio | C |
| Masa | $m$ | kilogramo | kg | Potencial | $V, v$ | voltio | V |
| Tiempo | $t$ | segundo | s | Corriente | $I, i$ | amperio | A |
| Fuerza | $F, f$ | newton | N | Resistencia | $R$ | ohmio | Ω |
| Energía | $W, w$ | julio | J | Autoinducción | $L$ | henrio | H |
| Potencia | $P, p$ | vatio | W | Capacidad | $C$ | faradio | F |

# Problemas resueltos

**1-1** En el circuito cerrado de la Fig. 1-8 la tensión aplicada es $V = 45$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente que circula por él, así como la caída de tensión y la potencia disipada en cada elemento resistivo del mismo.

En una malla o circuito cerrado la suma algebraica de las subidas de la tensión (originadas por las fuerzas electromatrices de las fuentes) es igual a la suma correspondiente de las caídas en sus elementos. Por tanto,

$$V = (2)I + (6)I + (7)I, \qquad 45 = 15I, \qquad I = 3\ \text{A}$$

La caída de tensión en el elemento resistivo de 2 Ω es $V_2 = R_2 I = (2)(3) = 6$ V. Análogamente, $V_6 = (6)(3) = 18$ V, y $V_7 = 21$ V.

La potencia disipada por el elemento de 2 Ω es $P_2 = V_2 I = (6)(3) = 18$ W o bien $P_2 = R_2 I^2 = (2)(3)^2 = 18$ W. Análogamente, $P_6 = V_6 I = 54$ W, y $P_7 = V_7 I = 63$ W.

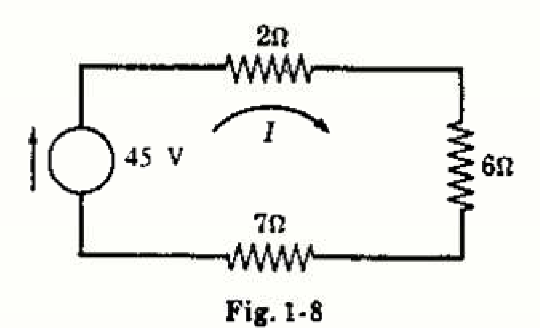


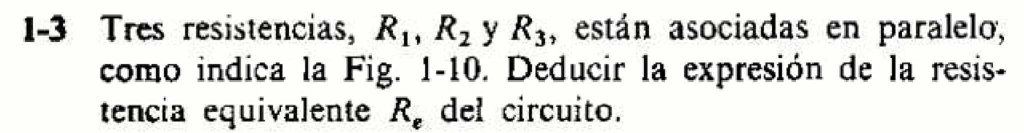

Fig. 1-8

**1-2** Una corriente $I_T$ se divide entre dos ramas en paralelo de resistencias $R_1$ y $R_2$ respectivamente, como indica la Fig. 1-9. Deducir las expresiones de las intensidades de corriente $I_1$ e $I_2$ en cada una de las ramas.

En cada rama, la caída de tensión ha de ser la misma: $V = R_1 I_1 = R_2 I_2$. Por consiguiente,

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$= R_1\left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)I_1 = \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2}\right)I_1$$



de donde $I_1 = \left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right)I_T$. Análogamente, $I_2 = \left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\right)I_T$.

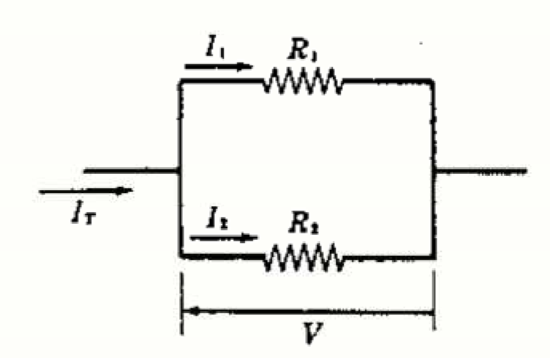



Fig. 1-9

**1-3** Tres resistencias, $R_1$, $R_2$ y $R_3$, están asociadas en paralelo, como indica la Fig. 1-10. Deducir la expresión de la resistencia equivalente $R_e$ del circuito.

Se supone aplicada una tensión $v(t)$ entre los puntos $A$ y $B$, con lo cual circularán por las resistencias $R_1$, $R_2$ y $R_3$ unas corrientes de intensidades $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, respectivamente. La corriente por $R_e$ debe ser la intensidad total $i_T(t)$. Por tanto, $v(t) = R_1 i_1(t) = R_2 i_2(t) = R_3 i_3(t) = R_e i_T(t)$, y

$$i_T(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \quad \text{o bien} \quad \frac{v(t)}{R_e} = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} + \frac{v(t)}{R_3}$$

Es decir,

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

En un circuito paralelo de dos ramas, $\dfrac{1}{R_e} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$,

o bien $R_e = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

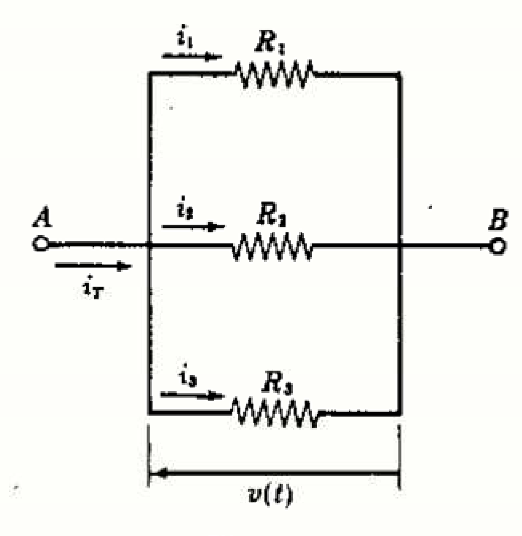



Fig. 1-10

**1-4** El circuito de la Fig. 1-11 contiene dos fuentes de tensión constante, $V_A$ y $V_B$. ¿Qué energía suministra cada una de ellas?

La suma de las subidas de tensión es igual a la suma de las caídas de tensión en todo circuito cerrado; por consiguiente,

$$20 - 50 = (1)I + (2)I, \qquad I = -10\ \text{A}$$

Potencia suministrada por $V_A = V_A I = 20(-10) = -200$ W.
Potencia suministrada por $V_B = V_B I = 50(10) = 500$ W.

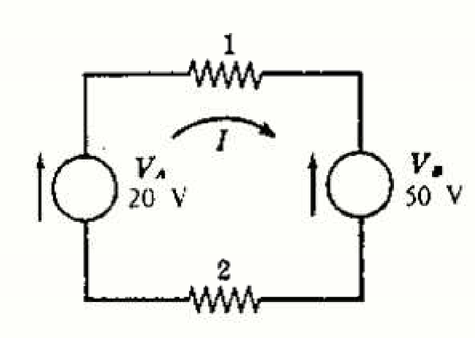



Fig. 1-11

**1-5** En el circuito de la Fig. 1-12($a$) la tensión del generador viene dada por $v(t) = 150 \operatorname{sen} \omega t$. Hallar la intensidad $i(t)$, la potencia instantánea $p(t)$ y la potencia media $P$.

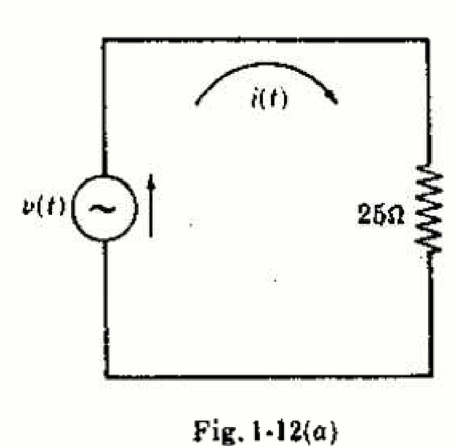



Fig. 1-12($a$)

$$i(t) = \frac{1}{R} v(t) = \frac{150}{25} \operatorname{sen} \omega t = 6 \operatorname{sen} \omega t \text{ A}$$

$$p(t) = v(t)\, i(t) = (150 \operatorname{sen} \omega t)(6 \operatorname{sen} \omega t) = 900 \operatorname{sen}^2 \omega t \text{ W}$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 900 \operatorname{sen}^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{900}{\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)\, d(\omega t)$$

$$= \frac{900}{2\pi} \Big[ \omega t - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t \Big]_0^{\pi} = 450 \text{ W}$$

La corriente $i(t)$ está relacionada, como hemos visto, con la tensión $v(t)$ por la constante $R$. La curva de potencia instantánea se puede deducir punto a punto multiplicando las ordenadas correspondientes de $v$ e $i$, como se indica en la Fig. 1-12($b$). Obsérvese que así como $v$ e $i$ son ambas positivas o ambas negativas en cualquier instante, su producto siempre es positivo. Esto concuerda con el principio de conservación de la energía, esto es: siempre que circula una corriente eléctrica a través de una resistencia se consume una energía eléctrica que ha de ser proporcionada constantemente por algún generador.

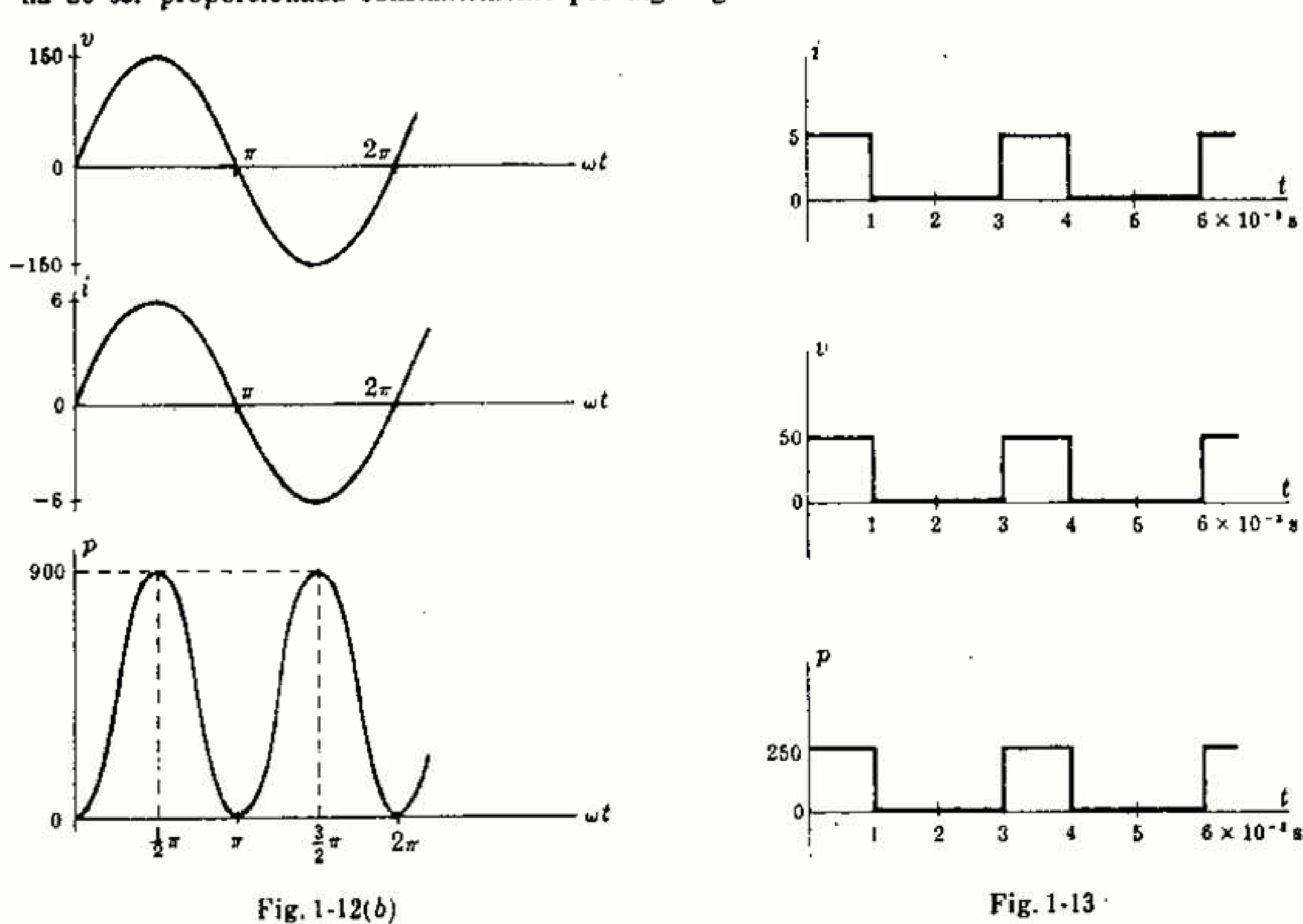



Fig. 1-12($b$)

Fig. 1-13

**1-6** La función de intensidad de corriente de la Fig. 1-13 es una onda cuadrada periódica. Con esta corriente, circulando por una resistencia pura de 10 ohmios, obtener las curvas de tensión $v(t)$ y de potencia $p(t)$ instantáneas.

La tensión es directamente proporcional a la intensidad de corriente, $v(t) = R\, i(t)$. El valor máximo es $Ri_{max} = (5)(10) = 50$ V.

La curva de potencia se obtiene punto a punto por el producto $p = vi$. El valor máximo es $v_{max} i_{max} = (50)(5) = 250$ W.

**1-7** La función de intensidad de corriente de la Fig. 1-14 es un diente de sierra periódico que se aplica a una resistencia pura de 5 ohmios. Hallar los valores instantáneos $v(t)$ y $p(t)$ y la potencia media $P$.

Como $v(t) = R\, i(t)$, $v_{max} = R i_{max} = (5)(10) = 50$ V

Para $0 < t < 2 \times 10^{-3}$ s, $i = \dfrac{10}{2 \times 10^{-3}} t = 5 \times 10^3 t$. Por tanto,

$$v = Ri = 25 \times 10^3 t, \quad p = vi = 125 \times 10^6 t^2, \quad P = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \int_0^{2 \times 10^{-3}} 125 \times 10^6 t^2 \, dt = 167 \text{ W}$$

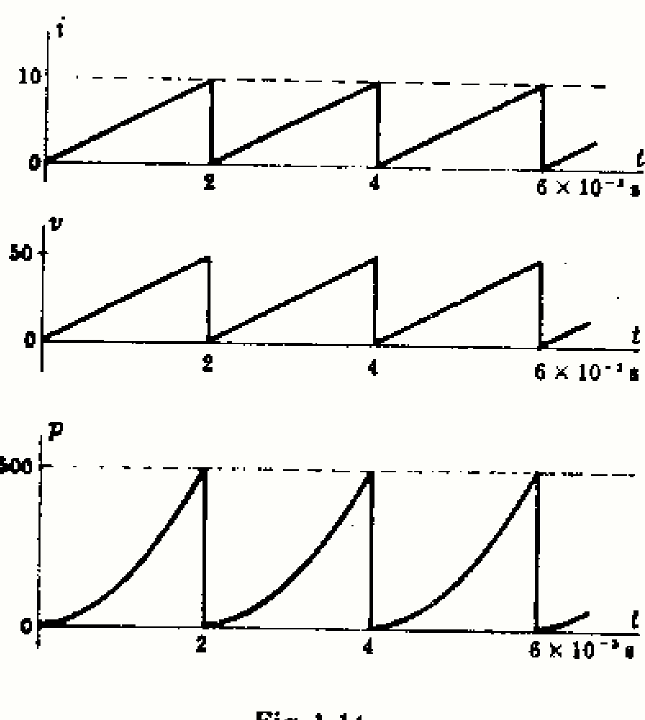



Fig. 1-14

Fig. 1-15

**1-8** En el circuito de la Fig. 1-15, la intensidad de corriente por la resistencia de 5 ohmios es $i(t) = 6 \text{ sen } \omega t$ amperios. (*a*) Hallar la corriente en las resistencias de 15 y de 10 ohmios, así como las tensiones entre *a* y *b* y entre *b* y *c*. (*b*) Calcular la potencia media e instantánea consumida en cada resistencia.

(*a*) La tensión $v_{bc}$ en las resistencias de 5 Ω y 15 Ω ha de ser la misma; por tanto,

$$v_{bc} = R_5 i_5 = (5)(6 \text{ sen } \omega t) = 30 \text{ sen } \omega t \quad \text{e} \quad i_{15} = v_{bc}/R_{15} = 2 \text{ sen } \omega t$$

Ahora bien, $i_{10} = i_{15} + i_5 = 8 \text{ sen } \omega t$, con lo que $v_{ab} = R_{10} i_{10} = 80 \text{ sen } \omega t$

(*b*) La potencia instantánea es $p = vi$. De esta forma, $p_5 = (30 \text{ sen } \omega t)(6 \text{ sen } \omega t) = 180 \text{ sen}^2 \omega t$. Análogamente, $p_{15} = 60 \text{ sen}^2 \omega t$ y $p_{10} = 640 \text{ sen}^2 \omega t$.

La potencia media en la resistencia de 5 Ω es

$$P_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 180 \text{ sen}^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 180[\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)] \, d(\omega t) = 90 \text{ W}$$

Del mismo modo se obtienen $P_{15} = 30$ W y $P_{10} = 320$ W.

**1-9** En bornes de una resistencia pura de 2 ohmios se aplica una tensión $v(t)$ dada por

$$v(t) = 50\left[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \cdots\right] \text{ voltios}$$

Determinar la intensidad de corriente y potencia disipada por este elemento.

Desarrollando cos *x* en serie de potencias de *x*, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Por consiguiente, $v(t) = 50 \cos \omega t$, $i(t) = 25 \cos \omega t$, $p(t) = 1250 \cos^2 \omega t$, y $P = 625$ W.

**1-10** En bornes de una bobina pura de autoinducción $L = 0{,}02$ henrios se aplica la tensión $v(t) = 150 \text{ sen } 1000t$. Hallar la corriente $i(t)$, la potencia instantánea $p(t)$ y la potencia media $P$.

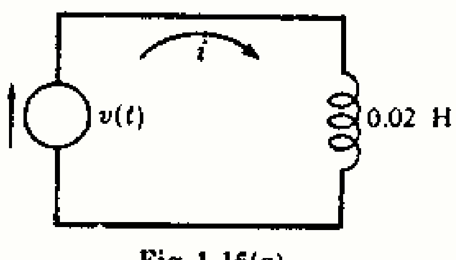



Fig. 1-16(*a*)

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt = \frac{1}{0{,}02}\int 150 \text{ sen } 1000t \, dt$$

$$= \frac{150}{0{,}02}\left(\frac{-\cos 1000t}{1000}\right) = -7{,}5 \cos 1000t \text{ A}$$

$p = vi = -150(7{,}5)(\frac{1}{2} \text{ sen } 2000t) = -562{,}5 \text{ sen } 2000t$ W. [$\text{sen } x \cos x = \frac{1}{2} \text{ sen } 2x$.] Evidentemente, la potencia media *P* es cero, como se indica en la Figura 1-16(*b*).

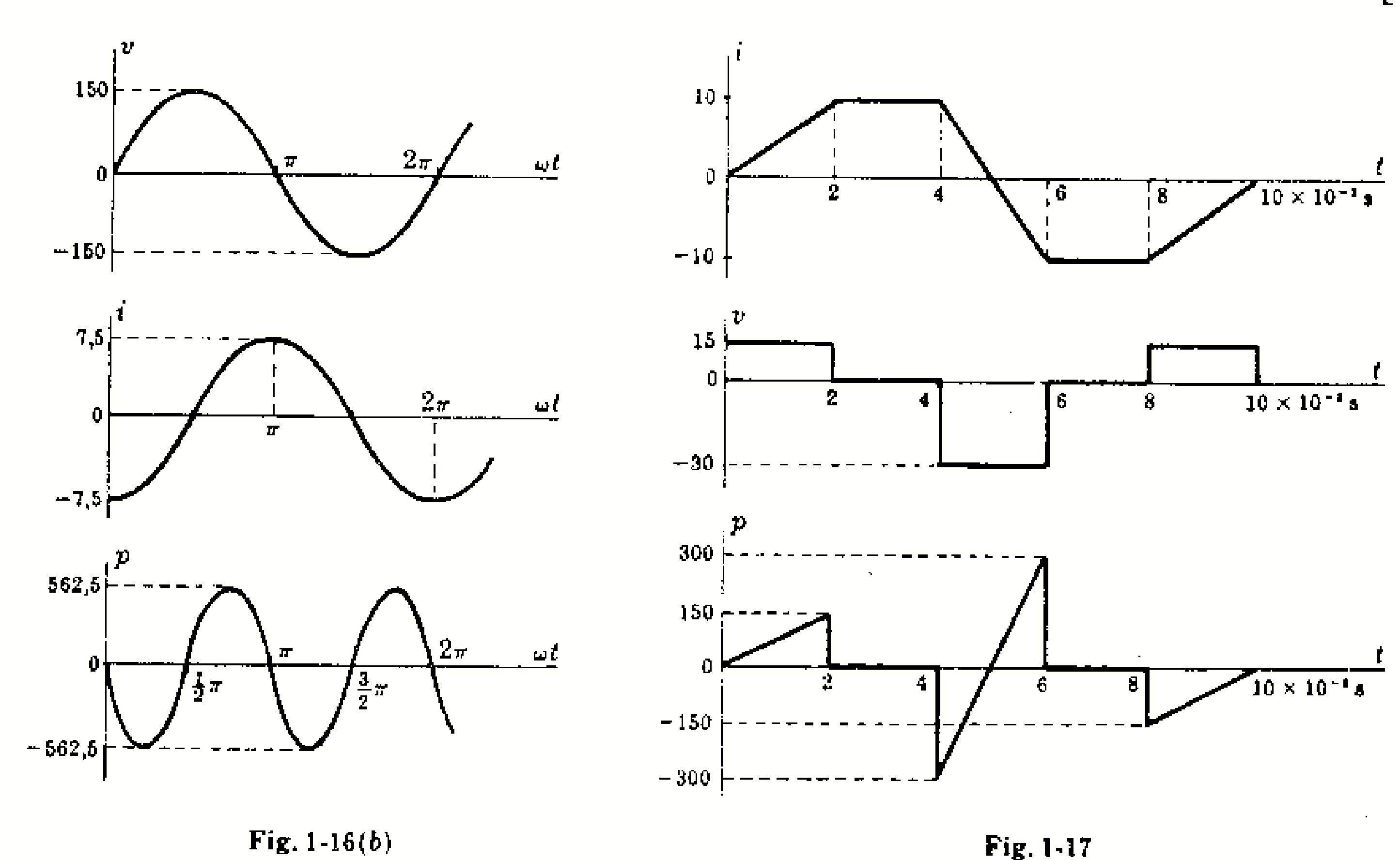


Fig. 1-16(b) Fig. 1-17

**1-11** Por una bobina pura de autoinducción igual a 3 milihenrios circula una corriente cuya forma de onda es la representada en la Fig. 1-17. Dibujar la gráfica de la tensión $v(t)$ y de la potencia instantánea $p(t)$. ¿Cuál es la potencia media $P$?

La intensidad de corriente instantánea $i(t)$ viene dada por (véase Fig. 1-17):

(1) $0 < t < 2$ ms $\quad i = 5 \times 10^3 t$

(2) $2 < t < 4$ ms $\quad i = 10$

(3) $4 < t < 6$ ms $\quad i = 10 - 10 \times 10^3(t - 4 \times 10^{-3}) = 50 - 10 \times 10^3 t$

(4) $6 < t < 8$ ms $\quad i = -10$

(5) $8 < t < 10$ ms $\quad i = -10 + 5 \times 10^3(t - 8 \times 10^{-3}) = -50 + 5 \times 10^3 t$

Las tensiones correspondientes son:

(1) $v_L = L\dfrac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3}\dfrac{d}{dt}(5 \times 10^3 t) = 15$ V

(2) $v_L = L\dfrac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3}\dfrac{d}{dt}(10) = 0$

(3) $v_L = L\dfrac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3}\dfrac{d}{dt}(50 - 10 \times 10^3 t) = -30$ V, etc.

Los valores de la potencia instantánea correspondiente son:

(1) $p = vi = 15(5 \times 10^3 t) = 75 \times 10^3 t$ W

(2) $p = vi = 0(10) = 0$ W

(3) $p = vi = -30(50 - 10 \times 10^3 t) = -1500 + 300 \times 10^3 t$ W, etc.

La potencia media $P$ es, evidentemente, nula.

**1-12** En el circuito constituido por dos bobinas de autoinducción $L_1$ y $L_2$ conectadas en serie se introduce un generador de tensión $v(t)$. Hallar la autoinducción equivalente $L_e$ que puede sustituirlas y por la que circularía la misma intensidad de corriente.

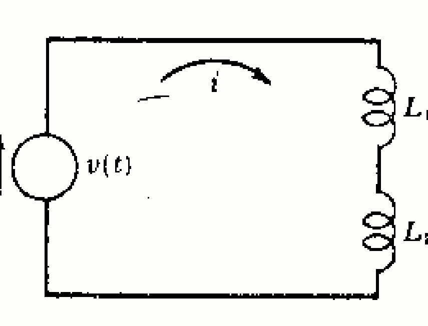



Fig. 1-18

Tensión aplicada = caída de tensión en $L_1$ + caída de tensión en $L_2$.

$$v(t) = L_e\frac{di}{dt} = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt}$$

de donde $\quad L_e = L_1 + L_2$.

**1-13** Hallar la autoinducción $L_e$ de la bobina equivalente a dos bobinas de autoinducciones $L_1$ y $L_2$ asociadas en paralelo como se representa en la Figura 1-19.

Supongamos aplicada una tensión $v(t)$ en los bornes de la asociación en paralelo, y que las corrientes que circulan por $L_1$ y $L_2$ sean $i_1$ e $i_2$, respectivamente. Como la intensidad total $i_T$ es la suma de las intensidades en cada rama,

$$i_T = i_1 + i_2 \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{L_e}\int v\,dt = \frac{1}{L_1}\int v\,dt + \frac{1}{L_2}\int v\,dt$$

Por tanto,
$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{o bien} \quad L_e = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

El recíproco de la autoinducción de la bobina equivalente a un número cualquiera de bobinas asociadas en paralelo es la suma de los recíprocos de las autoinducciones individuales.

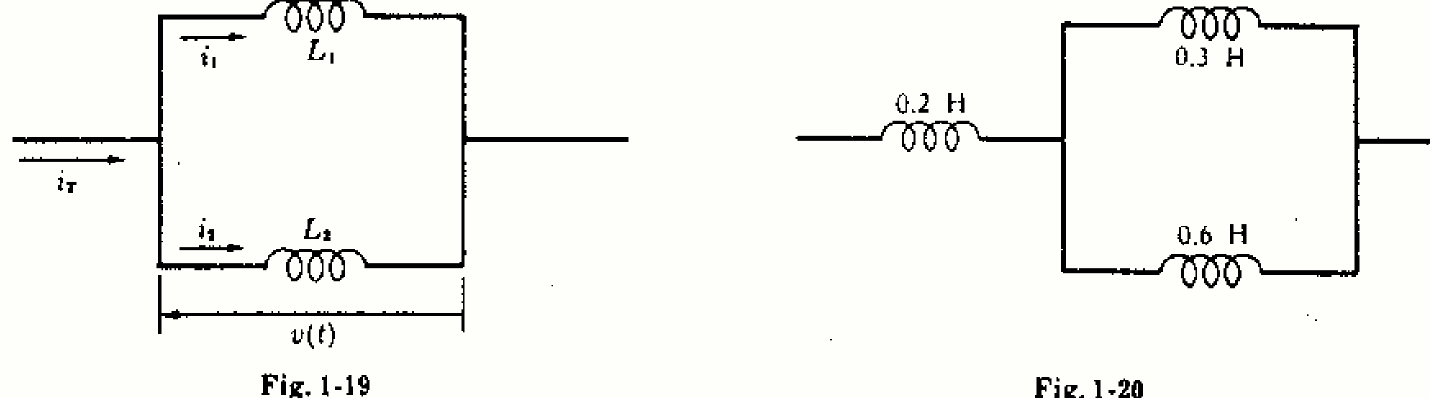



Fig. 1-19 Fig. 1-20

**1-14** Tres bobinas puras están conectadas como indica la Fig. 1-20. ¿Cuál es la autoinducción equivalente $L_e$ de la bobina que puede sustituir a todo el circuito?

La autoinducción equivalente de la asociación en paralelo es $L_p = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \dfrac{(0,3)(0,6)}{0,3 + 0,6} = 0,2$ H.

La autoinducción equivalente del circuito es $L_e = 0,2 + L_p = 0,4$ H.

**1-15** Por una bobina pura circula una corriente de intensidad $i(t) = I_m$ sen $\omega t$. Suponiendo que la energía almacenada en el campo magnético es cero para $t = 0$, obtener y dibujar la función de energía $w(t)$.

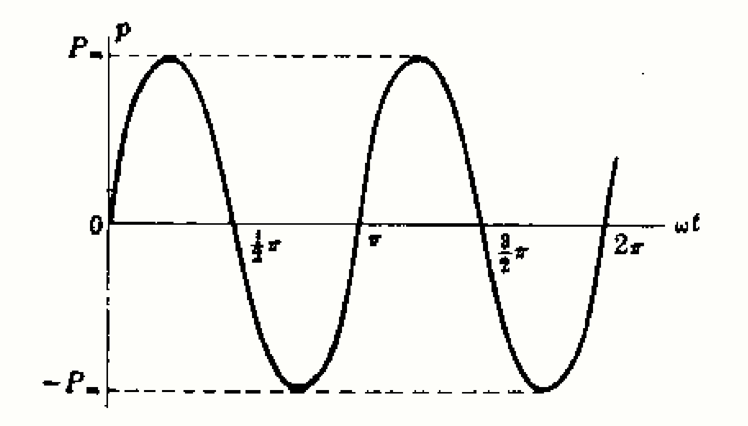
$$v(t) = L\frac{d}{dt}(I_m \operatorname{sen} \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

$$p(t) = vi = \omega L I_m^2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \tfrac{1}{2}\omega L I_m^2 \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$w(t) = \int_0^t \tfrac{1}{2}\omega L I_m^2 \operatorname{sen} 2\omega t\, dt = \tfrac{1}{4} L I_m^2 [-\cos 2\omega t + 1] = \tfrac{1}{2} L I_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$$

Para $\omega t = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$, etc., la energía almacenada es máxima e igual a $\frac{1}{2}LI_m^2$. Para $\omega t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$, etc., dicha energía es cero. En la Fig. 1-21 se pueden observar estos resultados.

Cuando $p(t)$ es positiva, la energía se almacena en la bobina. En los intervalos de $p(t)$ negativa, la energía del campo magnético pasa de la bobina al generador. Así, pues, una bobina pura no consume energía. La potencia media es nula y no existe transmisión de energía.



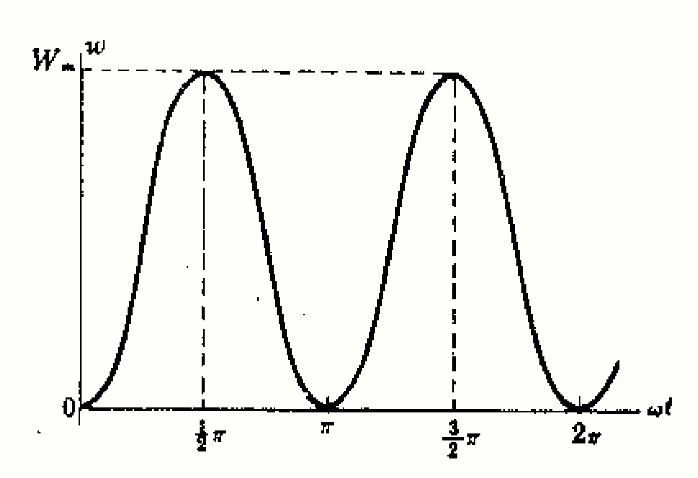




Fig. 1-21

**1-16** Consideremos un condensador puro al que se le aplica una tensión $v(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t$. Hallar la intensidad $i(t)$, la potencia $p(t)$, la carga $q(t)$ y la energía $w(t)$ almacenada en el campo eléctrico suponiendo que $w(t) = 0$ en el instante $t = 0$.

$$i(t) = C\,dv/dt = \omega C V_m \cos \omega t \text{ A}$$
$$p(t) = vi = \tfrac{1}{2}\omega C V_m^2 \operatorname{sen} 2\omega t \text{ W}$$
$$q(t) = Cv = CV_m \operatorname{sen} \omega t \text{ C}$$
$$w(t) = \int_0^t p\,dt = \tfrac{1}{4}CV_m^2(1 - \cos 2\omega t) = \tfrac{1}{2}CV_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \text{ J}$$

Para $\omega t = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$, etc., la energía almacenada es máxima e igual a $\frac{1}{2}CV_m^2$. Cuando $t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$, etc., la energía almacenada es nula. Todo esto se pone de manifiesto en la Figura 1-22.

Durante los intervalos en que $p(t)$ es positiva, la energía pasa del generador al campo eléctrico del condensador y se va almacenando en él. Cuando $p(t)$ es negativa, la energía almacenada retorna al generador. La potencia media es nula y no existe transmisión de energía.

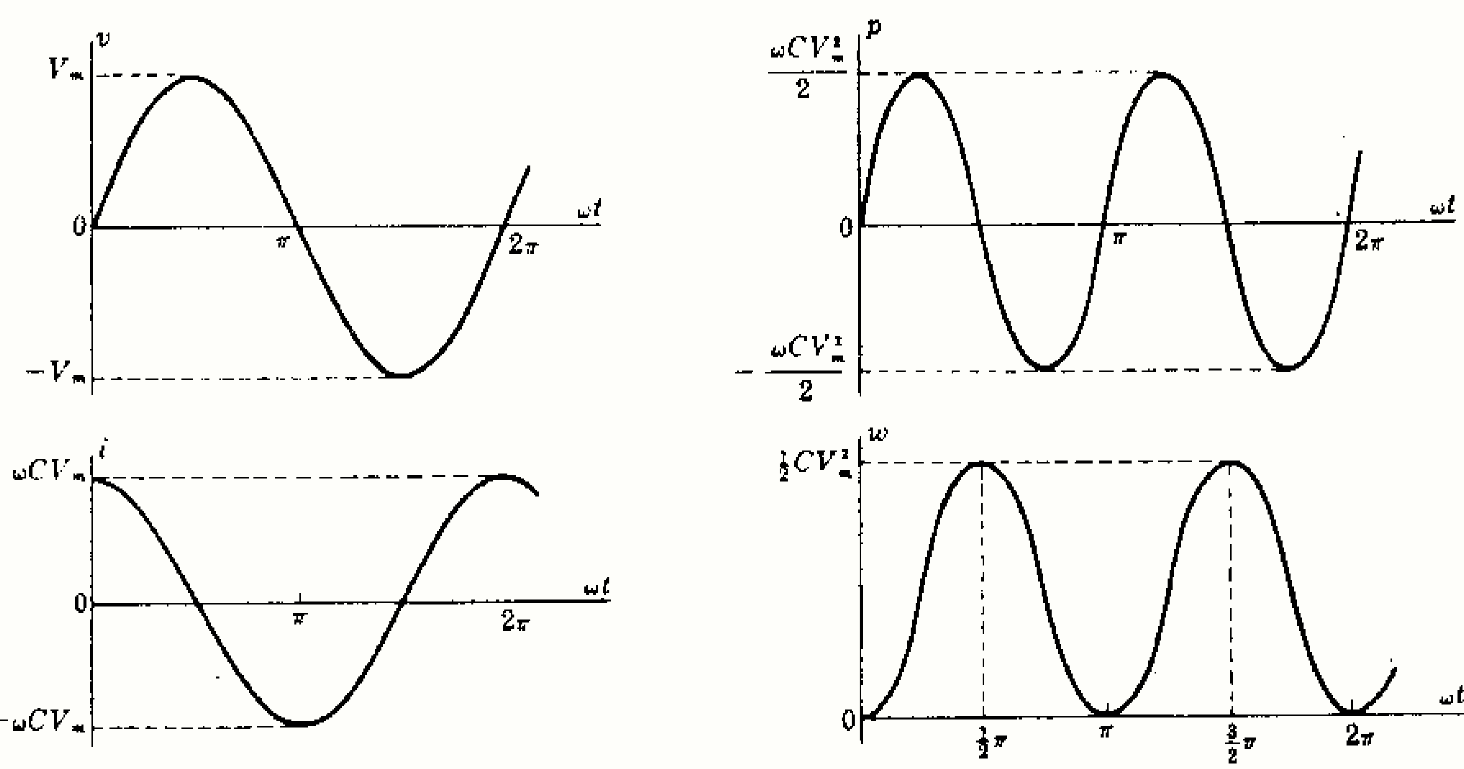



Fig. 1-22

**1-17** Hallar la capacidad equivalente de la asociación en paralelo de los dos condensadores $C_1$ y $C_2$ que se indican en la Figura 1-23.

Supongamos aplicada una tensión $v(t)$ a la combinación en paralelo de dichos condensadores, y sean $i_1$ e $i_2$ las intensidades de corrientes que circulan por $C_1$ y $C_2$, respectivamente. En estas condiciones, si la intensidad total es $i_T$,

$$i_T = i_1 + i_2 \quad \text{o bien} \quad C_e \frac{d}{dt} v(t) = C_1 \frac{d}{dt} v(t) + C_2 \frac{d}{dt} v(t), \text{ con lo que } C_e = C_1 + C_2$$

La capacidad del condensador equivalente de un número cualquiera de condensadores asociados en paralelo es la suma de las capacidades individuales.

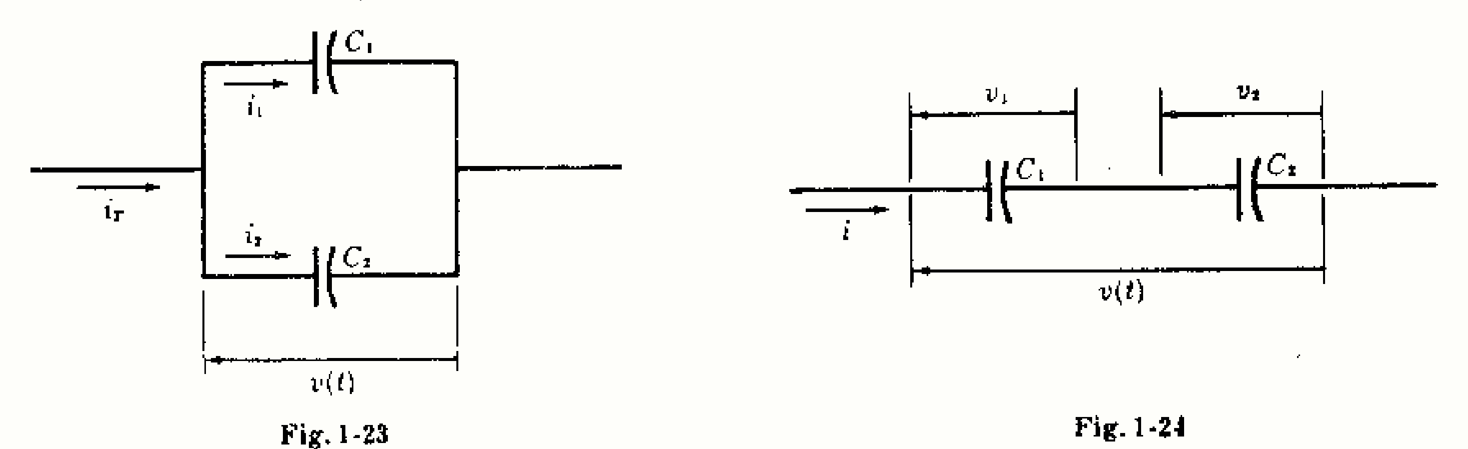



Fig. 1-23

Fig. 1-24

**1-18** Hallar la capacidad equivalente $C_e$ de la asociación en serie de los dos condensadores $C_1$ y $C_2$ que se indican en la Figura 1-24.

Supongamos aplicada una determinada tensión al circuito serie. Se ha de verificar:

Tensión aplicada = caída de tensión en $C_1$ + caída de tensión en $C_2$

$$\frac{1}{C_e}\int i(t)\,dt = \frac{1}{C_1}\int i(t)\,dt + \frac{1}{C_2}\int i(t)\,dt$$

Por tanto, $$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{o bien} \quad C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

El recíproco de la capacidad del condensador equivalente de un número cualquiera de condensadores asociados en serie es la suma de los recíprocos de las capacidades individuales.

**1-19** Hallar la capacidad equivalente $C_e$ de la asociación de condensadores representada en la Figura 1-25.

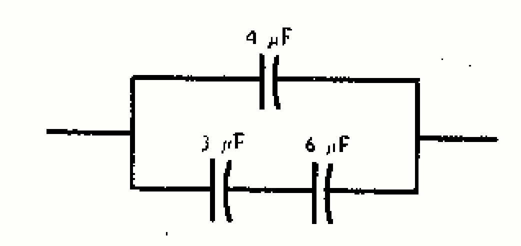


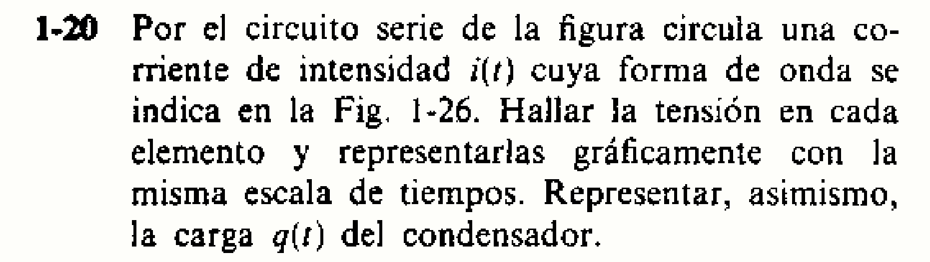
Fig. 1-25

La capacidad equivalente de la rama serie es

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(3)(6)}{3+6} = 2\ \mu\text{F}$$

Por tanto, la capacidad equivalente pedida es

$$C_e = 4 + C_s = 6\ \mu\text{F} = 6 \times 10^{-6}\ \text{F}.$$



**1-20** Por el circuito serie de la figura circula una corriente de intensidad $i(t)$ cuya forma de onda se indica en la Fig. 1-26. Hallar la tensión en cada elemento y representarlas gráficamente con la misma escala de tiempos. Representar, asimismo, la carga $q(t)$ del condensador.

En bornes de la resistencia: $v_R = Ri$

La gráfica de $v_R$ es semejante a la de intensidad de corriente, pero con un valor de pico igual a (2)(10) = 20 V.

En bornes de la bobina: $v_L = L\,di/dt$

(1) $0 < t < 1$ ms $\quad i = 10 \times 10^3 t$

$$v_L = (2 \times 10^{-3})(10 \times 10^3) = 20$$

(2) $1 < t < 2$ ms $\quad i = 10$

$$v_L = (2 \times 10^{-3})(0) = 0$$

etc.

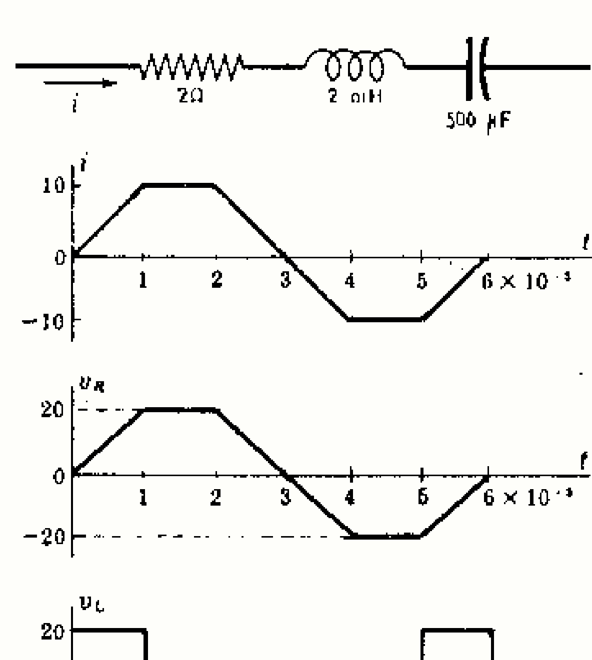
En bornes del condensador: $v_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,dt$

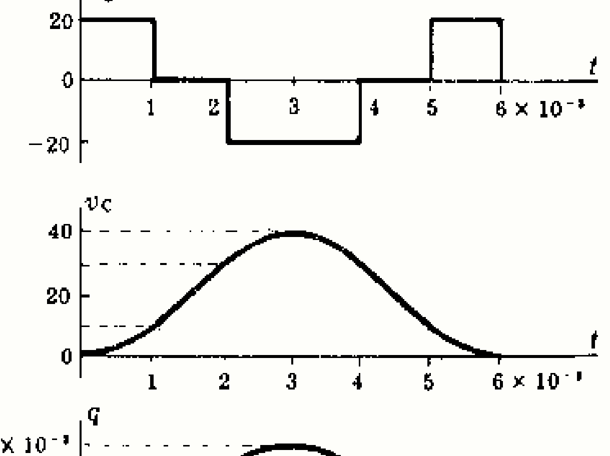
(1) $0 < t < 1$ ms
$$v_C = \frac{1}{500 \times 10^{-6}}\int_0^t (10 \times 10^3 t)\,dt = 10 \times 10^6 t^2$$

(2) $1 < t < 2$ ms
$$v_C = 10 + \frac{1}{500 \times 10^{-6}}\int_{10^{-3}}^t (10)\,dt = 10 + 20 \times 10^3 (t - 10^{-3})$$

etc.

La gráfica de $q$ se obtiene fácilmente a partir de la relación $q = Cv_C$. Obsérvese que cuando $i$ es positiva, $q$ y $v_C$ aumentan, es decir, la carga del condensador y la tensión entre sus armaduras aumentan simultáneamente. Cuando $i$ es negativa, ambas disminuyen.



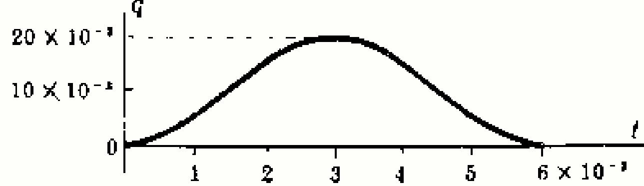



Fig. 1-26

# Problemas propuestos

**1-21** Tres elementos de resistencias $R_1$, $R_2$, $R_3$ están asociados en serie y el conjunto se alimenta con una tensión constante $V$. La caída de tensión en $R_1$ es de 20 voltios, la potencia disipada en $R_2$ es de 25 vatios y la resistencia $R_3$ vale 2 ohmios. Hallar la tensión $V$ sabiendo que la intensidad que circula por el circuito es de 5 amperios. *Sol.* 35 V

**1-22** La resistencia equivalente $R_e$ de dos en paralelo, $R_1$ y $R_2$, vale $\frac{10}{3}$ ohmios. Una corriente circulando por el circuito en paralelo se divide entre las dos resistencias en la proporción 2 a 1. Hallar los valores de $R_1$ y $R_2$. *Sol.* $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$.

**1-23** (*a*) Hallar la resistencia equivalente $R_e$ de las cuatro resistencias de la Figura 1-27.
(*b*) Aplicando una tensión constante $V = 100$ voltios al conjunto, ¿qué resistencia disipará mayor potencia?
*Sol.* (*a*) $R_e = 5{,}42\ \Omega$;
(*b*) La resistencia de 5 Ω disipa $P = 957$ W

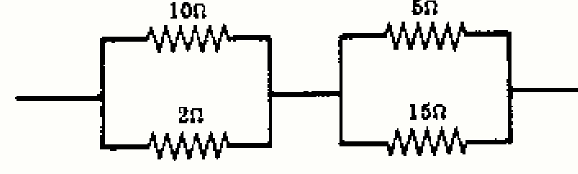



Fig. 1-27

**1-24** Un circuito se alimenta por dos generadores de tensión constante, como se indica en la Fig. 1-28. Hallar la potencia $P$ suministrada por cada generador. *Sol.* $P_{25} = 75$ W; $P_5 = 15$ W

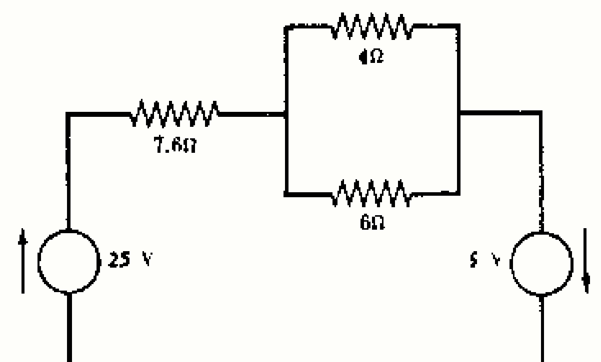



Fig. 1-28

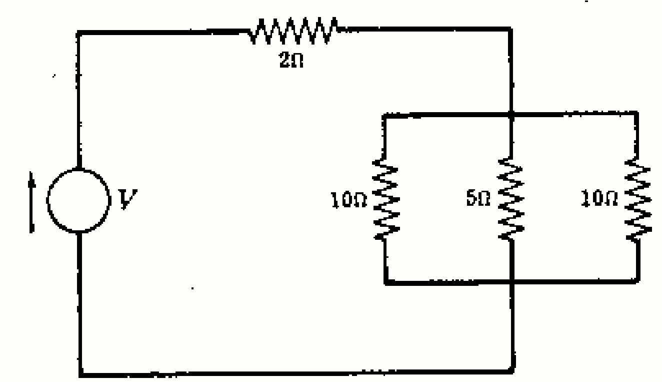



Fig. 1-29

**1-25** En el circuito de la Fig. 1-29 hallar la tensión constante $V$ sabiendo que la intensidad de la corriente que circula por la resistencia de 5 ohmios es de 14 amperios. *Sol.* 126 V

**1-26** ¿Cuál es la intensidad de corriente suministrada por el generador de 50 voltios de d.d.p. en bornes a la asociación de resistencias del circuito de la Figura 1-30? *Sol.* 13,7 A

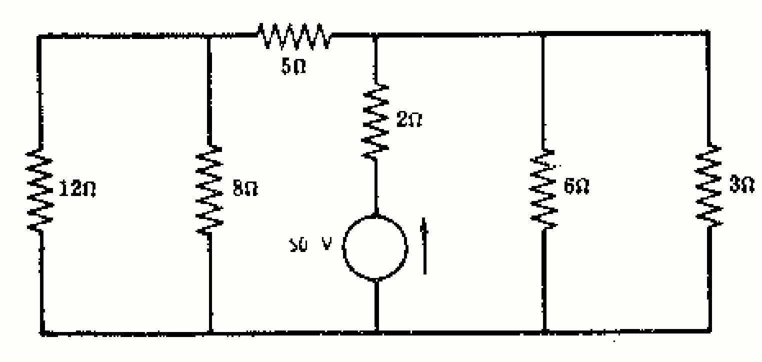



Fig. 1-30

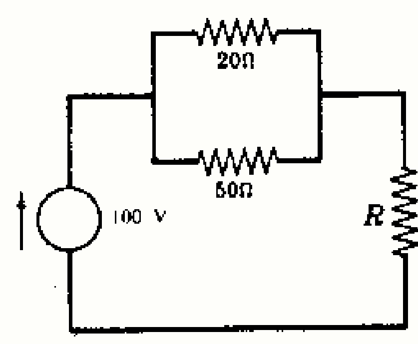



Fig. 1-31

**1-27** Hallar el valor de la resistencia $R$ de la Fig. 1-31 si la caída de tensión en ella vale 25 voltios. *Sol.* 4,76 Ω

**1-28** ¿A qué valor debe ajustarse la resistencia $R$ de la Fig. 1-32 para que la potencia disipada en la resistencia de 5 ohmios sea de 20 vatios? *Sol.* 16 Ω

**1-29** Una resistencia de 10 ohmios está conectada en serie con la asociación en paralelo de dos resistencias de 15 y 5 ohmios. Si la intensidad de corriente constante que circula por la resistencia de 5 ohmios es de 6 amperios, hallar la potencia total disipada en las tres resistencias. *Sol.* 880 W

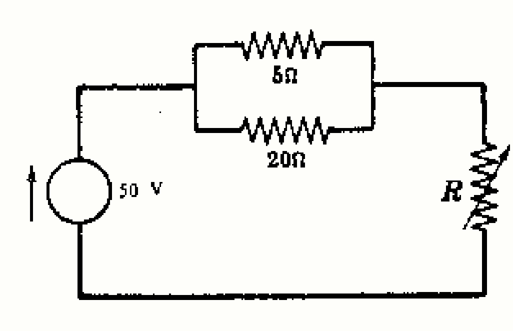



Fig. 1-32

# Problemas propuestos

1-21 Tres elementos de resistencias $R_1$, $R_2$, $R_3$ están asociados en serie y el conjunto se alimenta con una tensión constante $V$. La caída de tensión en $R_1$ es de 20 voltios, la potencia disipada en $R_2$ es de 25 vatios y la resistencia $R_3$ vale 2 ohmios. Hallar la tensión $V$ sabiendo que la intensidad que circula por el circuito es de 5 amperios. *Sol.* 35 V

1-22 La resistencia equivalente $R_e$ de dos en paralelo, $R_1$ y $R_2$, vale $\frac{10}{3}$ ohmios. Una corriente circulando por el circuito en paralelo se divide entre las dos resistencias en la proporción 2 a 1. Hallar los valores de $R_1$ y $R_2$. *Sol.* $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$.

1-23 (*a*) Hallar la resistencia equivalente $R_e$ de las cuatro resistencias de la Figura 1-27.
(*b*) Aplicando una tensión constante $V = 100$ voltios al conjunto, ¿qué resistencia disipará mayor potencia?
*Sol.* (*a*) $R_e = 5{,}42\ \Omega$;
(*b*) La resistencia de 5 Ω disipa $P = 957$ W

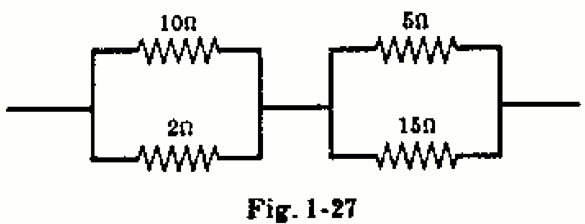


Fig. 1-27

1-24 Un circuito se alimenta por dos generadores de tensión constante, como se indica en la Fig. 1-28. Hallar la potencia $P$ suministrada por cada generador. *Sol.* $P_{25} = 75$ W; $P_5 = 15$ W

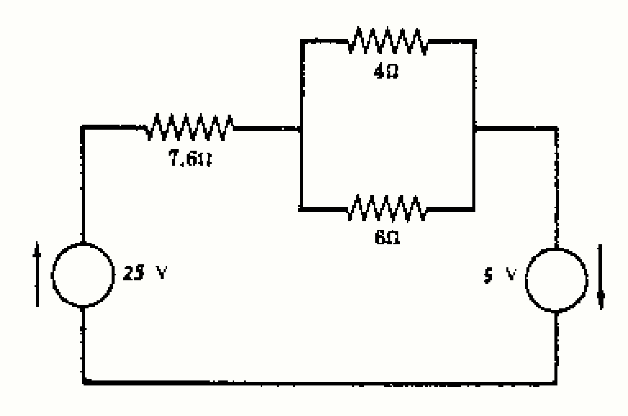


Fig. 1-28

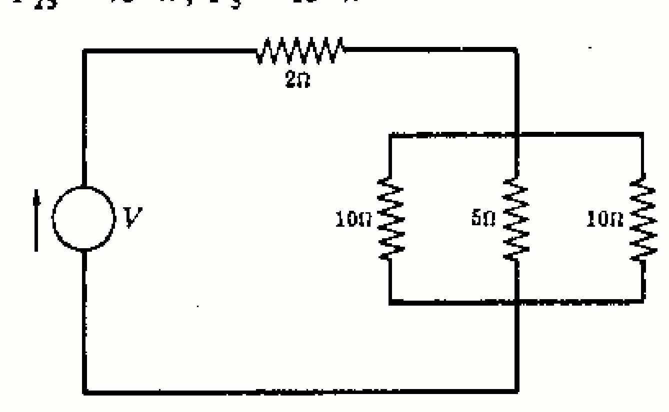


Fig. 1-29

1-25 En el circuito de la Fig. 1-29 hallar la tensión constante $V$ sabiendo que la intensidad de la corriente que circula por la resistencia de 5 ohmios es de 14 amperios. *Sol.* 126 V

1-26 ¿Cuál es la intensidad de corriente suministrada por el generador de 50 voltios de d.d.p. en bornes a la asociación de resistencias del circuito de la Figura 1-30? *Sol.* 13,7 A

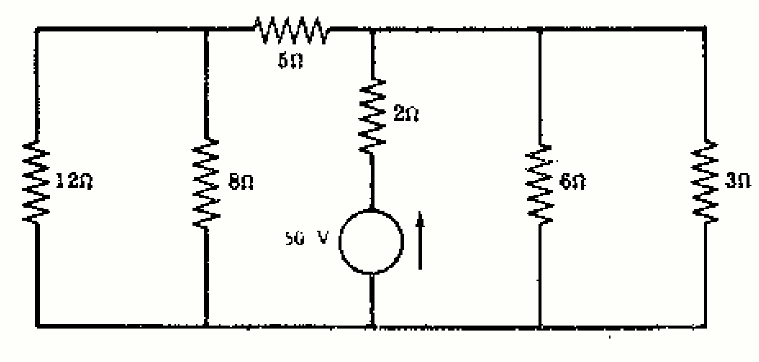


Fig. 1-30

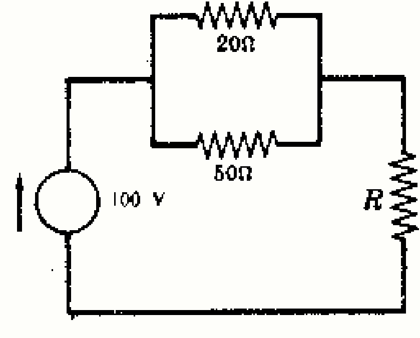


Fig. 1-31

1-27 Hallar el valor de la resistencia $R$ de la Fig. 1-31 si la caída de tensión en ella vale 25 voltios. *Sol.* 4,76 Ω

1-28 ¿A qué valor debe ajustarse la resistencia $R$ de la Fig. 1-32 para que la potencia disipada en la resistencia de 5 ohmios sea de 20 vatios? *Sol.* 16 Ω

1-29 Una resistencia de 10 ohmios está conectada en serie con la asociación en paralelo de dos resistencias de 15 y 5 ohmios. Si la intensidad de corriente constante que circula por la resistencia de 5 ohmios es de 6 amperios, hallar la potencia total disipada en las tres resistencias. *Sol.* 880 W

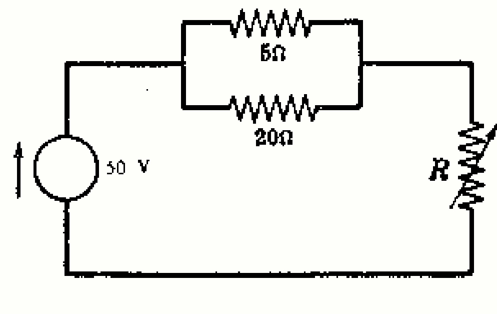


Fig. 1-32

**1-30** Las autoinducciones $L_1$ y $L_2$ de las bobinas de la Fig. 1-33 están en la relación 2 a 1. Sabiendo que la autoinducción equivalente $L_e$ de las tres vale 0,7 henrios, hallar los valores de $L_1$ y $L_2$.
*Sol.* $L_1 = 0{,}6$ H; $L_2 = 0{,}3$ H

**1-31** Las tres bobinas en paralelo de la Fig. 1-34 equivalen a una bobina de autoinducción $L_e$ igual a 0,0755 henrios. (*a*) Hallar el valor de la autoinducción desconocida $L$. (*b*) ¿Existe algún valor de $L$ que haga $L_e$ igual a 0,5 henrios? (*c*) ¿Cuál sería el valor máximo de $L_e$ si la autoinducción $L$ se pudiera ajustar sin límites?
*Sol.* (*a*) $L = 0{,}1$ H; (*b*) no; (*c*) 0,308 H

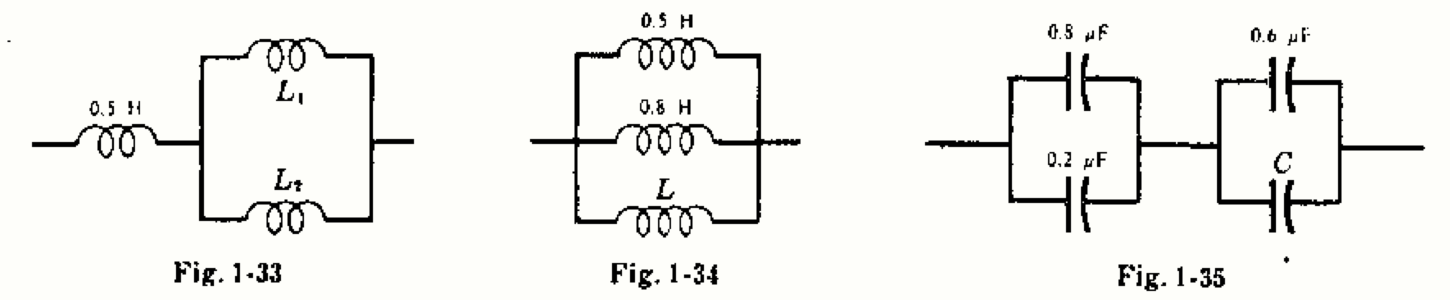



Fig. 1-33 Fig. 1-34 Fig. 1-35

**1-32** Hallar el valor de $C$ para que la capacidad del condensador equivalente a la asociación de la Fig. 1-35 sea de 0,5 microfaradios. *Sol.* 0,4 μF

**1-33** A la asociación de los cuatro condensadores representados en la Fig. 1-36 se aplica una tensión constante de 100 voltios. Hallar la carga $q$ en culombios que adquiere cada condensador.

*Sol.* $q_{0,8} = 40$ μC; $q_{0,2} = 10$ μC;
$q_{0,3} = 15$ μC; $q_{0,7} = 35$ μC

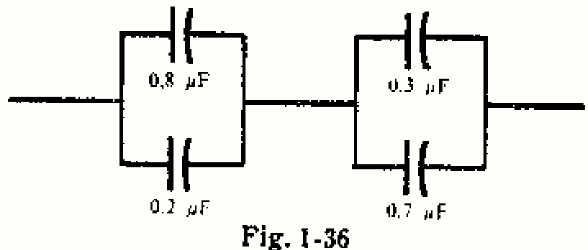



Fig. 1-36

**1-34** Los dos condensadores de la Fig. 1-37 se cargan mediante una conexión momentánea a tensión constante de 50 voltios entre los bornes $A$ y $B$. A continuación, se unen dichos terminales $A$ y $B$ sin el generador de 50 voltios. Determinar la carga final de cada condensador.
*Sol.* $q_{20} = 444{,}33$ μC; $q_{40} = 888{,}67$ μC

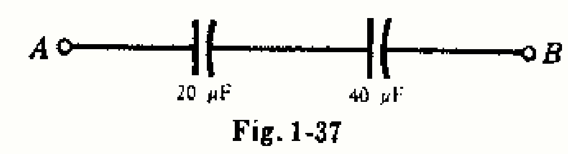



Fig. 1-37

**1-35** Demostrar que al aplicar una tensión $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$ a una resistencia pura $R$, la energía viene dada por $w = \frac{V_m^2}{2R}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{2\omega}\right)$.

**1-36** Por una bobina de autoinducción $L$ circula una corriente de intensidad $i = I_m[1 - e^{-\frac{R}{L}t}]$. Demostrar que la máxima energía almacenada en el campo magnético es $W_m = \frac{1}{2}LI_m^2$, siendo $i = 0$ para $t < 0$.

**1-37** Si la intensidad de corriente que pasa por un condensador es $i = \frac{V_m}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$, demostrar que la máxima energía almacenada en el campo eléctrico es $W_m = \frac{1}{2}CV_m^2$, siendo $i = 0$ para $t < 0$.

**1-38** En el circuito $RC$ de la Fig. 1-38 la energía total disipada en la resistencia de 10 ohmios cuando se cierra el interruptor es de $3{,}6 \times 10^{-3}$ julios. Hallar el valor de la carga inicial $q_0$ del condensador. *Sol.* $q_0 = 120$ μC.

Fig. 1-38

**1-39** Demostrar que las expresiones $\frac{1}{2}CV^2$ y $\frac{1}{2}LI^2$ tienen dimensiones de una energía $w$.

**1-40** A un condensador de 60 microfaradios se le aplica una tensión cuya forma de onda es la representada en la Fig. 1-39. Dibujar $i(t)$, $p(t)$ y calcular $I_m$ y $P_m$.
*Sol.* $I_m = 1{,}5$ A; $P_m = 75$ W.

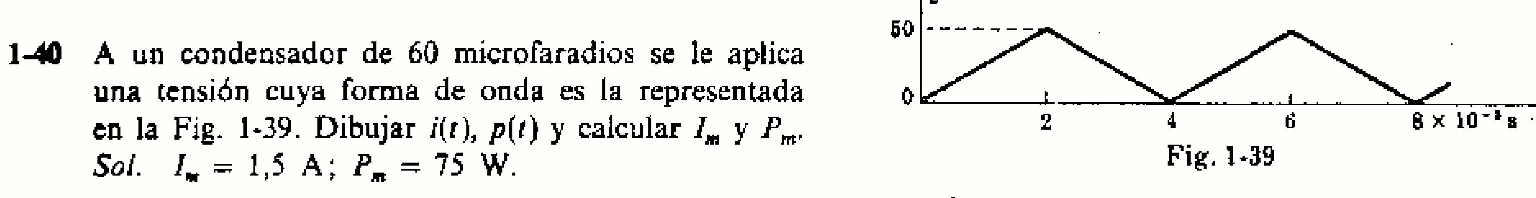
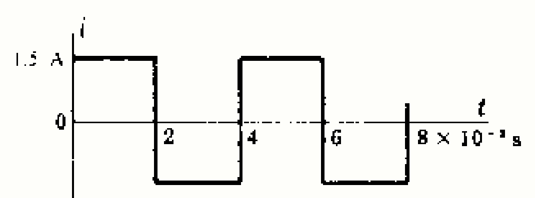
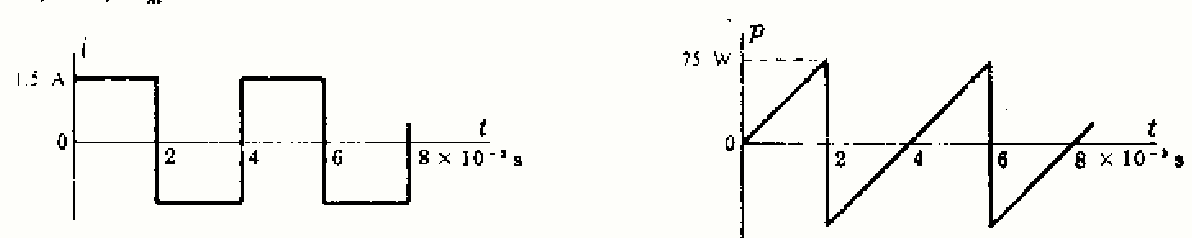



Fig. 1-39



**1-41** Hallar la expresión de la intensidad de corriente que atraviesa un condensador si la tensión entre sus placas viene dada por

$$v = V_m\left[\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} + \cdots\right].$$

*Sol.* $i = \omega C V_m\left[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \cdots\right]$ o bien $i = \omega C V_m \cos \omega t$

**1-42** Por un condensador puro de 25 microfaradios de capacidad circula una corriente cuya forma de onda es la representada en la Fig. 1-40. Obtener la forma de onda de la tensión y determinar los valores máximos $V_m$ y $Q_m$.

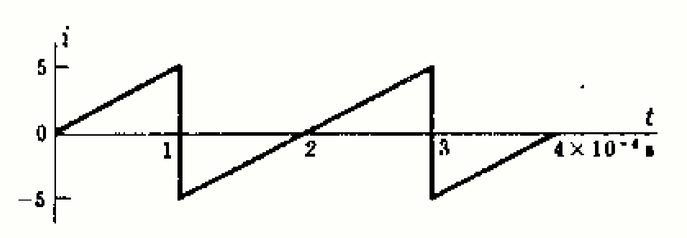
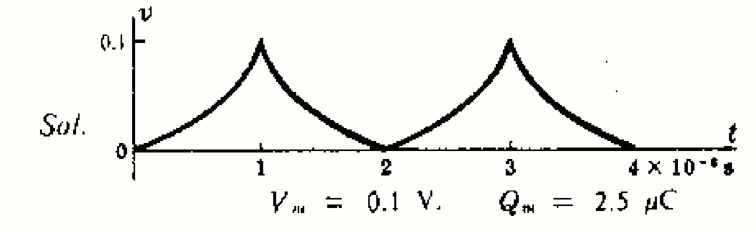



Fig. 1-40

*Sol.*



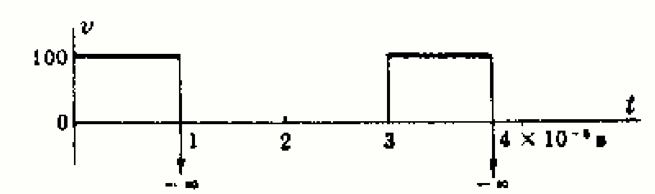

$V_m = 0.1$ V. $Q_m = 2.5\ \mu$C

**1-43** La función que expresa la carga de un condensador de 2 microfaradios de capacidad es $q = 100[1 + e^{-5\times10^4 t}]$ microculombios. Determinar las funciones correspondientes de la tensión y de intensidad de corriente.
*Sol.* $v = 50[1 + e^{-5\times10^4 t}]$ V; $i = -5e^{-5\times10^4 t}$ A.

**1-44** Por una bobina de autoinducción $L$ circula una corriente cuya forma de onda de su intensidad es la representada en la Fig. 1-41. Sabiendo que la forma de onda de la tensión correspondiente tiene un valor de pico de 100 voltios, hallar el coeficiente $L$. Dibujar la forma de onda de la tensión. *Sol.* $L = 0{,}5$ H.




Fig. 1-41




*Nota.* En la práctica, no es posible que la corriente que circula por una bobina sea una función discontinua, como ocurre con la forma de onda de esta corriente en los instantes $t = 1$ ms y $t = 4$ ms, ya que la tensión es la primera derivada de la intensidad respecto del tiempo y esta derivada tiene un valor negativo infinito en los puntos de discontinuidad, en los que la forma de onda de la tensión tendría unos valores negativos infinitos.

**1-45** En los bornes o terminales de una bobina pura de autoinducción 0,05 henrios se aplica una tensión cuya forma de onda es la representada en la Fig. 1-42. Obtener la forma de onda correspondiente a la intensidad de corriente así como la expresión de $i$ en el intervalo $0 < t < 2$ milisegundos. *Sol.* $i = 5 \times 10^5 t^2$.

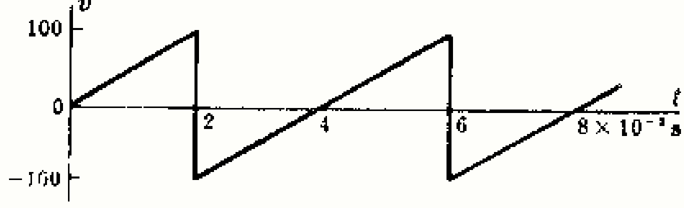
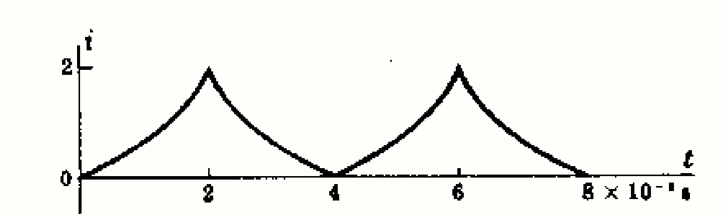



Fig. 1-42




**1-46** En la Fig. 1-43 se muestra la intensidad de corriente que circula por un circuito serie constituido por una resistencia de 20 ohmios y una bobina de 1 henrio de autoinducción. Obtener las formas de onda de la caída de tensión en la resistencia $v_R$, en la autoinducción $v_L$ y su suma.
*Sol.* Para $0 < t < 0{,}1$ s;
$v_R = 200e^{-200t}$; $v_L = -200e^{-200t}$; $v_T = 0$.

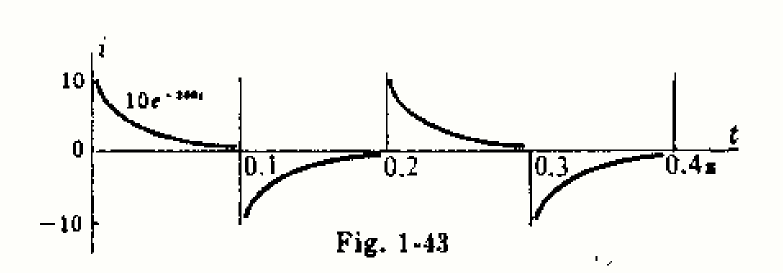
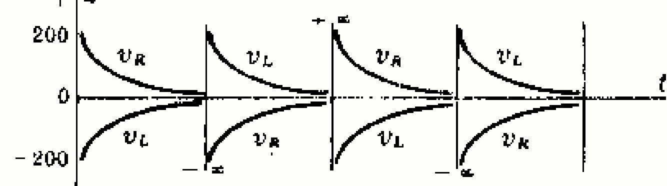
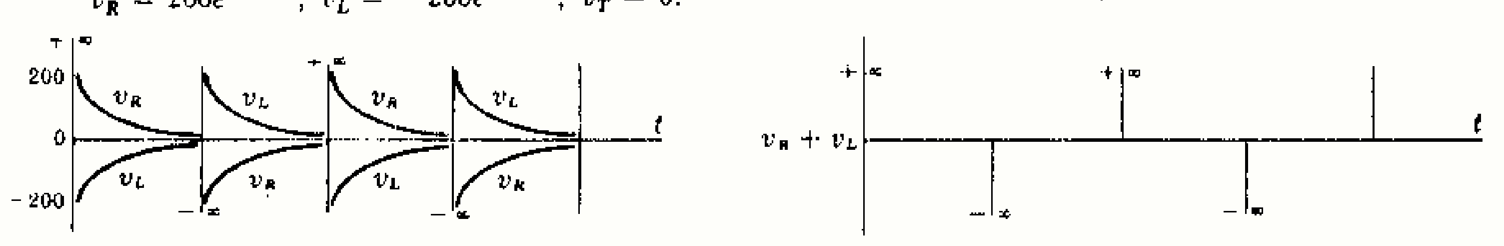



Fig. 1-43



**1-47** Por un circuito serie compuesto por una resistencia $R = 5$ ohmios y una bobina de $L = 0{,}004$ henrios circula una corriente cuya forma de onda de su intensidad es la representada en la Fig. 1-44. Obtener las gráficas de $v_R$ y $v_L$.

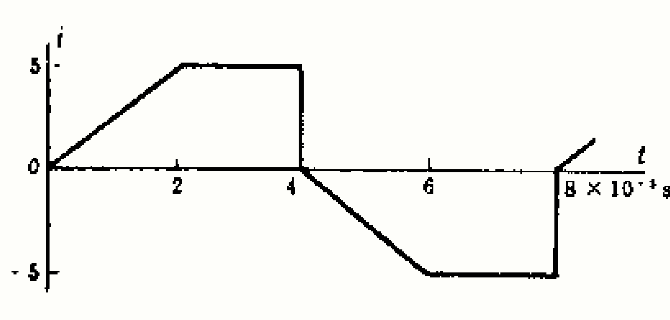


Fig. 1-44

*Sol.*

**1-48** A un circuito serie *RL*, con $R = 10$ ohmios y $L = 0{,}5$ henrios, se le aplica una tensión senoidal. La intensidad de corriente resultante es $i = 0{,}822\ e^{-20t} + 0{,}822$ sen $(377t - 86{,}96°)$. Hallar las caídas de tensión correspondientes $v_R$, $v_L$ y $v_T$.

*Sol.* $v_R = 8{,}22\ e^{-20t} + 8{,}22$ sen $(377t - 86{,}96°)$;
$v_L = -8{,}22\ e^{-20t} + 155$ cos $(377t - 86{,}96°)$;
$v_T = 155$ sen $377t$.

**1-49** Por un circuito serie *RL*, con $R = 100$ ohmios y $L = 0{,}05$ henrios, circula una corriente cuya función de intensidad se detalla a continuación. Hallar los valores de $v_R$ y $v_L$ en cada intervalo.
(1) $0 < t < 10 \times 10^{-3}$ s, $i = 5[1 - e^{-2000t}]$.
(2) $10 \times 10^{-3} < t$, $i = 5\ e^{-2000(t - 10 \times 10^{-3})}$.
*Sol.* (1) $v_R = 500[1 - e^{-2000t}]$, $v_L = 500\ e^{-2000t}$;
(2) $v_R = 500\ e^{-2000(t-10 \times 10^{-3})}$, $v_L = -500\ e^{-2000(t-10\times 10^{-3})}$.

**1-50** La intensidad de corriente en un circuito serie *RC* es $i = 10\ e^{-500t}$. Sabiendo que el condensador está inicialmente descargado y que la tensión aplicada es $V = 100$ voltios y $v_C = 100[1 - e^{-500t}]$, hallar $C$ y $v_R$.
*Sol.* $C = 200\ \mu$F; $v_R = 100\ e^{-500t}$ V.

**1-51** Por un circuito serie *LC*, con $L = 0{,}02$ henrios y $C = 30\ \mu$F, circula una corriente de intensidad $i = 1{,}5 \cos 1000t$. Hallar la tensión total $v_T$. *Sol.* $v_T = 20$ sen $1000t$.

**1-52** A un circuito paralelo *RL* se le aplica la tensión de onda cuadrada que se representa en la Fig. 1-45. Hallar la intensidad de corriente total.

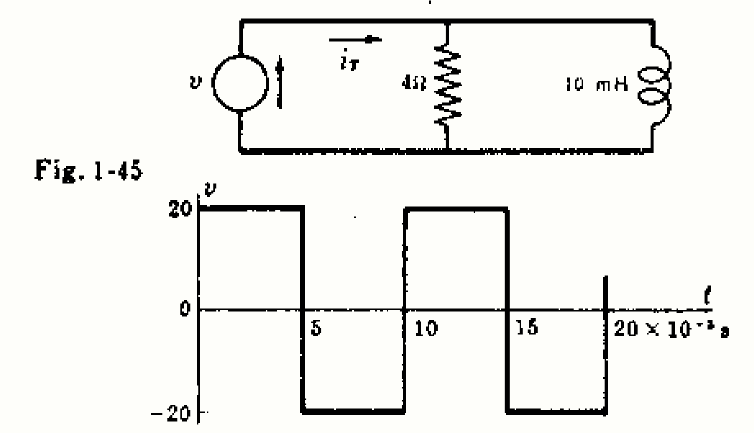
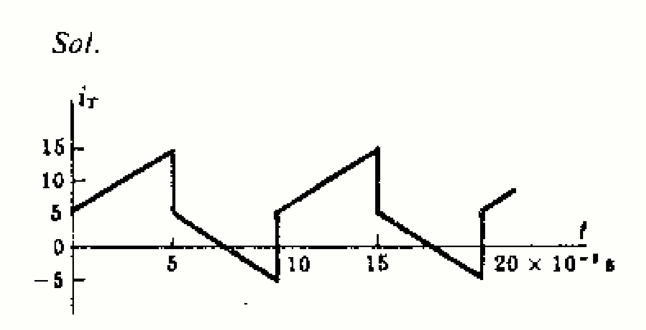



Fig. 1-45

*Sol.*



**1-53** A un circuito paralelo *RC* se le aplica una tensión cuya forma de onda se representa en la Fig. 1-46. Hallar la corriente total $i_T$.

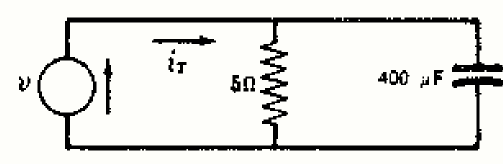
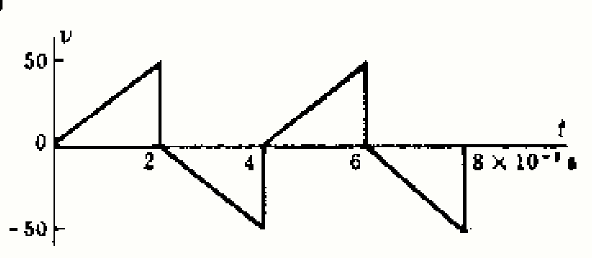
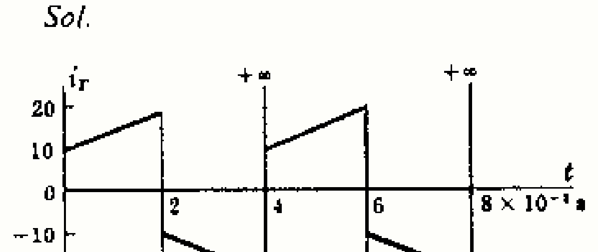



Fig. 1-46



*Sol.*



# Capítulo 2

## Valores medio y eficaz

### FORMAS DE ONDA

Las representaciones de las funciones $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$, etc., se llaman formas de onda de tensión, intensidad de corriente, potencia eléctrica, etc., respectivamente. En el análisis de circuitos preliminar solo estudiaremos las funciones periódicas, es decir, aquellas en las que $f(t) = f(t + nT)$, siendo $n$ un número entero y $T$ el periodo que se muestra en la Fig. 2-1. Para ver la forma de onda de una función periódica debe representarse, al menos, un periodo.

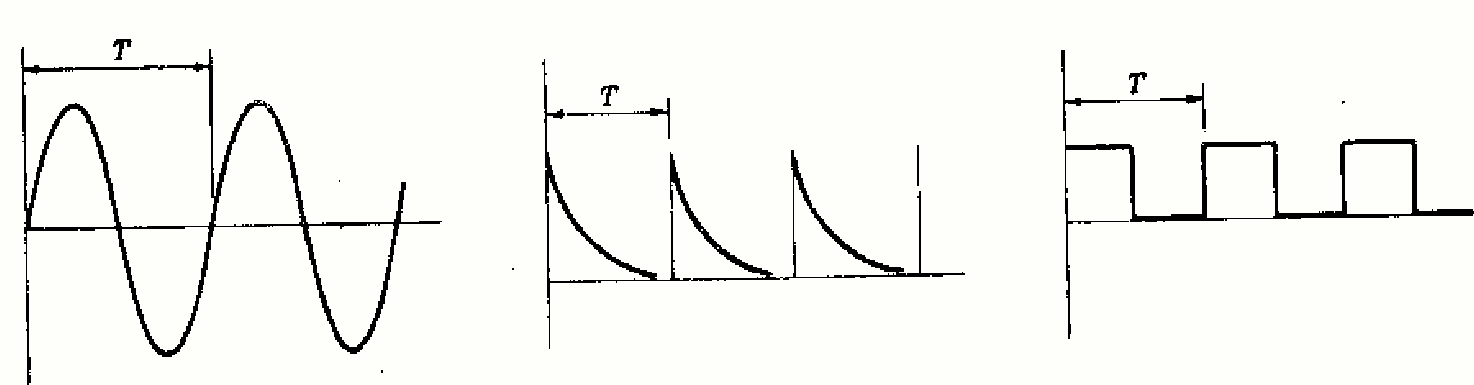



**Fig. 2-1. Formas de onda periódicas**

Las funciones de tensión e intensidad, $v(t)$ e $i(t)$, son expresiones matemáticas que se pueden dar de varias maneras, según los casos. Por ejemplo, las funciones seno y coseno se pueden expresar mediante series potenciales infinitas. Sin embargo, sería muy penoso aplicar estas formas matemáticas a las ecuaciones básicas relativas a la tensión e intensidad en los tres elementos fundamentales de los circuitos.

### VALOR MEDIO

El valor medio $Y_{med}$ de una función periódica $y(t)$ de periodo $T$ es, por definición,

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

### VALOR EFICAZ

Al circular una corriente de intensidad $i(t)$ por un elemento resistivo puro de resistencia $R$, éste disipa una potencia $p(t)$ con un valor medio $P$. Pues bien, esta misma potencia $P$ la puede disipar una corriente constante de intensidad $I$ circulando por dicha $R$. En estas condiciones, diremos que $i(t)$ tiene un valor eficaz $I_{ef}$ equivalente a la corriente constante $I$. Lo mismo diríamos respecto de la tensión eficaz $V_{ef}$. Matemáticamente, dada la función $y(t)$ de periodo $T$, su valor eficaz —o raíz cuadrática media— es, por definición,

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \overline{y(t)}^2\,dt}$$

El valor eficaz de las funciones $a$ sen $\omega t$ y $a$ cos $\omega t$ durante un periodo es $a/\sqrt{2}$. (Véase Problema 2-2.)

## VALOR EFICAZ DE UNA FUNCION DE SENOS Y COSENOS

El valor eficaz de la función $y(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots) + (b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \cdots)$ viene dado por

$$Y_{ef} \quad = \quad \sqrt{a_0^2 + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots) + \tfrac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots)}$$

Llamando $A$ al valor eficaz de la función $a_1 \cos \omega t$, según lo dicho en la sección anterior, $A_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt{2}}$ o bien $A_1^2 = \dfrac{a_1^2}{2}$, por tanto

$$Y_{ef} \quad = \quad \sqrt{a_0^2 + (A_1^2 + A_2^2 + \cdots) + (B_1^2 + B_2^2 + \cdots)}$$

## FACTOR DE FORMA

El factor de forma de una onda es la relación entre los valores eficaz y medio de la misma.

$$\text{Factor de forma} \quad = \quad \frac{Y_{ef}}{Y_{med}} \quad = \quad \frac{\sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \overline{y(t)}^2\, dt}}{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(t)\, dt}$$

Las formas de onda tales que $f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$, es decir, aquellas ondas cuyos semiperiodos son simétricos con respecto al eje de tiempos, tienen un valor medio igual a cero, como puede observarse en la Fig. 2-2. Para salvar la dificultad en este tipo de ondas, de las que la función seno es el ejemplo más característico, se suele tomar el valor medio $Y_{med}$, del semiperiodo positivo. Este valor se llama a veces valor medio de un semiciclo.

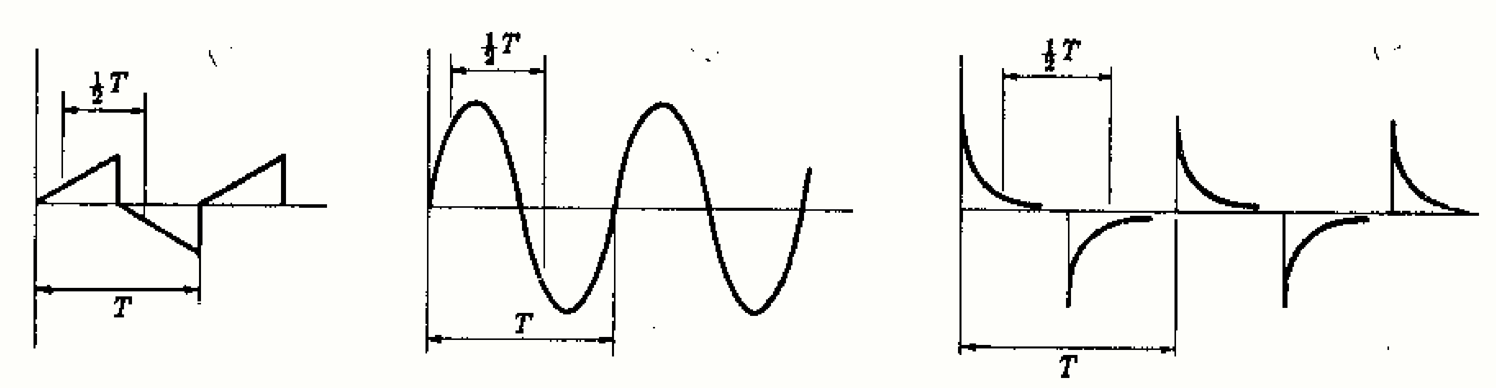



**Fig. 2-2. Ondas de semiperiodo simétrico**

Existen, sin embargo, otras formas de onda cuyo valor medio en un periodo es nulo y que no presentan aquella simetría, como las representadas en la Fig. 2-3. El cálculo del valor $Y_{med}$ para obtener el factor de forma también se realiza en un semiperiodo, análogamente a como dijimos para las anteriores.

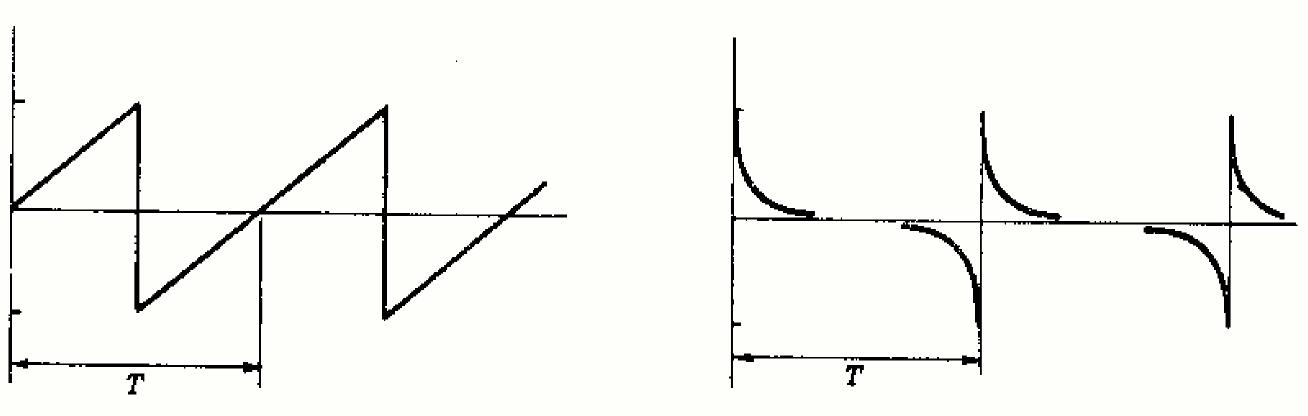



**Fig. 2-3**

# Problemas resueltos

**2-1** Por una resistencia circula (*a*) una corriente de intensidad constante $I$, (*b*) una corriente periódica $i(t)$ de periodo $T$. (Véase Fig. 2-4.) Demostrar que si $I_{ef} = I$, la potencia media $P$ es la misma en ambos casos.

Corriente constante $I$: $P = VI = RI^2$

Corriente periódica $i(t)$: $p = vi = Ri^2$ y $P = \left(\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt\right)R = RI_{ef}^2$

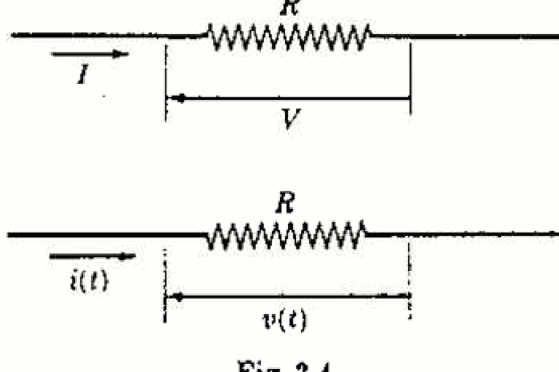



Fig. 2-4

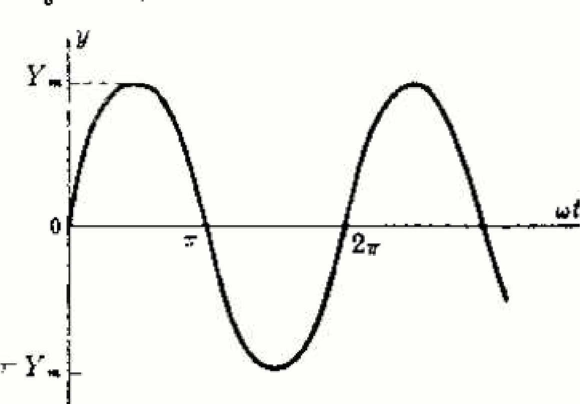



Fig. 2-5

**2-2** Hallar los valores medio y eficaz de la función $y(t) = Y_m$ sen $\omega t$.

El periodo de la función es $2\pi$. La gráfica se representa con $\omega t$ como variable independiente (Figura 2-5).

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_m \operatorname{sen}\omega t\, d(\omega t) = \frac{1}{2\pi}Y_m\Big[-\cos\omega t\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Y_m \operatorname{sen}\omega t)^2\,d(\omega t)} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,Y_m$$

El valor eficaz de una función pura senoidal o cosenoidal es $1/\sqrt{2}$ o bien 0,707 veces el valor máximo.

**2-3** Hallar la potencia media $P$ disipada en una resistencia de 10 ohmios por la que circula una corriente $i(t) = 14{,}14 \cos\omega t$ amperios.

Como $p = vi = Ri^2 = 2000\cos^2\omega t$ y su periodo es $\pi$, la potencia media vale

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2000\cos^2\omega t\,d(\omega t) = 1000 \text{ W}$$

*Otro método.* La potencia media disipada por una resistencia pura por la que circula una corriente periódica es

$$P = RI_{ef}^2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(14{,}14\cos\omega t)^2\,d(\omega t)\right\}10 = (14{,}14/\sqrt{2})^2(10) = 1000 \text{ W}$$

**2-4** Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda en diente de sierra representada en la Figura 2-6.

Evidentemente, $Y_{med} = 25$. En el intervalo $0 < t < 2$, $y = 25t$; por tanto,

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 625t^2\,dt = 834, \quad \text{de donde} \quad Y_{ef} = 28{,}9$$

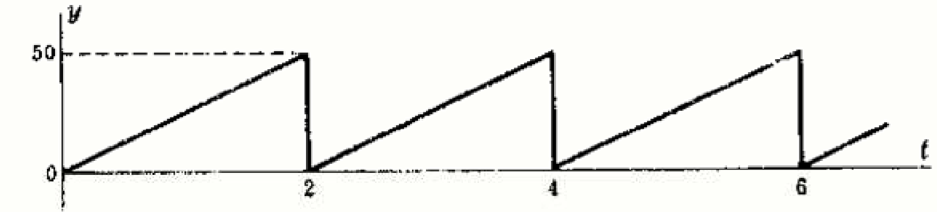



Fig. 2-6

**2-5** Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda representada en la Fig. 2-7 en cuyo primer intervalo $y = 10e^{-200t}$.

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt = \frac{1}{0{,}05}\int_0^{0{,}05} 10\,e^{-200t}\,dt = \frac{10}{0{,}05(-200)}\Big[e^{-200t}\Big]_0^{0{,}05}$$
$$= -1[e^{-10} - e^0] = 1{,}00$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dt = \frac{1}{0{,}05}\int_0^{0{,}05} 100\,e^{-400t}\,dt = 5{,}00, \quad \text{de donde} \quad Y_{ef} = 2{,}24$$

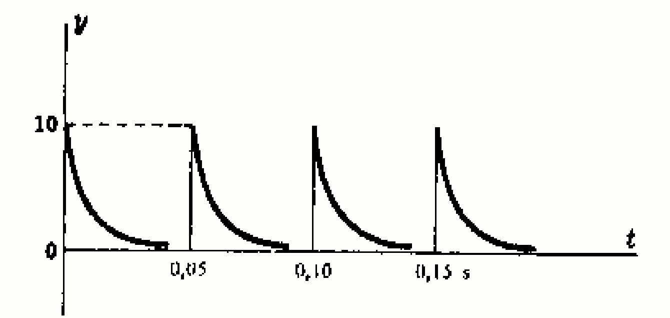



Fig. 2-7

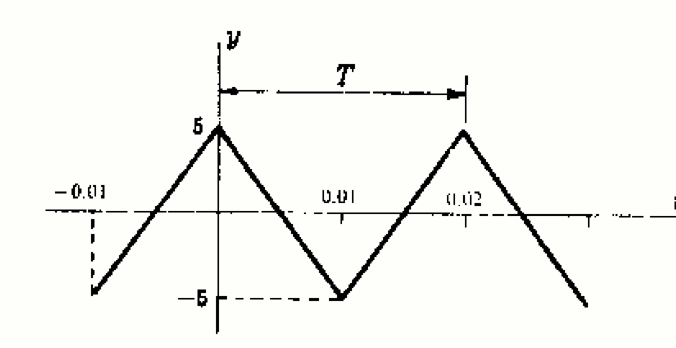



Fig. 2-8

**2-6** Hallar el factor de forma de la onda triangular representada en la Figura 2-8.

$$-0{,}01 < t < 0: \quad y(t) = 1000t + 5; \quad \overline{y(t)}^2 = 10^6t^2 + 10^4t + 25$$
$$0 < t < 0{,}01: \quad y(t) = -1000t + 5; \quad \overline{y(t)}^2 = 10^6t^2 - 10^4t + 25$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{0{,}02}\left\{\int_{-0{,}01}^{0} (10^6t^2 + 10^4t + 25)\,dt + \int_0^{0{,}01} (10^6t^2 - 10^4t + 25)\,dt\right\} = 8{,}33, \qquad Y_{ef} = 2{,}89$$

Como la onda es simétrica, su valor medio se calcula sobre la parte positiva, es decir,

$$Y_{med} = \frac{1}{0{,}01}\left\{\int_{-0{,}005}^{0} (1000t + 5)\,dt + \int_0^{0{,}005} (-1000t + 5)\,dt\right\} = 2{,}5$$

$$\text{Factor de forma} = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}} = \frac{2{,}89}{2{,}5} = 1{,}16$$

**2-7** Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda senoidal representada en la Figura 2-9.

Para $0 < \omega t < \pi$, $y = Y_m \operatorname{sen} \omega t$; para $\pi < \omega t < 2\pi$, $y = 0$. El periodo es $2\pi$.

$$Y_{med} = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} Y_m \operatorname{sen} \omega t\, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0\, d(\omega t)\right\} = 0{,}318\,Y_m$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (Y_m \operatorname{sen} \omega t)^2\, d(\omega t) = \tfrac{1}{4}Y_m^2, \qquad Y_{ef} = \tfrac{1}{2}Y_m$$

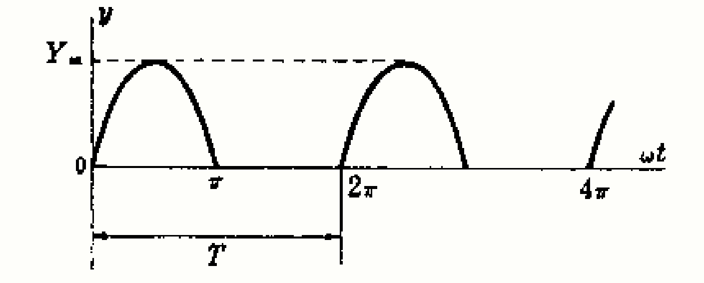



Fig. 2-9

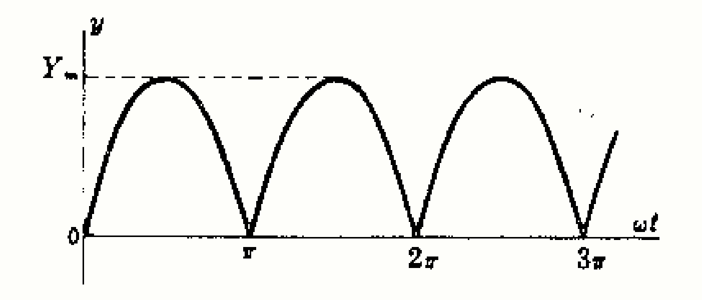



Fig. 2-10

**2-8** Hallar los valores medio y eficaz de la onda completa senoidal rectificada de la Fig. 2-10. El periodo es $\pi$.

$$Y_{med} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Y_m \operatorname{sen} \omega t\, d(\omega t) = 0{,}637\,Y_m$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (Y_m \operatorname{sen} \omega t)^2\, d(\omega t) = \frac{Y_m^2}{2}, \qquad Y_{ef} = 0{,}707\,Y_m$$

**2-9** Hallar los valores medio y eficaz de la onda cuadrada representada en la Figura 2-11.

Para $0 < t < 0{,}01$, $y = 10$; para $0{,}01 < t < 0{,}03$, $y = 0$. El periodo es 0,03 s.

$$Y_{med} = \frac{1}{0{,}03}\int_0^{0{,}01} 10\ dt = \frac{10(0{,}01)}{0{,}03} = 3{,}33$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{0{,}03}\int_0^{0{,}01} 10^2\ dt = 33{,}3, \qquad Y_{ef} = 5{,}77$$

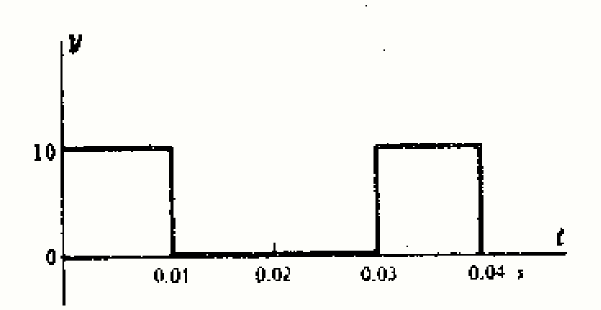



Fig. 2-11

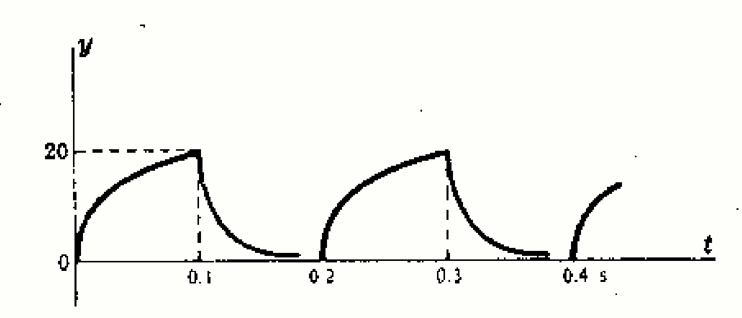



Fig. 2-12

**2-10** Hallar el valor eficaz de la función representada en la Fig. 2-12 definida por:

$0 < t < 0{,}1 \quad y = 20(1 - e^{-100t})$; $\qquad 0{,}1 < t < 0{,}2 \quad y = 20e^{-50(t-0{,}1)}$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{0{,}2}\left\{\int_0^{0{,}1} 400(1 - 2\,e^{-100t} + e^{-200t})\ dt + \int_{0{,}1}^{0{,}2} 400\,e^{-100(t-0{,}1)}\ dt\right\}$$

$$= 2000\left\{\left[t + 0{,}02\,e^{-100t} - 0{,}005\,e^{-200t}\right]_0^{0{,}1} + \left[-0{,}01\,e^{-100(t-0{,}1)}\right]_{0{,}1}^{0{,}2}\right\}$$

$= 190$, de donde $Y_{ef} = 13{,}78$. (El término en $e^{-10}$ y en $e^{-20}$ no son significativos.)

**2-11** Hallar el valor eficaz de la función $y = 50 + 30 \operatorname{sen} \omega t$.

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2500 + 3000 \operatorname{sen} \omega t + 900 \operatorname{sen}^2 \omega t)\ d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}[2500(2\pi) + 0 + 900\pi] = 2950, \qquad Y_{ef} = 54{,}3$$

*Otro método*: $\quad Y_{ef} = \sqrt{(50)^2 + \frac{1}{2}(30^2)} = \sqrt{2950} = 54{,}3$

**2-12** Hallar el valor eficaz de la función de tensión $v = 50 + 141{,}4 \operatorname{sen} \omega t + 35{,}5 \operatorname{sen} 3\omega t$.

$$V_{ef} = \sqrt{(50)^2 + \tfrac{1}{2}(141{,}4)^2 + \tfrac{1}{2}(35{,}5)^2} = 114{,}6\ \text{V}$$

**2-13** Una onda completa senoidal rectificada está cortada a 0,707 de su valor máximo, como indica la Fig. 2-13. Hallar los valores medio y eficaz de dicha función.

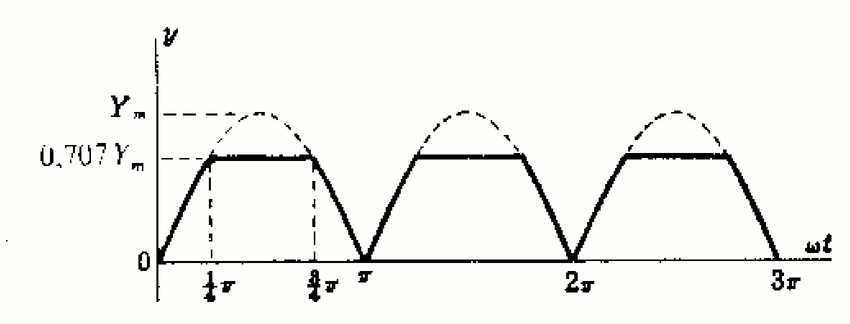



Fig. 2-13

La función tiene de periodo $\pi$ y está definida por

$0 < \omega t < \pi/4 \qquad y = Y_m \operatorname{sen} \omega t$
$\pi/4 < \omega t < 3\pi/4 \qquad y = 0{,}707\,Y_m$
$3\pi/4 < \omega t < \pi \qquad y = Y_m \operatorname{sen} \omega t$

$$Y_{med} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/4} Y_m \operatorname{sen} \omega t\ d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 0{,}707\,Y_m\ d(\omega t) + \int_{3\pi/4}^{\pi} Y_m \operatorname{sen} \omega t\ d(\omega t)\right\} = 0{,}54\,Y_m$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/4}(Y_m \operatorname{sen} \omega t)^2\ d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4}(0{,}707\,Y_m)^2\ d(\omega t) + \int_{3\pi/4}^{\pi}(Y_m \operatorname{sen} \omega t)^2\ d(\omega t)\right.$$

$$= 0{,}341\,Y_m^2 \qquad Y_{ef} = 0{,}584\,Y_m$$

**2-14** Hallar el ángulo de fase $\theta$ que debe tener la onda completa senoidal rectificada de la Figura 2-14 para que su valor medio sea la mitad de su valor máximo.

$$Y_{med} = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi} Y_m \operatorname{sen} \omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{Y_m}{\pi}(-\cos \pi + \cos \theta)$$

Por tanto, $0{,}5Y_m = (Y_m/\pi)(1 + \cos\theta)$, $\cos\theta = 0{,}57$, $\theta = 55{,}25°$.

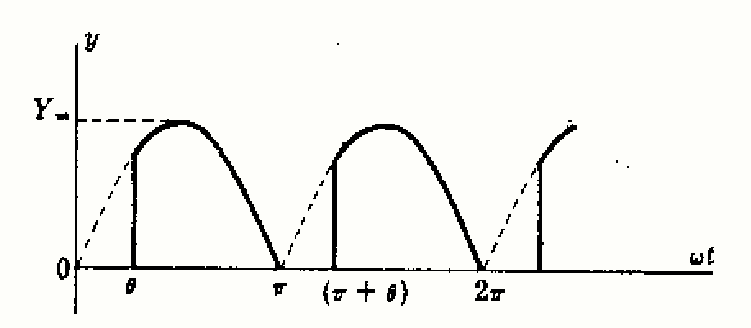


**Fig. 2-14**

**2-15** La intensidad de corriente que circula por una resistencia de 2 ohmios tiene la forma de onda del Problema 2-14 con un valor máximo de 5 amperios. La potencia media disipada por la resistencia es de 20 vatios. Hallar el ángulo $\theta$.

$P = RI_{ef}^2$, $20 = (2)I_{ef}^2$, $I_{ef}^2$, $I_{ef}^2 = 10$. Por tanto,

$$I_{ef}^2 = 10 = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}(5 \operatorname{sen} \omega t)^2 \, d(\omega t) = \frac{25}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4}\right]_{\theta}^{\pi} = \frac{25}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)$$

de donde $\operatorname{sen} 2\theta = 2\theta - 10\pi/25$ y $\theta = 60{,}5°$ (solución gráfica).

# Problemas propuestos

**2-16** La potencia media disipada en una resistencia de 25 ohmios es de 400 vatios. Hallar el valor máximo de la intensidad de corriente si ésta es (*a*) senoidal, (*b*) triangular. *Sol.* (*a*) 5,66 A. (*b*) 6,93 A.

**2-17** Hallar el valor eficaz $V_{ef}$ de la tensión $v(t) = 100 + 25 \operatorname{sen} 3\omega t + 10 \operatorname{sen} 5\omega t$. *Sol.* 101,8 V.

**2-18** Hallar la potencia media disipada en una resistencia de 25 ohmios cuando por ella circula una corriente $i(t) = 2 + 3 \operatorname{sen} \omega t + 2 \operatorname{sen} 2\omega t + 1 \operatorname{sen} 3\omega t^2$. *Sol.* 275 W.

**2-19** Hallar el valor de $Y_{ef}$ de la función $y(t) = 50 + 40 \operatorname{sen} \omega t$. *Sol.* 57,4.

**2-20** Hallar el valor de $Y_{ef}$ de la función $y(t) = 150 + 50 \operatorname{sen} \omega t + 25 \operatorname{sen} 2\omega t$. *Sol.* 155,3.

**2-21** Sabiendo que el valor eficaz de la función $y(t) = 100 + A \operatorname{sen} \omega t$ es 103,1, hallar la amplitud $A$ del término senoidal. *Sol.* 35,5.

**2-22** Una cierta función consta de un término constante, un armónico fundamental y un tercer armónico. El valor máximo del fundamental es el 80 % y el valor máximo del tercer armónico es el 50 %, del término constante. Sabiendo que el valor eficaz de esta función es 180,3, hallar el término constante y los dos armónicos. *Sol.* 150, 120, 75.

**2-23** Si el valor eficaz de media onda senoidal rectificada es 20, ¿cuál es su valor medio? *Sol.* 12,7.

**2-24** Hallar $Y_{med}$ e $Y_{ef}$ de la forma de onda representada en la Fig. 2-15. *Sol.* $Y_{med} = 40$; $Y_{ef} = 72{,}1$.

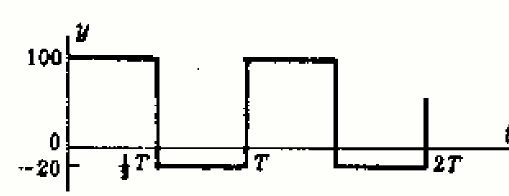


**Fig. 2-15**

**2-25** Hallar $Y_{med}$ e $Y_{ef}$ de la forma de onda representada en la Figura 2-16. *Sol.* $Y_{med} = 10$; $Y_{ef} = 52{,}9$.

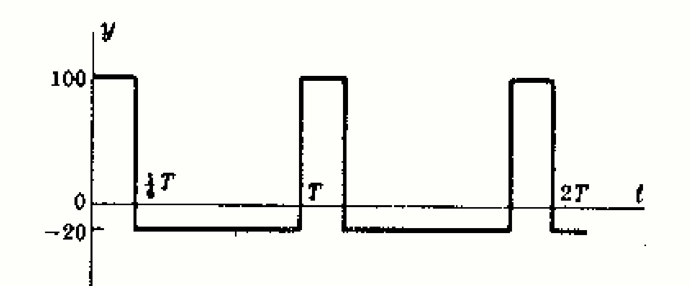



Fig. 2-16

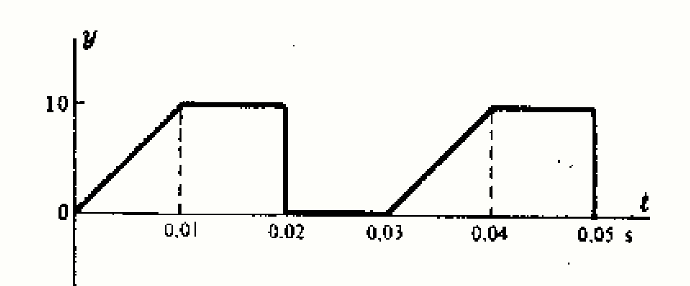



Fig. 2-17

**2-26** Hallar $Y_{ef}$ de la forma de onda representada en la Figura 2-17. *Sol.* $Y_{ef} = 6{,}67$.

**2-27** Hallar $Y_{ef}$ de la forma de onda representada en la Figura 2-18. *Sol.* $Y_{ef} = Y_m/\sqrt{3} = 0{,}577 Y_m$.

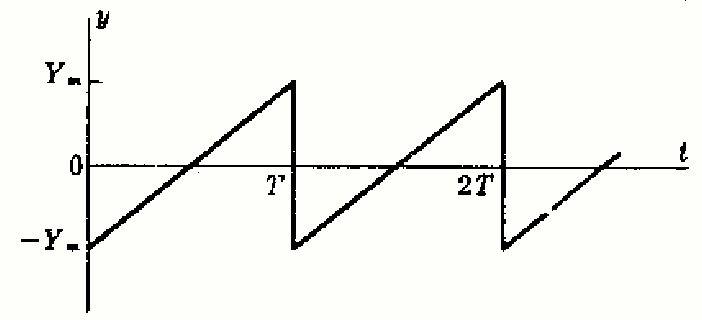



Fig. 2-18

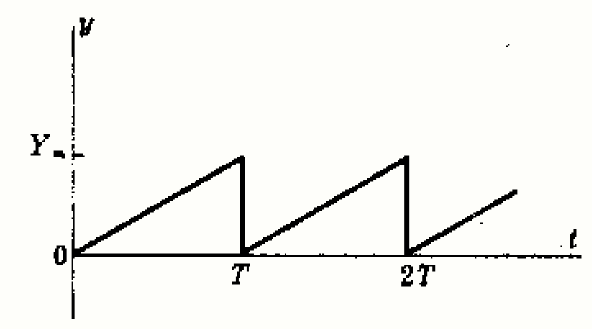



Fig. 2-19

**2-28** Hallar el valor eficaz de la forma de onda representada en la Fig. 2-19 y compararlo con el del Problema 2-27.

**2-29** Hallar el valor eficaz de la onda triangular representada en la Fig. 2-20 y compararlo con el del Problema 2-27.

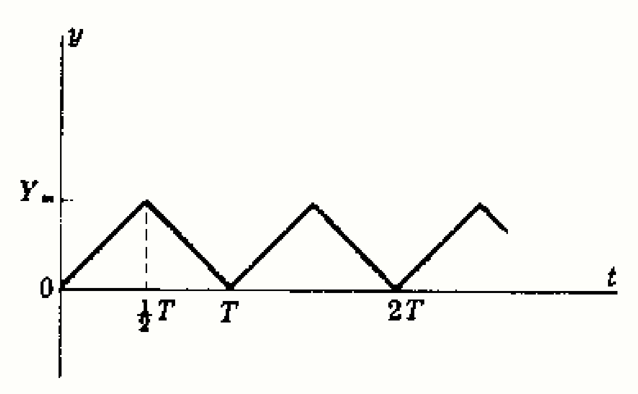



Fig. 2-20

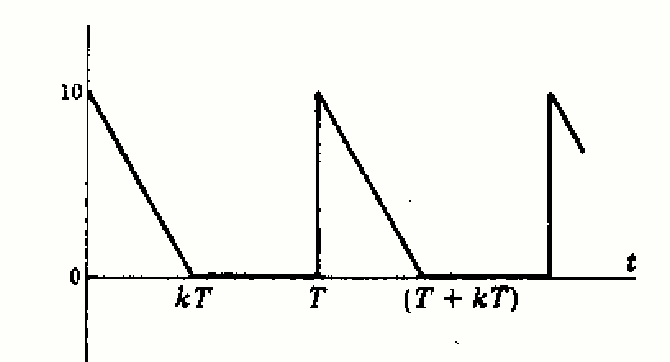



Fig. 2-21

**2-30** Hallar el valor de $k$ en la forma de onda representada en la Fig. 2-21 sabiendo que es una fracción del periodo $T$ tal que el valor eficaz es (*a*) 2, (*b*) 5. ¿Cuál será el máximo valor eficaz de la forma de onda dada al variar $k$? *Sol.* (*a*) 0,12; (*b*) 0,75; 5,77 para $k = 1$.

**2-31** Hallar los valores $V_{med}$ y $V_{ef}$ de la forma de onda de la Figura 2-22. *Sol.* $V_{med} = 21{,}6$; $V_{ef} = 24{,}75$

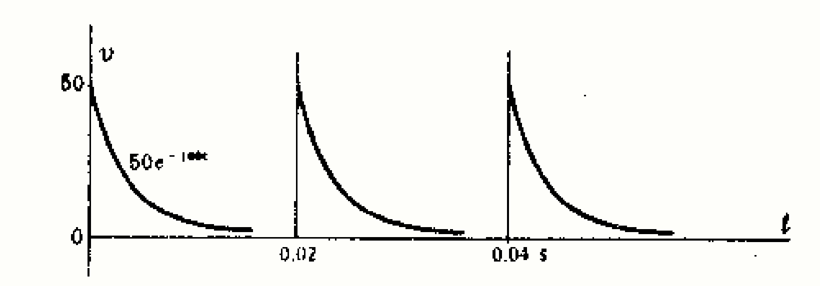



Fig. 2-22

**2-32** En el Problema 2-31 determinar los valores $V_{med}$ y $V_{ef}$ si la función se define en el primer intervalo por (*a*) $50e^{-200t}$, (*b*) $50e^{-500t}$.
*Sol.* (*a*) $V_{med} = 12{,}25$, $V_{ef} = 17{,}67$;
(*b*) $V_{med} = 5{,}0$, $V_{ef} = 11{,}18$.

**2-33** Hallar los valores $Y_{med}$ e $Y_{ef}$ correspondientes a la forma de onda de la Fig. 2-23 definida por

$$0 < t < 0{,}025 \quad y(t) = 400t$$
$$0{,}025 < t < 0{,}050 \quad y(t) = 10e^{-1000(t-0{,}025)}$$

*Sol.* $Y_{med} = 2{,}7$, $Y_{ef} = 4{,}2$

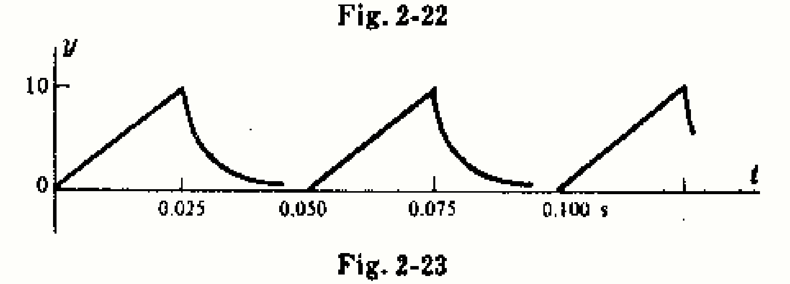



Fig. 2-23

**2-34** La forma de onda de la Fig. 2-24 es análoga a la del Problema 2-33, pero con un tiempo de elevación más pequeño. Hallar los valores $Y_{med}$ e $Y_{ef}$.

$0 < t < 0{,}01 \quad y(t) = 1000t$

$0{,}01 < t < 0{,}05 \quad y(t) = 10e^{-1000(t-0{,}01)}$

*Sol.* $Y_{med} = 1{,}2$; $Y_{ef} = 2{,}77$.

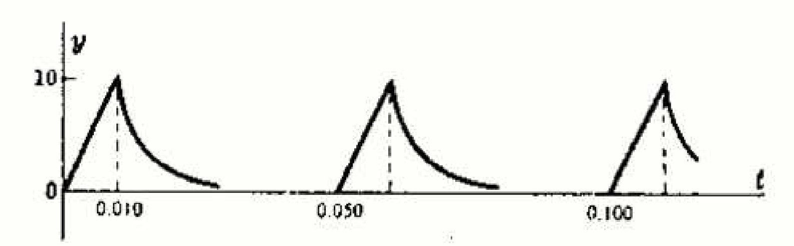
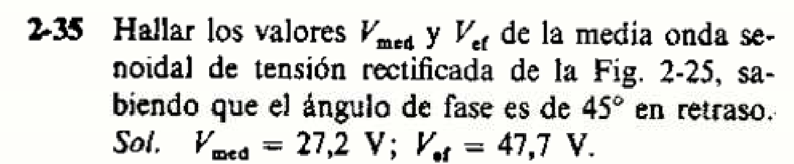



Fig. 2-24

**2-35** Hallar los valores $V_{med}$ y $V_{ef}$ de la media onda senoidal de tensión rectificada de la Fig. 2-25, sabiendo que el ángulo de fase es de 45° en retraso.
*Sol.* $V_{med} = 27{,}2$ V; $V_{ef} = 47{,}7$ V.



**2-36** Hallar los valores $V_{med}$ y $V_{ef}$ de la forma de onda del Problema 2-35 si el ángulo de fase es (*a*) $\theta = 90°$, (*b*) $\theta = 135°$.
*Sol.* (*a*) $V_{med} = 15{,}95$; $V_{ef} = 35{,}4$.
(*b*) $V_{med} = 4{,}66$; $V_{ef} = 15{,}06$.

Fig. 2-25

**2-37** La onda completa senoidal rectificada de la Fig. 2-26 tiene un ángulo de fase en retraso de 60°. Hallar los valores $V_{med}$ y $V_{ef}$ en función de $V_m$. *Sol.* $V_{med} = 0{,}478\ V_m$; $V_{ef} = 0{,}633\ V_m$.

Fig. 2-26

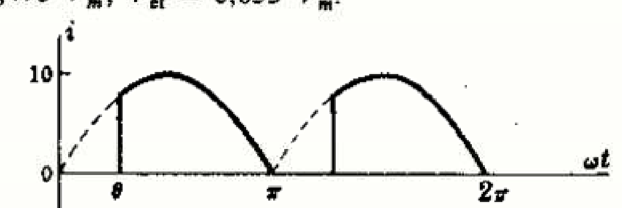



Fig. 2-27

**2-38** Un circuito de mando permite variar el ángulo de retraso de la forma de onda de intensidad de corriente de la Fig. 2-27, de manera que el valor eficaz tiene como límites inferior y superior 2,13 y 7,01 amperios, respectivamente. Hallar los ángulos correspondientes. *Sol.* $\theta_1 = 135°$; $\theta_2 = 25°$.

**2-39** Hallar el valor eficaz de una onda completa senoidal rectificada cortada en la mitad de su valor máximo como indica la Figura 2-28. *Sol.* $Y_{ef} = 0{,}442\ Y_m$.

**2-40** Hallar el valor eficaz de la forma de onda del Problema 2-39 si la onda se corta en 60° o bien $\pi/3$ radianes.
*Sol.* $Y_{ef} = 0{,}668\ Y_m$.

Fig. 2-28

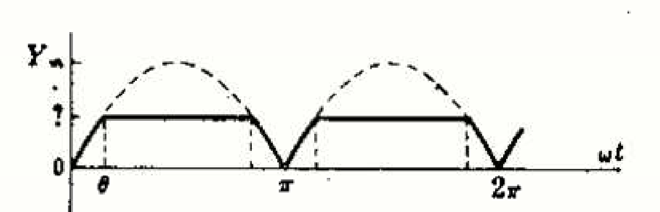



Fig. 2-29

**2-41** Una onda completa senoidal rectificada está cortada de forma que su valor eficaz es 0,5 $Y_m$, como indica la Figura 2-29. Hallar la amplitud en la que se corta la onda. *Sol.* 0,581 $Y_m$ o bien $\theta = 35{,}5°$.

**2-42**. Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda obtenida de un circuito rectificador de media onda a tres fases como se indica en la Figura 2-30. *Sol.* $V_{med} = 0{,}827\ V_m$; $V_{ef} = 0{,}840\ V_m$.

**2-43** La forma de onda resultante de un circuito rectificador de media onda a seis fases es la representada en la Figura 2-31. Hallar los valores $V_{med}$ y $V_{ef}$. *Sol.* $V_{med} = 0{,}955\ V_m$; $V_{ef} = 0{,}956\ V_m$.

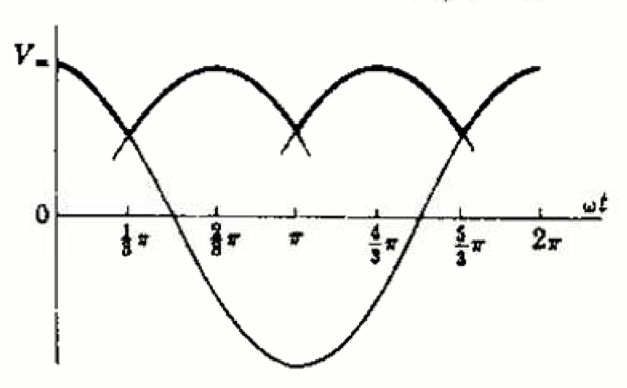



Fig. 2-30

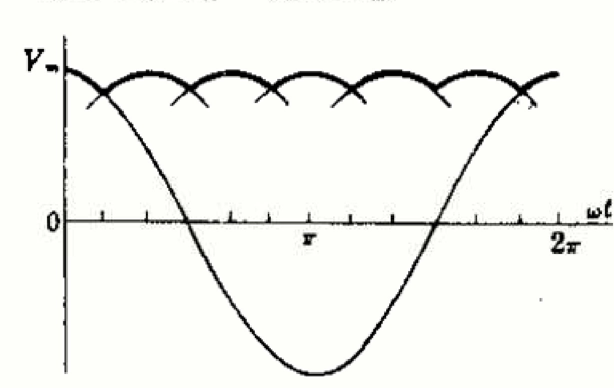



Fig. 2-31

# Capítulo 3

# Intensidad de corriente y tensión senoidales

## INTRODUCCION

Al aplicar las leyes de Kirchhoff a un circuito cualquiera de una malla el resultado es, en general, una ecuación integrodiferencial. Los métodos de resolución clásicos de ecuaciones diferenciales proporcionan la solución del problema eléctrico. Ahora bien, la intensidad de corriente, que suele ser la incógnita, debida a una determinada tensión aplicada, viene dada por una suma de dos funciones. Una de ellas corresponde a la intensidad del régimen transitorio que, normalmente, se anula a las pocas fracciones de segundo, y la otra constituye la intensidad en régimen permanente, la cual perdura mientras existe la excitación.

Como muchos estudiantes cuando comienzan el estudio del análisis de circuitos no conocen todavía la técnica de resolución de ecuaciones diferenciales, solo veremos en este capítulo el régimen permanente prescindiendo, de momento, del transitorio correspondiente. No obstante, en el Capítulo 16 se estudiarán las ecuaciones diferenciales aplicadas a los circuitos eléctricos en donde veremos algunos ejemplos ilustrativos de los regímenes transitorio y permanente de la solución general.

## INTENSIDADES DE CORRIENTE SENOIDALES

En la Tabla 3-1 aparecen las tensiones en bornes de los tres elementos $R$, $L$ y $C$ puros en el caso de que la corriente que circule por ellos sea de tipo seno o coseno.

**Tabla 3-1**
**Tensión en bornes de un elemento puro si la corriente es senoidal**

| Elemento | Tensión si $i$ es general | Tensión si $i = I_m \operatorname{sen} \omega t$ | Tensión si $i = I_m \cos \omega t$ |
|---|---|---|---|
| Resistencia $R$ | $v_R = Ri$ | $v_R = RI_m \operatorname{sen} \omega t$ | $v_R = RI_m \cos \omega t$ |
| Autoinducción $L$ | $v_L = L\dfrac{di}{dt}$ | $v_L = \omega L I_m \cos \omega t$ | $v_L = \omega L I_m (-\operatorname{sen} \omega t)$ |
| Capacidad $C$ | $v_C = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$ | $v_C = \dfrac{I_m}{\omega C}(-\cos \omega t)$ | $v_C = \dfrac{I_m}{\omega C} \operatorname{sen} \omega t$ |

**Tabla 3-2**
**Corriente en los elementos puros si la corriente es senoidal**

| Elemento | Corriente si $v$ es general | Corriente si $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$ | Corriente si $v = V_m \cos \omega t$ |
|---|---|---|---|
| Resistencia $R$ | $i_R = \dfrac{v}{R}$ | $i_R = \dfrac{V_m}{R} \operatorname{sen} \omega t$ | $i_R = \dfrac{V_m}{R} \cos \omega t$ |
| Autoinducción $L$ | $i_L = \dfrac{1}{L}\int v\,dt$ | $i_L = \dfrac{V_m}{\omega L}(-\cos \omega t)$ | $i_L = \dfrac{V_m}{\omega L} \operatorname{sen} \omega t$ |
| Capacidad $C$ | $i_C = C\dfrac{dv}{dt}$ | $i_C = \omega C V_m \cos \omega t$ | $i_C = \omega C V_m (-\operatorname{sen} \omega t)$ |

## TENSIONES SENOIDALES

En la Tabla 3-2 aparecen las intensidades de corriente por los tres elementos $R$, $L$ y $C$ puros en el caso de la que la tensión aplicada a cada uno de ellos sea de tipo seno o coseno.

## IMPEDANCIA

La impedancia de un elemento aislado, o de una rama de varios elementos, o de un circuito completo, es la relación entre la tensión aplicada y la intensidad de corriente que circula.

$$\text{Impedancia} = \frac{\text{Función de tensión}}{\text{Función de intensidad}}$$

Si las tensiones e intensidades de corriente son senoidales, esta relación tiene un módulo y un argumento (ángulo). En el Capítulo 5 se estudia la impedancia con mucho detalle y allí se considera el argumento. En este capítulo solo estudiaremos el módulo de la impedancia. El argumento o ángulo entre la tensión $v$ y la intensidad de corriente $i$ se llama ángulo de fase o, simplemente, fase.

## ANGULO DE FASE

Si tanto la tensión como la intensidad de corriente son funciones senoidales del tiempo y se representan gráficamente con la misma escala de tiempos, aparece un desplazamiento relativo entre ambas magnitudes que solo es nulo en el caso de tratarse de un elemento resistivo puro. Dicho desplazamiento es el ángulo de fase y nunca puede ser superior a 90° o $\pi/2$ radianes. Por convenio, al hablar del ángulo de fase se considera «el que forma la intensidad de corriente $i$ con la tensión $v$». En un condensador, por ejemplo, $i$ adelanta 90° o $\pi/2$ radianes a $v$; en un circuito serie $RL$, con $R$ igual a $\omega L$, $v$ adelanta 45° o $\pi/4$ a $i$ (o bien $i$ está retrasada $\pi/4$ respecto de $v$); en una resistencia pura, $i$ está en fase con $v$; etc. Las representaciones de las figuras siguientes aclaran los conceptos de impedancia y ángulo de fase.

**Resistencia** $R$. En un elemento resistivo puro la intensidad de corriente y la tensión están en fase. (Véase Fig. 3-1.) El módulo de la impedancia es $R$.

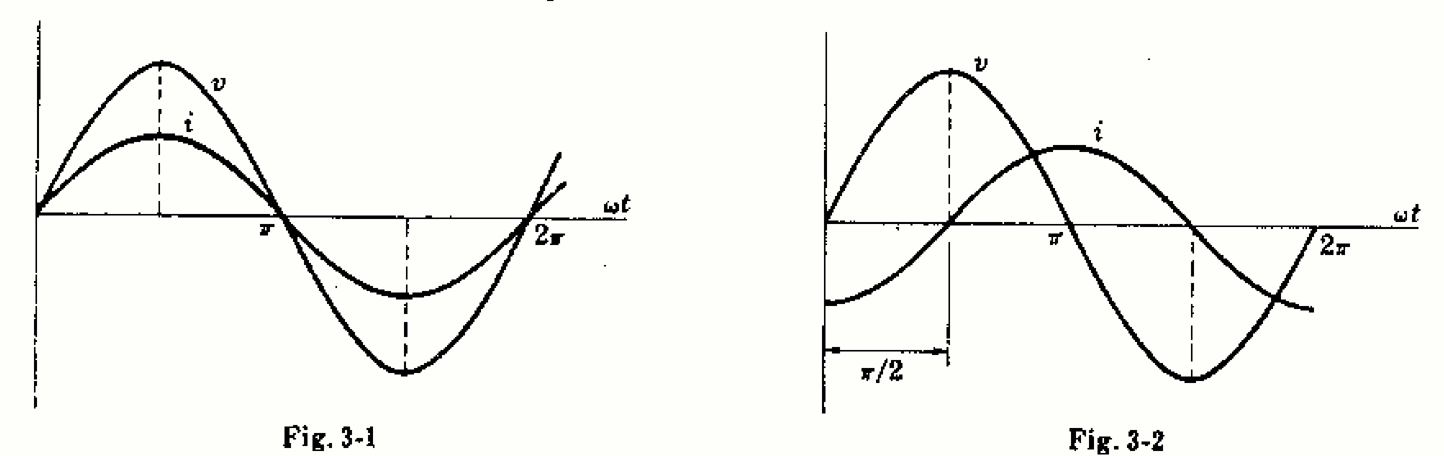



Fig. 3-1 Fig. 3-2

**Autoinducción** $L$. En una bobina pura la intensidad de corriente se retrasa 90° o $\pi/2$ respecto de la tensión. (Véase Fig. 3-2.) El módulo de la impedancia es $\omega L$.

**Capacidad** $C$. En un condensador puro, la intensidad de corriente adelanta 90° o $\pi/2$ a la tensión. (Véase Fig. 3-3.) El módulo de la impedancia es $\frac{1}{\omega C}$.

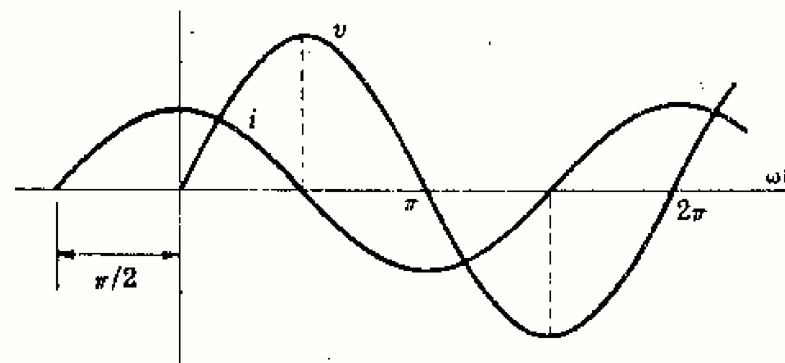



Fig. 3-3

**Circuito serie** *RL*. La intensidad de corriente se retrasa respecto de la tensión un ángulo igual a arc tg $(\omega L/R)$. (Véase Fig. 3-4.) El módulo de la impedancia es $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

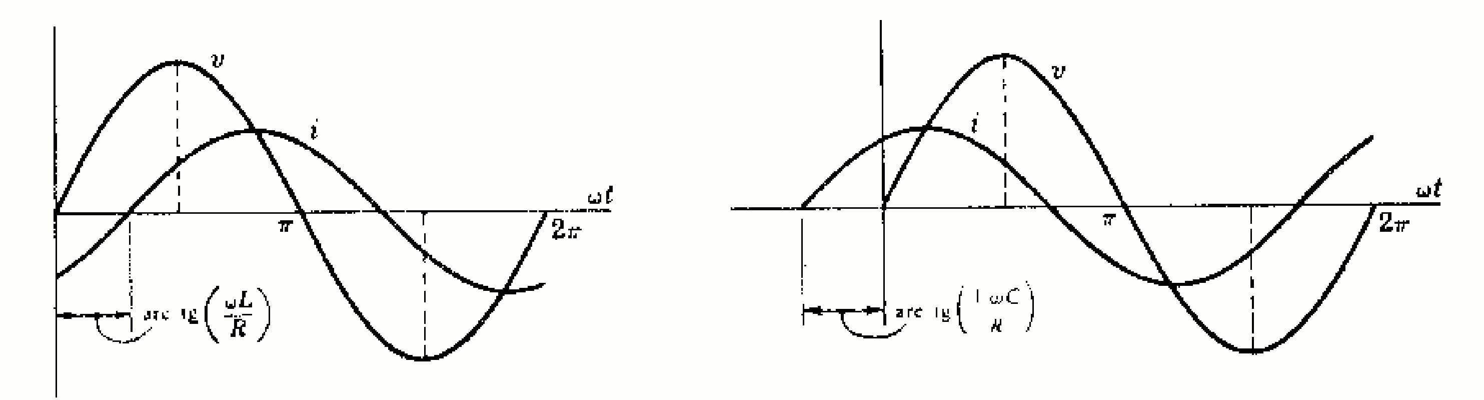
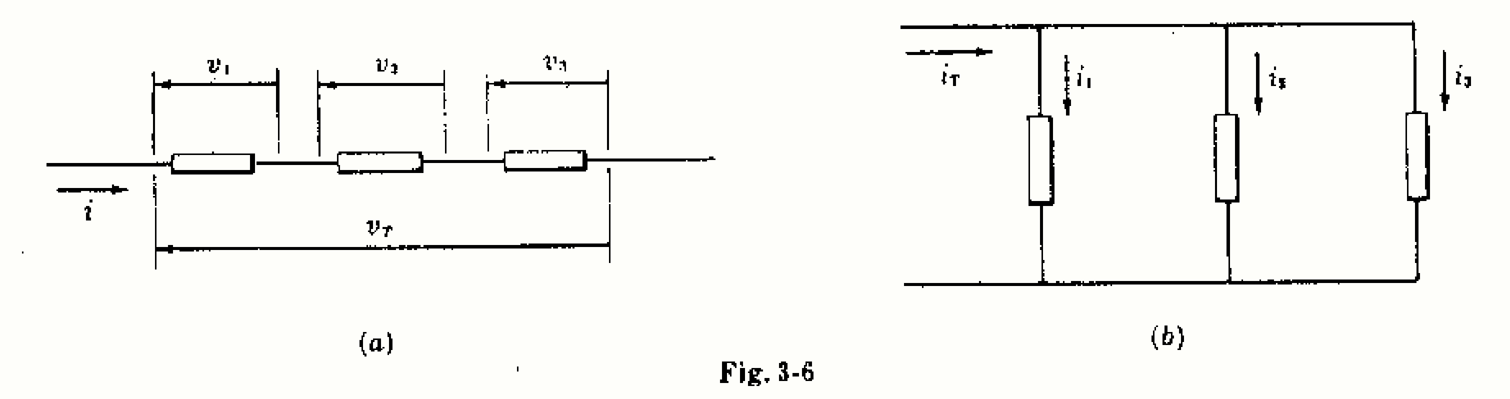



Fig. 3-4 Fig. 3-5

**Circuito serie** *RC*. La intensidad de corriente adelanta a la tensión en un ángulo igual a arc tg $\left(\frac{1/\omega C}{R}\right)$. (Véase Fig. 3-5.) El módulo de la impedancia es $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$.

## CIRCUITOS SERIE Y PARALELO

En un circuito cuyos elementos (impedancias) están conectados en paralelo la intensidad de corrien-es igual a la suma de las caídas de tensión en dichos elementos individuales. Por ejemplo, en la Fig. 3-6(*a*) se verifica: $v_T = v_1 + v_2 + v_3$.



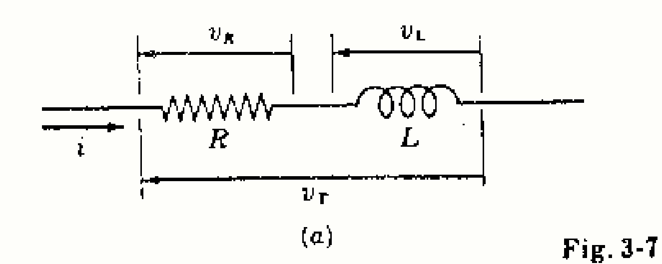

(*a*) (*b*)

Fig. 3-6

En un circuito cuyos elementos (impedancias) están conectados en paralelo la intensidad de corriente total es igual a la suma de las intensidades que circulan por cada uno de dichos elementos individuales. Por ejemplo, en la Fig. 3-6(*b*) se verifica: $i_T = i_1 + i_2 + i_3$. Se puede observar que esto es una aplicación de la primera ley de Kirchhoff, pues las cuatro intensidades tienen un nudo común.

# Problemas resueltos

**3-1** Por un circuito serie formado por un elemento resistivo de resistencia *R* ohmios y una bobina de autoinducción *L* henrios, como se indica en la Fig. 3-7(*a*), circula una corriente de intensidad $i = I_m$ sen $\omega t$ amperios. Expresar la tensión total aplicada $v_T$ mediante una función senoidal.




(*a*)

$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ωL φ R

(*b*)

Fig. 3-7

**3-5** Por el circuito serie $RC$ representado en la Fig. 3-9 circula una corriente de intensidad $i = I_m \cos \omega t$. Expresar la tensión total aplicada mediante una función cosenoidal simple.

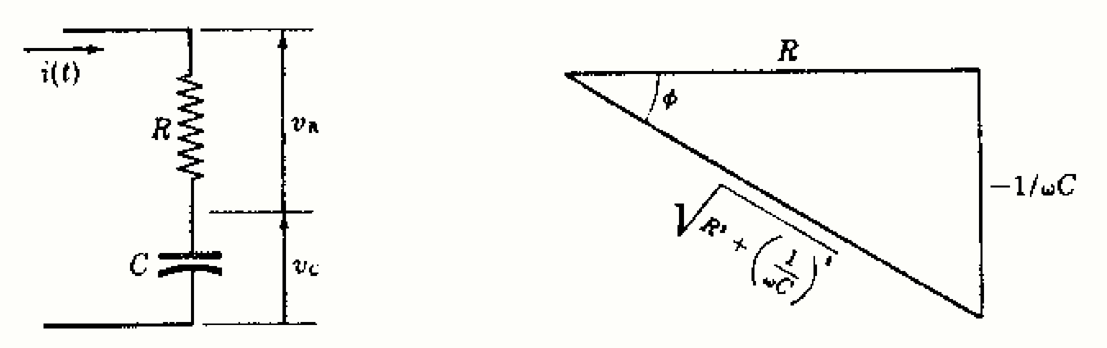



Fig. 3-9

$$v_T = v_R + v_C = RI_m \cos \omega t + (1/\omega C)I_m \operatorname{sen} \omega t \qquad (1)$$

Expresando $v_T$ por un único término coseno de amplitud $A$ y fase $\phi$,

$$v_T = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \omega t \cos \phi - A \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi \qquad (2)$$

Igualando los coeficientes de sen $\omega t$ y cos $\omega t$ en (1) y (2) resulta,

$$RI_m = A \cos \phi, \qquad (1/\omega C)I_m = -A \operatorname{sen} \phi$$

Ahora bien, $\operatorname{tg} \phi = \dfrac{\operatorname{sen} \phi}{\cos \phi} = -\dfrac{1}{\omega CR}$, $\cos \phi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$, $A = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\, I_m$, con lo que

$$v_T = A \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\, I_m \cos\left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{1/\omega C}{R}\right)$$

es decir, la corriente está adelantada respecto de la tensión. (Como sen $\phi$ es negativo y cos $\phi$ es positivo, el ángulo $\phi$ está en el cuarto cuadrante.)

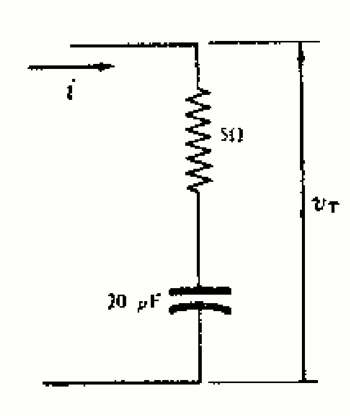
El módulo de la impedancia es $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$

Si $R \gg 1/\omega C$, $\dfrac{1/\omega C}{R} \to 0$ y $\phi \to 0$, es decir, el mismo resultado que con un elemento positivo puro.

Si $1/\omega C \gg R$, $\dfrac{1/\omega C}{R} \to \infty$ y $\phi \to \pi/2$, es decir, el mismo resultado que obtuvimos con un condensador puro.

En una asociación serie $RC$ la corriente está adelantada respecto de la tensión un ángulo comprendido entre 0° y 90° o $\pi/2$ radianes, según los valores relativos de $R$ y $1/\omega C$.

**3-6** Por el circuito serie de la Fig. 3-10 circula una corriente de intensidad $i = 2 \cos 5000t$ amperios. Hallar la tensión total aplicada $v_T$.



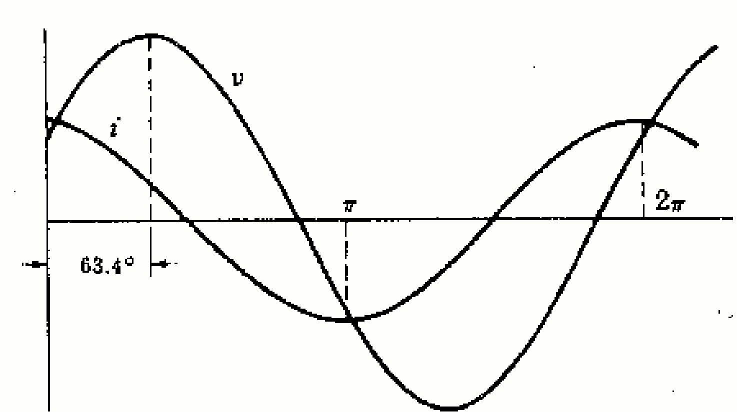



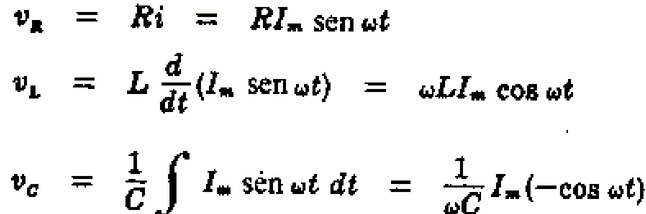

Fig. 3-10

$$v_T = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\, I_m \cos\left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{1/\omega C}{R}\right) = 22{,}4 \cos(5000t - 63{,}4^\circ)$$

en donde $R = 5$, $1/\omega C = 1/(5000 \times 20 \times 10^{-6}) = 10$, $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1/\omega C}{R} = \operatorname{arc\,tg} 10/5 = 63{,}4^\circ$, $I_m = 2$.

La corriente está adelantada respecto de la tensión un ángulo de 63,4°. El valor absoluto de la impedancia es 11,18 Ω.

**3-7** Por el circuito serie $RLC$ representado en la Fig. 3-11 circula una corriente de intensidad $i = I_m$ sen $\omega t$. Hallar la caída de tensión en bornes de cada elemento.

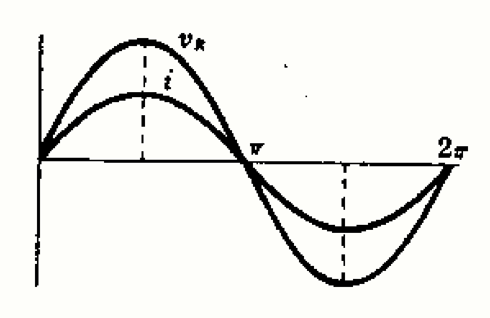


$$v_R = Ri = RI_m \operatorname{sen} \omega t$$

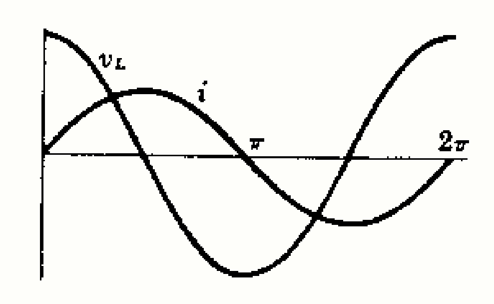
$$v_L = L\frac{d}{dt}(I_m \operatorname{sen} \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int I_m \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{1}{\omega C} I_m(-\cos \omega t)$$

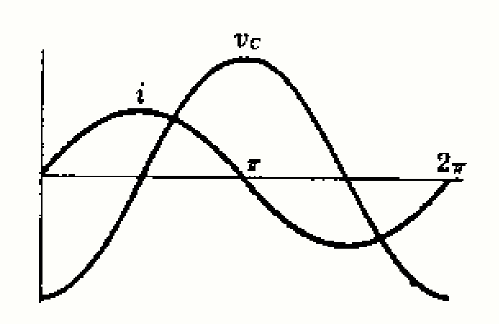
Fig. 3-11




$v_R$ e $i$
($i$ en fase con $v_R$)




$v_L$ e $i$
($i$ retrasada 90° respecto de $v_L$)




$v_C$ e $i$
($i$ adelantada 90° respecto de $v_C$)

Fig. 3-12

**3-8** En el Problema 3-7 expresar la tensión total aplicada $v_T$ mediante una función senoidal únicamente.

$$v_T = v_R + v_L + v_C = RI_m \operatorname{sen} \omega t + (\omega L - 1/\omega C) I_m \cos \omega t \qquad (1)$$

Expresando $v_T$ mediante una función seno de amplitud $A$ y ángulo de fase $\phi$,

$$\begin{aligned} v_T &= A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ &= A \operatorname{sen} \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \qquad (2)$$

Igualando los coeficientes de sen $\omega t$ y cos $\omega t$ en (1) y (2) resulta,

$$RI_m = A \cos \phi, \qquad I_m(\omega L - 1/\omega C) = A \operatorname{sen} \phi$$

Ahora bien, $\operatorname{tg} \phi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$, $\cos \phi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$, $A = \dfrac{RI_m}{\cos \phi} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}\, I_m$,

con lo que

$$v_T = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}\, I_m \operatorname{sen}[\omega t + \operatorname{arc\,tg}^{-1}(\omega L - 1/\omega C)/R]$$

en donde $\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ es el valor absoluto de la impedancia, y arc tg $(\omega L - 1/\omega C)/R$ el ángulo de fase.

Si $\omega L > 1/\omega C$, el ángulo de fase $\phi$ es positivo, la corriente retrasa respecto de la tensión y en el circuito predomina el efecto inductivo.

Si $1/\omega C > \omega L$, el ángulo de fase $\phi$ es negativo, la corriente adelanta a la tensión y en el circuito predomina el efecto capacitivo

Si $\omega L = 1/\omega C$, el ángulo de fase $\phi$ es nulo, la corriente y la tensión están en fase y el valor de la impedancia es $R$. Esta condición se llama de resonancia serie.

**3-9** Demostrar que si $\omega L$ se expresa en radianes por segundo (rad/s), $L$ en henrios (H) y $C$ en faradios (F), $\omega L$ y $1/\omega C$ vienen dados en ohmios ($\Omega$).

$$\omega L = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \text{H} = \frac{1}{\text{s}} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{\text{s}}{\text{rad}} \cdot \frac{1}{\text{F}} = \text{s} \cdot \frac{\text{V}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$$

Obsérvese que el radián, medida de un ángulo, es un número puro (adimensional).

**3-10** En un circuito serie $RLC$ tiene los valores $R = 15$ ohmios, $L = 0{,}08$ henrios y $C = 30$ microfaradios. La tensión aplicada es de una pulsación igual a 500 radianes por segundo. Hallar el ángulo de fase de la corriente respecto de la tensión.

$$\omega L = 500(0{,}08) = 40\ \Omega, \qquad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500(30 \times 10^{-6})} = 66{,}7\ \Omega$$

$$\text{arc tg}\ \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \text{arc tg}\ \frac{-26{,}7}{15} = -60{,}65°$$

La reactancia capacitiva, o capacitancia, $1/\omega C$, es mayor que la reactancia inductiva, o inductancia, $\omega L$. La corriente está adelantada con respecto a la tensión un ángulo de 60,65°, y en el circuito predomina el efecto capacitivo. El módulo de la impedancia es $\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = 30{,}6\ \Omega$.

**3-11** La diferencia de potencial aplicada a la asociación en paralelo $RL$ representada en la Fig. 3-13 es $v = V_m \cos \omega t$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente que circula poi cada rama y expresar la intensidad total $i_T$ mediante una función coseno.

$$i_T = i_R + i_L = \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int^t v\,dt = \frac{V_m}{R}\cos \omega t + \frac{V_m}{\omega L}\operatorname{sen} \omega t$$

Por tanto, $i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (1/\omega L)^2}\ V_m \cos(\omega t - \text{arc tg}\ R/\omega L)$

La corriente está adelantada respecto de la tensión un ángulo $\phi = \text{arc tg}\ R/\omega L$.

Si $R \gg \omega L$, $\phi \to \pi/2$, con lo cual, $i_T \approx (V_m/\omega L)\cos(\omega t - \pi/2)$. Con esta resistencia, relativamente grande, la corriente que circula por la rama resistiva es muy pequeña. Es decir, $i_T$ está formada esencialmente por $i_L$, y esta corriente inductiva gobierna la corriente total que circula.

Si $\omega L \gg R$, $\phi \to 0$, con lo cual, $i_T \approx (V_m/R)\cos \omega t$. En este caso, la rama inductiva tiene una reactancia muy grande y, por tanto, la intensidad que circula por ella es muy pequeña comparada con la que circula por la rama resistiva. Es decir, la corriente resistiva gobierna la intensidad total que circula.

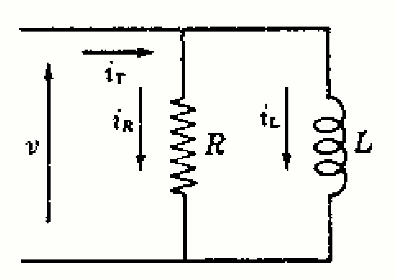


Fig. 3-13

**3-12** La tensión aplicada a la asociación $RC$ en paralelo representada en la Fig. 3-14 es $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$ voltios. Hallar la intensidad de corriente que circula por cada rama y expresar la intensidad total $i_T$ mediante una función seno.

$$i_T = i_R + i_C = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = \frac{V_m}{R}\operatorname{sen} \omega t + \omega C V_m \cos \omega t$$

Por tanto, $i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}\ V_m \operatorname{sen}(\omega t + \text{arc tg}\ \omega CR)$

La corriente está adelantada respecto de la tensión un ángulo $\phi = \text{arc tg}\ \dfrac{R}{1/\omega C}$.

Si $R \gg 1/\omega C$, $\phi \to \pi/2$, con lo que $i_T \approx i_C = \omega C V_m \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2)$. Es decir, la rama capacitiva gobierna la intensidad total que circula.

Si $1/\omega C \gg R$, $\phi \to 0$, con lo que $i_T \approx i_R = (V_m/R) \operatorname{sen} \omega t$. Es decir, la rama resistiva gobierna la intensidad total que circula.

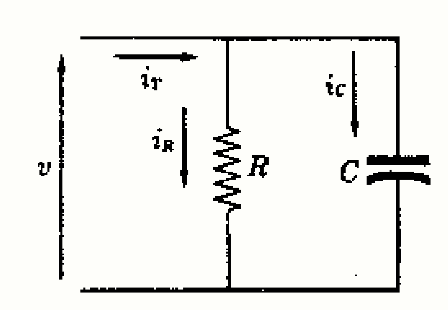


Fig. 3-14

**3-13** La diferencia de potencial aplicada a la asociación $RLC$ en paralelo representada en la Fig. 3-15 es $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$ voltios. Hallar la intensidad de corriente que circula por cada rama y expresar la intensidad total $i_T$ mediante una función seno.

$$i_T = i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt + C\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{V_m}{R}\operatorname{sen} \omega t - \frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t + \omega C V_m \cos \omega t \qquad (1)$$

Expresando $i_T$ como una función senoidal de amplitud $A$ y ángulo de fase $\phi$,

$$i_T = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$= A \operatorname{sen} \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \operatorname{sen} \phi \qquad (2)$$

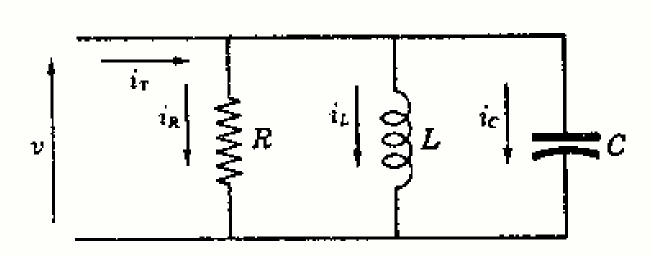


Fig. 3-15

Igualando los coeficientes de sen $\omega t$ y cos $\omega t$ en (1) y (2) resulta,

$$V_m/R = A\cos\phi, \qquad (\omega C - 1/\omega L)V_m = A \operatorname{sen}\phi$$

Por tanto, $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}$, $\cos\phi = \dfrac{1/R}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}$, $A = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}\, V_m$,

con lo que $i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}\, V_m \operatorname{sen}[\omega t + \operatorname{arc\,tg}(\omega C - 1/\omega L)R]$

Como era de esperar, el signo del ángulo de fase depende de los valores relativos de $\omega C$ y $1/\omega L$.

La corriente que circula por la rama inductiva está retrasada 90° o $\pi/2$ radianes respecto de la tensión aplicada. La corriente que circula por la rama capacitiva, por el contrario, está adelantada 90° o $\pi/2$ radianes respecto de dicha tensión. Estas dos corrientes pueden anularse cuando tengan el mismo valor numérico. Si la corriente en la rama inductiva es mayor, la intensidad total estará retrasada respecto de la tensión aplicada; si es mayor la corriente en la rama capacitiva, la corriente total estará adelantada respecto de la tensión aplicada.

**3-14** Dos elementos puros de un circuito serie tienen la siguiente corriente y tensión:

$$v = 150 \operatorname{sen}(500t + 10°) \text{ voltios}, \qquad i = 13{,}42 \operatorname{sen}(500t - 53{,}4°) \text{ amperios}$$

Determinar dichos elementos.

Evidentemente, la corriente está retrasada respecto de la tensión en un valor 53,4° + 10° = 63,4°; por tanto, el circuito es inductivo y estará formado por una resistencia $R$ y una bobina de autoinducción $L$.

$$\operatorname{tg} 63{,}4° = 2 = \omega L/R, \qquad \omega L = 2R$$

$$V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \qquad 150/13{,}42 = \sqrt{R^2 + (2R)^2}, \qquad R = 5\ \Omega$$

con lo que $L = 2R/\omega = 0{,}02$ H. El circuito está formado por una resistencia $R = 5\ \Omega$ y una autoinducción $L = 0{,}02$ H.

**3-15** Un circuito serie compuesto por dos elementos puros tiene la siguiente corriente y tensión (amperios y voltios):

$$v = 200 \operatorname{sen}(2000t + 50°) \text{ voltios}, \qquad i = 4\cos(2000t + 13{,}2°) \text{ amperios}$$

Determinar dichos elementos.

Como $\cos x = \operatorname{sen}(x + 90°)$, podemos poner $i = 4 \operatorname{sen}(2000t + 103{,}2°)$. De aquí que la corriente adelante a la tensión en un ángulo de 103,2° − 50° = 53,2°. En estas condiciones, el circuito debe estar formado por una resistencia $R$ y un condensador de capacidad $C$.

$$\operatorname{tg} 53{,}2° = 1{,}33 = 1/\omega CR, \qquad 1/\omega C = 1{,}33R$$

$$V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}, \qquad 200/4 = \sqrt{R^2 + (1{,}33R)^2}, \qquad R = 30\ \Omega$$

y $C = 1/(1{,}33\omega R) = 1{,}25 \times 10^{-5}$ F = 12,5 $\mu$F.

**3-16** En el circuito serie de la Fig. 3-16 la tensión y la corriente son

$$v = 353{,}5\cos(3000t - 10°) \text{ voltios},$$
$$i = 12{,}5\cos(3000t - 55°) \text{ amperios}$$

y la autoinducción de la bobina es igual a 0,01 henrios. Hallar los valores de $R$ y de $C$.

La corriente está retrasada respecto de la tensión un ángulo de 55° − 10° = 45°. Es decir, la reactancia inductiva, $\omega L$, es mayor que la reactancia capacitiva, $1/\omega C$.

$$\operatorname{tg} 45° = 1 = (\omega L - 1/\omega C)/R, \qquad (\omega L - 1/\omega C) = R$$

$$V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \qquad 353{,}5/12{,}5 = \sqrt{2R^2}$$

$$R = 20\ \Omega$$

y de $(\omega L - 1/\omega C) = R$ se deduce

$$C = 3{,}33 \times 10^{-5} \text{ F} = 33{,}3\ \mu\text{F}$$

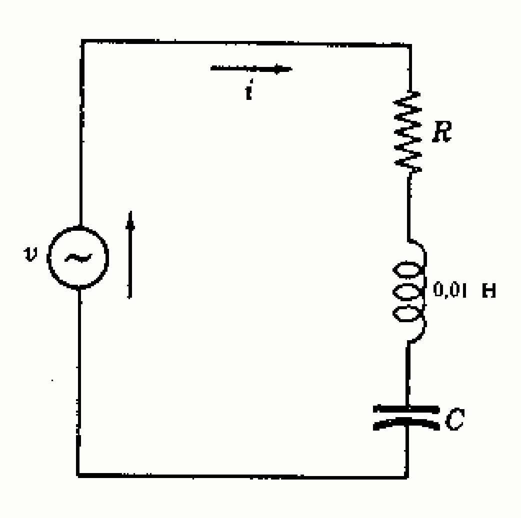



Fig. 3-16

**3-17** En el circuito paralelo de la Fig. 3-17 la función de tensión es $v = 100 \text{ sen } (1000t + 50°)$ voltios. Expresar la intensidad de la corriente total mediante una función seno.

$$i_T = i_R + i_L = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt$$
$$= 20 \text{ sen } (1000t + 50°) - 5 \cos (1000t + 50°)$$
$$= A \text{ sen}(1000t + 50°) \cos \phi + A \cos (1000t + 50°) \text{ sen } \phi$$

de donde $20 = A \cos \phi$ y $-5 = A \text{ sen } \phi$. Por tanto, $\text{tg } \phi = -5/20$, $\phi = -14{,}05°$; en consecuencia, $A = 20/(\cos \phi) = 20{,}6$. Así,

$$i_T = 20{,}6 \text{ sen } (1000t + 50° - 14{,}05°) = 20{,}6 \text{ sen } (1000t + 35{,}95°)$$

La corriente está retrasada respecto de la tensión aplicada un ángulo de 14,05°.

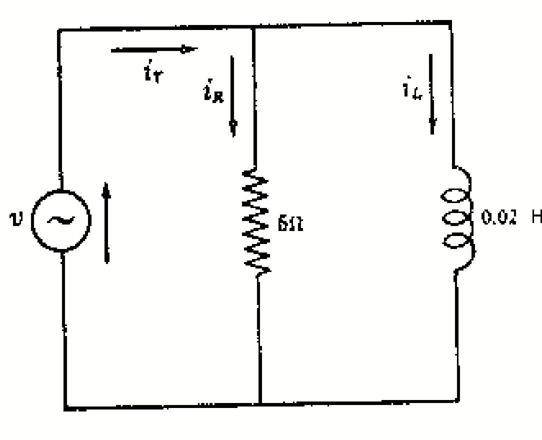




Fig. 3-17

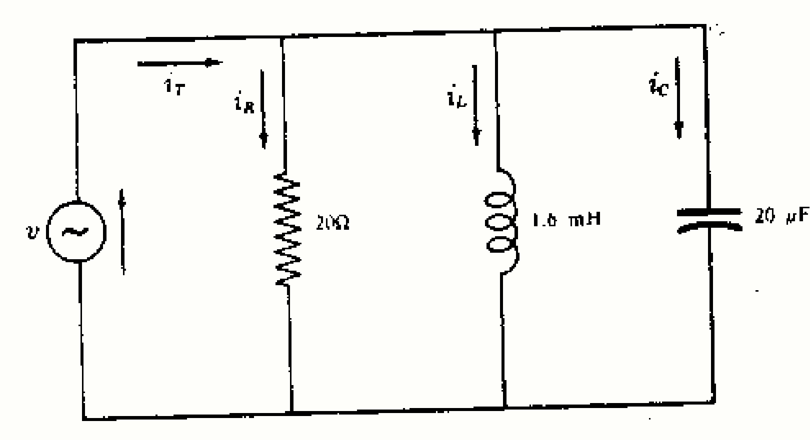



Fig. 3-18

**3-18** La tensión aplicada al circuito representado en la Fig. 3-18 es $v = 50 \text{ sen } (5000t + 45°)$ voltios. Hallar las intensidades de corriente en todas las ramas así como la intensidad total.

$$i_T = i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt + C\frac{dv}{dt}$$
$$= 2{,}5 \text{ sen } (5000t + 45°) - 6{,}25 \cos (5000t + 45°) + 5 \cos (5000t + 45°)$$
$$= 2{,}5 \text{ sen } (5000t + 45°) - 1{,}25 \cos (5000t + 45°)$$
$$= 2{,}8 \text{ sen } (5000t + 18{,}4°), \text{ empleando los métodos de este capítulo.}$$

La corriente está retrasada respecto de la tensión aplicada un ángulo de $45° - 18{,}4° = 26{,}6°$.

Obsérvese que la intensidad total tiene un valor máximo de 2,8 A. Este valor es menor que cualquiera de los valores máximos de las intensidades que circulan por las ramas inductiva y capacitiva que son 6,26 y 5 amperios, respectivamente. La explicación se deduce fácilmente de las representaciones gráficas, a la misma escala, de las intensidades que circulan por las tres ramas.

**3-19** Por la asociación en serie *RLC* de la Fig. 3-19 circula una corriente $i = 3 \cos (5000t - 60°)$ amperios. Hallar la caída de tensión en cada elemento y la caída de tensión total.

$$v_T = v_R + v_L + v_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$
$$= 6 \cos (5000t - 60°) - 24 \text{ sen } (5000t - 60°) + 30 \text{ sen } (5000t - 60°)$$
$$= 6 \cos (5000t - 60°) + 6 \text{ sen } (5000t - 60°)$$
$$= 8{,}49 \cos (5000t - 105°), \text{ empleando los métodos de este capítulo.}$$

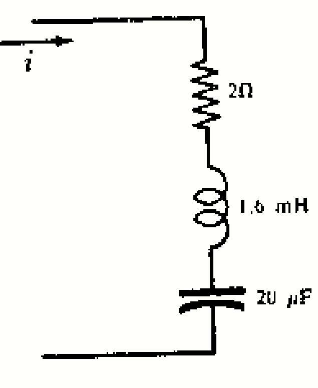



Fig. 3-19

La corriente está adelantada respecto de la tensión total un ángulo de $105° - 60° = 45°$.

Obsérvese que la tensión máxima aplicada es de 8,49 V. La tensión en los elementos individuales del circuito es mayor que ésta para los elementos inductivo y capacitivo. Haciendo una representación gráfica a escala se vería inmediatamente.

# Problemas propuestos

**3-20** Por una bobina pura de autoinducción $L = 0{,}01$ henrios circula una corriente $i = 5 \cos 2000t$ amperios. Hallar su tensión en bornes. *Sol.* $100 \cos (2000t + 90°)$ V.

**3-21** Por un condensador puro de capacidad $C = 30$ microfaradios circula una corriente $i = 12$ sen $2000t$ amperios. Hallar su tensión en bornes. *Sol.* 200 sen $(2000t - 90°)$ V.

**3-22** En un circuito serie $RL$, con $R = 5$ ohmios y $L = 0{,}06$ henrios, la tensión en bornes de la bobina es $v_L = 15$ sen $200t$ voltios. Hallar la tensión total, la intensidad de corriente, el ángulo de fase de $i$ respecto de $v_T$ y el módulo de la impedancia.
*Sol.* $i = 1{,}25$ sen $(200t - 90°)$ A; $v_T = 16{,}25$ sen $(200t - 22{,}65°)$ V; $67{,}35°$; $V_m/I_m = 13\ \Omega$.

**3-23** En el mismo circuito serie del Problema 3-22 la tensión en la resistencia es $v_R = 15$ sen $200t$. Hallar la tensión total, la intensidad de corriente, el ángulo de fase de $i$ respecto de $v_T$ y el módulo de la impedancia.
*Sol.* $i = 3$ sen $200t$ A; $v_T = 39$ sen $(200t + 67{,}35°)$ V; $67{,}35°$; $V_m/I_m = 13\ \Omega$.

**3-24** En un circuito serie de dos elementos simples la tensión y la corriente son (voltios y amperios):

$$v_T = 255 \text{ sen } (300t + 45°); \qquad i = 8{,}5 \text{ sen } (300t + 15°)$$

Determinar dichos elementos. *Sol.* $R = 26\ \Omega$; $L = 0{,}05$ H.

**3-25** En un circuito serie de dos elementos simples la tensión y la corriente son (voltios y amperios):

$$v_T = 150 \cos (200t - 30°); \qquad i = 4{,}48 \cos (200t - 56{,}6°)$$

Determinar dichos elementos. *Sol.* $R = 30\ \Omega$; $L = 0{,}075$ H.

**3-26** Dos elementos simples $R = 12$ ohmios y $C = 31{,}3$ microfaradios se unen en serie y se les aplica una tensión $v = 100 \cos (2000t - 20°)$ voltios. Los dos mismos elementos se unen ahora en paralelo con la misma tensión aplicada. Hallar la intensidad total que circula en cada conexión.
*Sol.* Serie: $i = 5 \cos (2000t + 33{,}2°)$ A; paralelo: $i = 10{,}4 \cos (2000t + 16{,}8°)$ A.

**3-27** Una resistencia $R = 27{,}5$ ohmios y un condensador $C = 66{,}7$ microfaradios se unen en serie. La tensión en el condensador es $v_C = 50 \cos 1500t$ voltios. Hallar la tensión total $v_T$, el ángulo de fase de la corriente sobre la tensión y el módulo de la impedancia.
*Sol.* $v_T = 146{,}3 \cos (1500t + 70°)$ V; $20°$; $V_m/I_m = 29{,}3\ \Omega$.

**3-28** Una resistencia $R = 5$ ohmios y un cierto condensador se unen en serie. La tensión en la resistencia es $v_R = 25$ sen $(2000t + 30°)$ voltios. Si la corriente está adelantada 60° respecto de la tensión, ¿cuál es el valor de la capacidad $C$ del condensador? *Sol.* 57,7 $\mu$F.

**3-29** Un circuito serie $LC$, con $L = 0{,}05$ henrios y una capacidad desconocida, tiene la tensión e intensidad de corriente (voltios y amperios):

$$v_T = 100 \text{ sen } 5000t, \qquad i = 2 \text{ sen } (5000t + 90°)$$

Hallar el valor de la capacidad $C$. *Sol.* 0,667 $\mu$F.

**3-30** La corriente que circula por un circuito serie $RLC$ está retrasada 30° respecto de la tensión aplicada. El valor máximo de la tensión en la bobina es el doble de la correspondiente al condensador, y $v_L = 10$ sen $1000t$ voltios. Hallar los valores de $L$ y de $C$ sabiendo que $R = 20$ ohmios.
*Sol.* $L = 23{,}1$ mH; $C = 86{,}5\ \mu$F.

**3-31** Un circuito serie $RLC$, con $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}02$ henrios y $C = 80$ microfaradios, tiene aplicada una tensión senoidal de frecuencia variable. Determinar los valores de $\omega$ para los cuales la corriente (*a*) adelanta 45° a la tensión, (*b*) está en fase con ella, (*c*) retrasa 45°. *Sol.* (*a*) 675; (*b*) 790; (*c*) 925 rad/s.

**3-32** Un circuito paralelo consta de dos ramas; en una de ellas tiene un elemento resistivo puro de $R = 50$ ohmios y en la otra hay un elemento desconocido; se sabe que la corriente y tensión aplicadas son (voltios y amperios):

$$v = 100 \cos (1500t + 45°); \qquad i_T = 12 \text{ sen } (1500t + 135°)$$

Determinar el elemento desconocido. *Sol.* $R = 10\ \Omega$.

**3-33** Hallar la intensidad de corriente total que circula por el circuito paralelo formado por $L = 0{,}05$ henrios y $C = 0{,}667$ microfaradios al que se le aplica una tensión $v = 100$ sen $5000t$ voltios.
*Sol.* $i_T = 0{,}067$ sen $(5000t - 90°)$ A.

**3-34** Una resistencia $R = 10$ ohmios y una autoinducción $L = 0{,}005$ henrios están en paralelo. La corriente que circula por la rama inductiva es $i_L = 5$ sen $(2000t - 45°)$ amperios. Hallar la intensidad de corriente total y el ángulo de fase entre $i_T$ y la tensión aplicada.
*Sol.* $i_T = 7{,}07$ sen $(2000t + 0°)$ A; 45° ($i_T$ retrasada respecto de $v$).

**3-35** Un circuito paralelo tiene en una de sus ramas una resistencia $R = 5$ ohmios y en la otra un elemento desconocido; la tensión aplicada y la corriente total son (voltios y amperios):

$$v = 10 \cos (50t + 60°); \qquad i = 5{,}38 \cos (50t - 8{,}23°)$$

Determinar dicho elemento desconocido. *Sol.* $L = 0{,}04$ H.

**3-36** Dos elementos simples, $R = 10$ ohmios y $C = 100$ microfaradios, se unen en paralelo y se aplica al conjunto una tensión $v = 150 \cos (5000t - 30°)$ voltios. Hallar la intensidad de corriente total que circula por ellos.
*Sol.* $i_T = 76{,}5 \cos (5000t + 48{,}7°)$ A.

**3-37** Un condensador puro de capacidad $C = 35$ microfaradios se une en paralelo con otro elemento simple. Sabiendo que la tensión aplicada y la intensidad de corriente total son $v = 150$ sen $3000t$ voltios e $i_T = 16{,}5$ sen $(3000t + 72{,}4°)$ amperios, respectivamente, determinar dicho elemento desconocido. *Sol.* $R = 30\ \Omega$.

**3-38** Un circuito paralelo $LC$ tiene aplicada una tensión $v = 50 \cos (3000t + 45°)$ voltios y la intensidad de corriente total que circula por el conjunto es $i_T = 2 \cos (3000t - 45°)$ amperios. También se sabe que la corriente en la rama inductiva es cinco veces mayor que por la otra. Hallar los valores de $L$ y de $C$.
*Sol.* $L = 6{,}67$ mH; $C = 3{,}33$ $\mu$F.

**3-39** La tensión aplicada a tres ramas en paralelo, cada una de las cuales contiene un elemento simple, es $v = 200$ sen $1000t$ voltios. Los valores de las ramas son $R = 300$ ohmios, $L = 0{,}5$ henrios y $C = 10$ microfaradios, respectivamente. Hallar la corriente total, el ángulo de fase entre $i_T$ y la tensión aplicada y el módulo de la impedancia.
*Sol.* $i_T = 1{,}74$ sen $(1000t + 67{,}4°)$ A; 67,4° ($i_T$ adelantada respecto de $v$); $V_m/I_m = 115\ \Omega$.

**3-40** Hallar el valor de la autoinducción $L$ en el circuito paralelo representado en la Fig. 3-20 sabiendo que la tensión aplicada y la intensidad de la corriente total son $v = 100$ sen $500t$ voltios e $i_T = 2{,}5$ sen $500t$ amperios, respectivamente. *Sol.* $L = 0{,}08$ H.

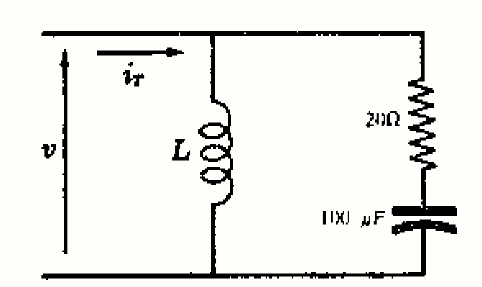


Fig. 3-20

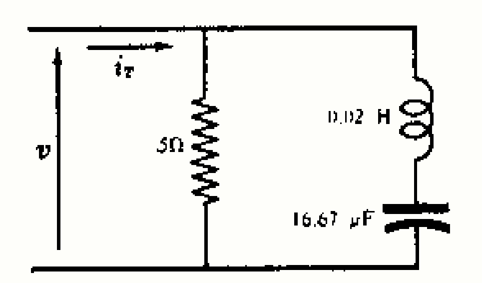


Fig. 3-21

**3-41** En el circuito paralelo representado en la Fig. 3-21 la tensión aplicada es $v = 50$ sen $(2000t - 90°)$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente total. *Sol.* $i_T = 11{,}2$ sen $(2000t - 116{,}6°)$ A.

**3-42** En el circuito paralelo representado en la Fig. 3-22 la tensión aplicada es $v = 100$ sen $5000t$ voltios. Hallar las intensidades de corriente $i_1$, $i_2$, $i_T$.
*Sol.* $i_1 = 7{,}07$ sen $(5000t - 45°)$ A; $i_2 = 7{,}07$ sen $(5000t + 45°)$ A; $i_T = 10$ sen $5000t$ A.

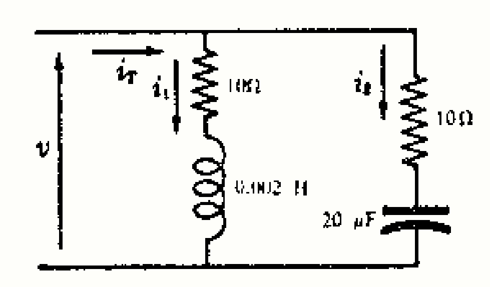


Fig. 3-22

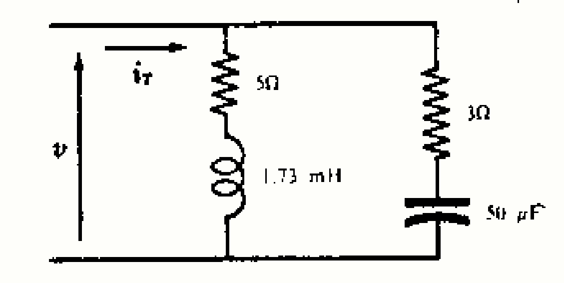


Fig. 3-23

**3-43** En el circuito paralelo representado en la Fig. 3-23 la tensión aplicada es $v = 100 \cos (5000t + 45°)$ voltios. (*a*) Hallar la intensidad de la corriente total. (*b*) ¿Qué dos elementos asociados en serie habría que colocar para que circulara la misma corriente y fuera, por tanto, equivalente al circuito paralelo para la misma frecuencia?
*Sol.* (*a*) $i_T = 18{,}5 \cos (5000t + 68{,}4°)$ A; (*b*) circuito serie de $R = 4{,}96\ \Omega$ y $C = 93$ $\mu$F.

# Capítulo 4

## Números complejos

### NUMEROS REALES

El *cuerpo de los números reales* se compone de los correspondientes a los números racionales e irracionales. El conjunto de los números reales se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos de una recta que se llama *eje real*; es decir, cada punto de la recta representa un único número real y cualquier número real se representa por un único punto de la recta, como muestra la Fig. 4-1. La suma, resta, multiplicación y división de dos números reales es otro número real. La raiz cuadrada de un número real positivo es también otro número real; pero si es negativo, su raíz cuadrada no es un número real o bien no corresponde a ningún punto de la citada recta.

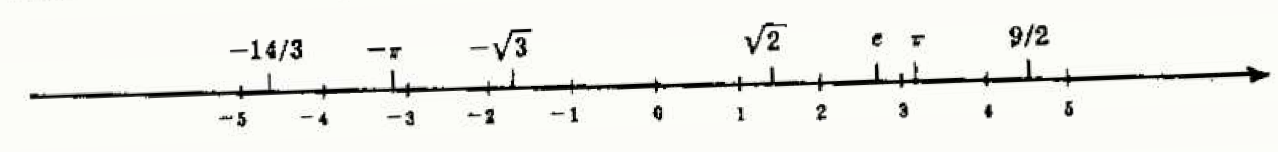



**Fig. 4-1. Eje real**

### NUMEROS IMAGINARIOS

La raíz cuadrada de un número real negativo es un *número imaginario*; por ejemplo, son números imaginarios $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-16}$, etc.

Si hacemos $j = \sqrt{-1}$, que se llama *unidad imaginaria*, se puede escribir, $\sqrt{-2} = j\sqrt{2}$, $\sqrt{-4} = j2$, $\sqrt{-5} = j\sqrt{5}$, $\sqrt{-16} = j4$, etc. Las sucesivas potencias de la unidad imaginaria son

$$j^2 = -1, \quad j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j, \quad j^4 = (j^2)^2 = 1, \quad j^5 = j, \quad \ldots$$

El conjunto de los números imaginarios se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos de otra recta, que se llama *eje imaginario*, como muestra la Figura 4-2.

$-j5$ $-j4$ $-j3$ $-j2$ $-j1$ $0$ $j1$ $j2$ $j3$ $j4$ $j5$

**Fig. 4-2. Eje imaginario**

La elección de la palabra imaginario es muy desafortunada, pues estos números tienen tanta existencia física como los reales. El vocablo significa, exclusivamente, que los números imaginarios no se pueden representar por un punto en el eje de los números reales.

### NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo **z** es de la forma $x + jy$, en donde $x$ e $y$ son números reales y $j = \sqrt{-1}$. En un número complejo $x + jy$ la primera componente, $x$, se llama parte real y la segunda, $jy$, parte imaginaria. Si la parte real es nula, $x = 0$, el número complejo se reduce a un número imaginario (puro) y se representa por un punto sobre el eje imaginario. Análogamente, si la que es nula es la parte imaginaria, $y = 0$, el número complejo se reduce a un número real y se representa por un punto del eje real. Por consiguiente, el conjunto de los números reales tiene como subconjuntos al de los números reales y al de los imaginarios.

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos, $a + jb$ y $c + jd$, sean iguales es que $a = c$ y $b = d$.

Si se traza el eje real perpendicular al eje imaginario, como se representa en la Fig. 4-3, siendo 0 el punto de intersección llamado origen, el conjunto de los números complejos se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de puntos del plano complejo así formado. En dicha Fig. 4-3, se han situado los seis números complejos ($\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_6$) que aparecen a su izquierda.

$$\mathbf{z}_1 = 6$$
$$\mathbf{z}_2 = 2 - j3$$
$$\mathbf{z}_3 = j4$$
$$\mathbf{z}_4 = -3 + j2$$
$$\mathbf{z}_5 = -4 - j4$$
$$\mathbf{z}_6 = 3 + j3$$

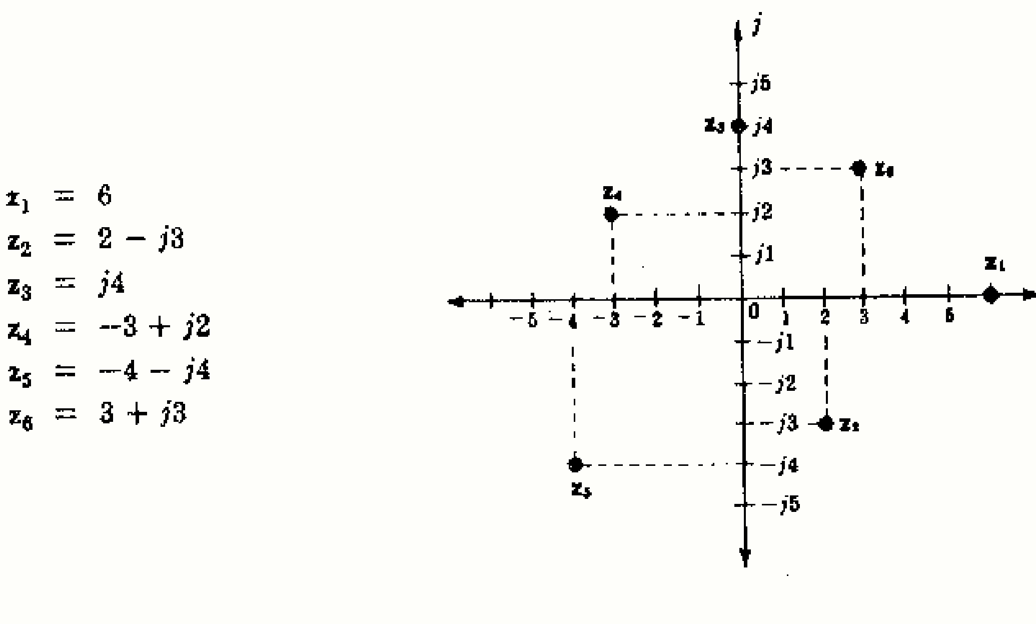



Fig. 4-3

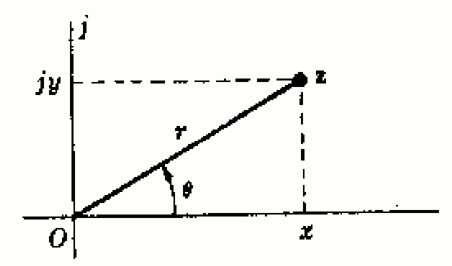
## DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR UN NUMERO COMPLEJO

En la Fig. 4-4, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, con lo que el número complejo $\mathbf{z}$ es

$$\mathbf{z} = x + jy = r(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$$

en donde la expresión $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama *módulo* de $\mathbf{z}$, y el ángulo $\theta = \operatorname{arc\,tg} y/x$ recibe el nombre de *argumento* de $\mathbf{z}$.

La fórmula de Euler, $e^{j\theta} = (\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$, permite expresar en otra forma, que se llama exponencial, un número complejo (véase Problema 4-1).




Representación polar de un número complejo z

Fig. 4-4

$$\mathbf{z} = r\cos\theta + jr\operatorname{sen}\theta = re^{j\theta}$$

En teoría de circuitos es muy frecuente emplear la forma polar o de Steinmetz de un número complejo $\mathbf{z}$ y se suele escribir así:

$$r\underline{/\theta}$$

en donde $\theta$ se mide en grados o en radianes.

A continuación se resumen las cuatro formas de representar un número complejo; el empleo de una u otra depende, fundamentalmente, de la operación que se trate de efectuar.

| | |
|---|---|
| Forma binómica | $\mathbf{z} = x + jy$ |
| Forma polar o de Steinmetz | $\mathbf{z} = r\underline{/\theta}$ |
| Forma exponencial | $\mathbf{z} = re^{j\theta}$ |
| Forma trigonométrica | $\mathbf{z} = r(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$ |

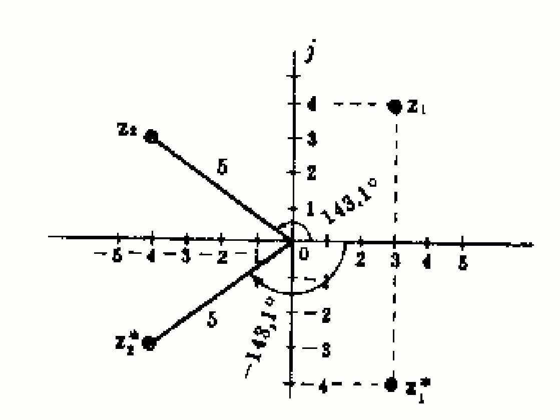
## CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO

El conjugado del número complejo $\mathbf{z} = x + jy$ es el complejo $\mathbf{z}^* = x - jy$. Por ejemplo, son números complejos conjugados los pares: (*1*) $3 - j2$ y $3 + j2$, (*2*) $-5 + j4$ y $-5 - j4$.

En forma polar, el conjunto de $\mathbf{z} = r\,\underline{/\theta}$ es $\mathbf{z}^* = r\underline{/-\theta}$. Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$, el conjugado de $\mathbf{z} = r(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta)$ es $\mathbf{z}^* = r(\cos\theta - j\,\text{sen}\,\theta)$. Por ejemplo, el conjugado de $\mathbf{z} = 7\underline{/30^\circ}$ es $\mathbf{z}^* = 7\underline{/-30^\circ}$.

En el plano complejo, el conjugado $\mathbf{z}^*$ de un número complejo $\mathbf{z}$ es siempre el simétrico de $\mathbf{z}$ respecto del eje real, como se muestra en la Figura 4-5.

Por consiguiente, las cuatro formas de escribir un número complejo $\mathbf{z}$ y su conjugado correspondiente son:




$z_1 = 3 + j4, \quad z_1^* = 3 - j4$

$z_2 = 5\underline{/143.1^\circ}, \quad z_2^* = 5\underline{/-143{,}1^\circ}$

**Fig. 4-5.** Números complejos y sus conjugados

$$\mathbf{z} = x + jy \qquad \mathbf{z} = r\underline{/\theta} \qquad \mathbf{z} = r\,e^{j\theta} \qquad \mathbf{z} = r(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta)$$
$$\mathbf{z}^* = x - jy \qquad \mathbf{z}^* = r\underline{/-\theta} \qquad \mathbf{z}^* = r\,e^{-j\theta} \qquad \mathbf{z}^* = r(\cos\theta - j\,\text{sen}\,\theta)$$

## SUMA Y RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS

Para sumar (restar) dos números complejos se suman (restan) sus partes reales y sus partes imaginarias independientemente. En la práctica, para sumar (restar) complejos lo más cómodo es escribirlos en forma binómica.

**Ejemplo 1.** Sean los complejos $\mathbf{z}_1 = 5 - j2$ y $\mathbf{z}_2 = -3 - j8$. Entonces,

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (5-3) + j(-2-8) = 2 - j10$$
$$\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = (-3-5) + j(-8+2) = -8 - j6$$

## MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

El producto de dos números complejos, escritos en forma exponencial, se deduce inmediatamente de las propiedades de la potenciación.

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

Si los complejos se escriben en forma polar es evidente que

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1\underline{/\theta_1})(r_2\underline{/\theta_2}) = r_1 r_2\underline{/\theta_1+\theta_2}$$

Por último, si los complejos vienen dados en forma binómica se multiplican como si fueran polinomios.

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$$

**Ejemplo 2.** Si $\mathbf{z}_1 = 5e^{j\pi/3}$ y $\mathbf{z}_2 = 2e^{-j\pi/6}$, resulta $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

**Ejemplo 3.** Si $\mathbf{z}_1 = 2\underline{/30^\circ}$ y $\mathbf{z}_2 = 5\underline{/-45^\circ}$, resulta $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2\underline{/30^\circ})(5\underline{/-45^\circ}) = 10\underline{/-15^\circ}$.

**Ejemplo 4.** Si $\mathbf{z}_1 = 2 + j3$ y $\mathbf{z}_2 = -1 - j3$, resulta $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2+j3)(-1-j3) = 7 - j9$.

## DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS

El cociente de dos números complejos, escritos en forma exponencial, se deduce inmediatamente de las propiedades de la potenciación.

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

Si los complejos se escriben en forma polar es evidente que

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1/\theta_1}{r_2/\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}/\theta_1 - \theta_2$$

Por último, si los complejos vienen dados en forma binómica se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

**Ejemplo 5.** Sean $\mathbf{z}_1 = 4e^{j\pi/3}$ y $\mathbf{z}_2 = 2e^{j\pi/6}$; entonces $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$.

**Ejemplo 6.** Sean $\mathbf{z}_1 = 8/-30°$ y $\mathbf{z}_2 = 2/-60°$ ; entonces $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{8/-30°}{2/-60°} = 4/30°$.

**Ejemplo 7.** Sean $\mathbf{z}_1 = 4 - j5$ y $\mathbf{z}_2 = 1 + j2$; entonces $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{4-j5}{1+j2}\left(\dfrac{1-j2}{1-j2}\right) = \dfrac{-6-j13}{5}$.

## RAIZ DE UN NUMERO COMPLEJO

Cualquier número complejo dado en la forma $\mathbf{z} = r\,e^{j\theta}$ equivale a escribir $\mathbf{z} = r\,e^{j(\theta + 2\pi n)}$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Análogamente, $\mathbf{z} = r/\theta$ es equivalente a $\mathbf{z} = r/(\theta + n360°)$. Por consiguiente,

$$\mathbf{z} = r\,e^{j\theta} = r\,e^{j(\theta+2\pi n)} \quad \text{y} \quad \sqrt[k]{\mathbf{z}} = \sqrt[k]{r}\,e^{j(\theta+2\pi n)/k}$$

$$\mathbf{z} = r/\theta = r/(\theta + n360°) \quad \text{y} \quad \sqrt[k]{\mathbf{z}} = \sqrt[k]{r}/(\theta + n360°)/k$$

Dando a $k$ los valores 0, 1, 2, 3, . . . , $(k - 1)$, se deducen las $k$ raíces distintas que posee un número complejo.

**Ejemplo 8.**

Si $\mathbf{z} = 8/60°$, se deduce que $\sqrt[3]{\mathbf{z}} = \sqrt[3]{8}/(60° + n360°)/3 = 2/(20° + n120°)$. Como $n$ se le pueden dar los valores 0, 1 y 2 se obtienen las tres raíces $2/20°$, $2/140°$ y $2/260°$.

**Ejemplo 9.** Hallar las raíces quintas de la unidad (real).

Como $1 = 1e^{j2\pi n}$, se tiene $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1}\,e^{j2\pi n/5} = 1e^{j2\pi n/5}$. Como $n$ se le pueden dar los valores 0, 1, 2, 3 y 4, las cinco raíces quintas son $1/0°$, 1, $1/72°$, $1/144°$, $1/216°$ y $1/288°$.

## LOGARITMO DE UN NUMERO COMPLEJO

El logaritmo neperiano o natural de un número complejo se halla muy fácilmente si éste se escribe en forma exponencial.

$$\ln \mathbf{z} = \ln r\,e^{j(\theta+2\pi n)} = \ln r + \ln e^{j(\theta+2\pi n)} = \ln r + j(\theta + 2\pi n)$$

El resultado que se obtiene, pues, no es único. Se llama valor principal del logaritmo al que corresponde a $n = 0$, y es el que se considera con más frecuencia.

**Ejemplo 10.** Si $\mathbf{z} = 3e^{j\pi/6}$, se deduce $\ln \mathbf{z} = \ln z\; e^{j\pi/6} = \ln 3 + j\pi/6 = 1{,}099 + j0{,}523$.

## EMPLEO DE LA REGLA DE CALCULO EN EL ALGEBRA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

### Introducción

En la notación fasorial que veremos en el Capítulo 5, la tensión, la intensidad de corriente y la impedancia son números complejos. Las formas de expresión más frecuente de estas magnitudes son la binómica y la polar. Es necesario, pues, pasar rápidamente de una a otra forma, ya que lo más cómodo para multiplicar y dividir complejos es escribirlos en forma polar y, en cambio, para sumarlos o restarlos lo mejor es hacerlo en forma binómica.

Para estas conversiones, es muy aconsejable manejar con soltura la regla de cálculo decimal-trigonométrica. Existen diversas reglas de cálculo y recomendamos aprender bien su utilización leyendo el libro de instrucciones que la acompañan.

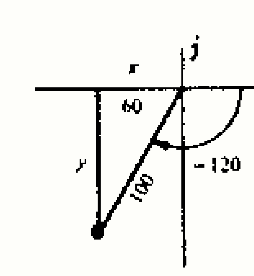
Como el propósito de esta parte es llegar a una rápida y eficaz conversión en cualquier sentido, las explicaciones trigonométricas se reducen al mínimo.

## PASO DE FORMA POLAR A BINOMICA

**Ejemplo 11.** Expresar $50\underline{/53{,}1^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.

1. Se hace un «mono» o dibujo expresando el hecho de que el ángulo es mayor de 45°.
2. $x = 50 \cos 53{,}1^\circ = 50 \times 0{,}600 = 30$,
   $y = 50 \text{ sen } 53{,}1^\circ = 50 \times 0{,}800 = 40$.
3. Las partes real e imaginaria son ambas positivas.
4. $50\underline{/53{,}1^\circ} = 30 + j40$.

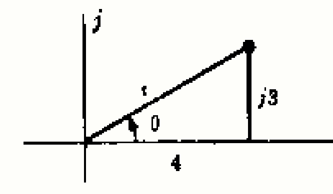
**Ejemplo 12.** Expresar $100\underline{/-120^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.




1. Se dibuja el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia es 60°.
2. $x = 100 \cos 60^\circ = 100 \times 0{,}500 = 50$,
   $y = 100 \text{ sen } 60^\circ = 100 \times 0{,}866 = 86{,}6$.
3. Las partes real e imaginaria son ambas negativas.
4. $100\underline{/-120^\circ} = -50 - j86{,}6$.

## PASO DE FORMA BINOMICA A POLAR

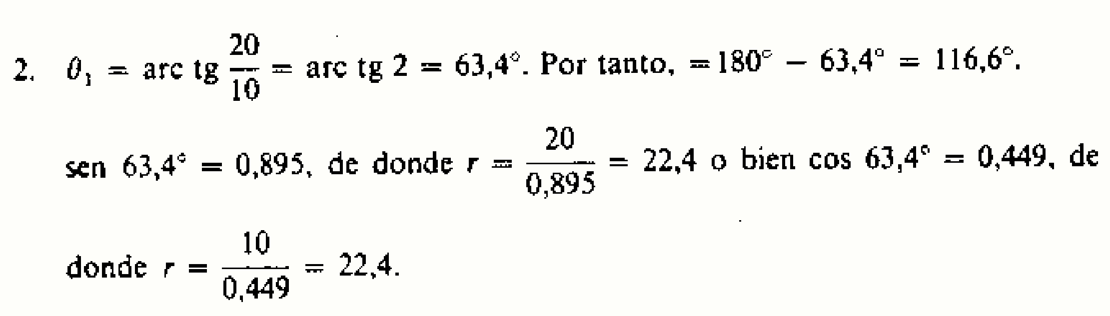
**Ejemplo 13.** Expresar $4 + j3$ en forma polar, $r\underline{/\theta}$.




1. Se hace un «mono» o dibujo exagerando el hecho de que la parte real es mayor que la parte imaginaria, es decir, el ángulo es *menor* de 45°.
2. $\theta = \text{arc tg } \frac{3}{4} = \text{arc tg } 0{,}75 = 36{,}9^\circ$ $(<45^\circ)$ sen $36{,}9^\circ = 0{,}600$, de donde $r = \frac{3}{0{,}600} = 5$ o bien $\cos 36{,}9^\circ = 0{,}800$, de donde $r = \frac{4}{0{,}800} = 5$.
3. $4 + j3 = 5\underline{/36{,}9^\circ}$.

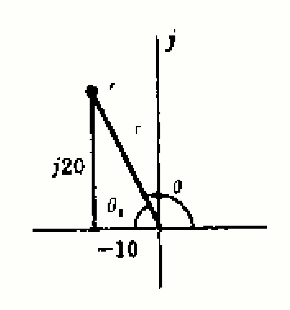
**Ejemplo 14.** Expresar $-10 + j20$ en forma polar, $r\underline{/\theta}$.

1. Se dibuja el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia $\theta_1$ es menor de 45° (complementario de $\theta$).



2. $\theta_1 = \text{arc tg } \frac{20}{10} = \text{arc tg } 2 = 63{,}4^\circ$. Por tanto, $= 180^\circ - 63{,}4^\circ = 116{,}6^\circ$.

   sen $63{,}4^\circ = 0{,}895$, de donde $r = \frac{20}{0{,}895} = 22{,}4$ o bien $\cos 63{,}4^\circ = 0{,}449$, de donde $r = \frac{10}{0{,}449} = 22{,}4$.



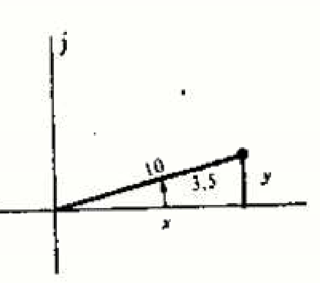

3. $-10 + j20 = 22{,}4\underline{/116{,}6^\circ}$.

## OPERACIONES CON ANGULOS MENORES DE SEIS GRADOS

Cuando el valor numérico del ángulo $\theta$ de la forma polar de un número complejo es muy pequeño, el módulo $r$ y la parte real $x$ de la forma binómica son aproximadamente iguales. Para $|\theta| \leqq 5{,}73^\circ$, los valores de $r$ y de $x$ se consideran iguales. La parte imaginaria $jy = jr$ sen $\theta$ se determina empleando la escala de senos tangentes ($ST$) de la reglilla en la que se hace la sustitución de los infinitésimos equivalentes: seno, arco y tangente. La misma hipótesis se hace cuando el ángulo $\theta$ es próximo a 180°, cuyo ángulo de referencia para los cálculos es menor que 5,73°.

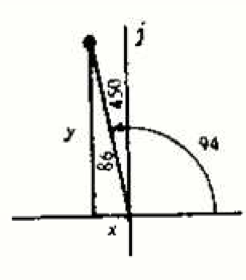
Si el valor numérico de $\theta$ es próximo a 90°, el módulo $r$ y el valor de $y$ de la parte imaginaria correspondiente al complejo escrito en forma binómica son aproximadamente iguales. Para $84{,}27^\circ \leqq \theta \leqq 95{,}73^\circ$, los valores de $r$ e $y$ se suponen iguales. La parte real $x = r \cos\theta$ se determina empleando la escala de senos tangentes de la reglilla, teniendo en cuenta que $\cos\theta = \text{sen}\,(90^\circ - \theta)$. Esta misma consideración se hace para valores de $\theta$ próximos a 270°, en los que el ángulo de referencia es igual o mayor que 84,27°.

**Ejemplo 15.** Expresar $10/\underline{3{,}5^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.



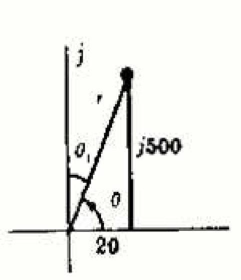

1. Se hace un «mono» o dibujo exagerando el valor del ángulo.
2. Como el ángulo es menor de 5,73°, la parte real $x = 10$.
3. sen $3{,}5^\circ = 0{,}061$, de donde $y = 10 \times 0{,}061 = 0{,}61$.
4. Las partes real e imaginaria son ambas positivas.
5. $10/\underline{3{,}5^\circ} = 10 + j0{,}61$. (Para ángulos muy pequeños, la relación entre las partes real e imaginaria es de 10 a 1.)

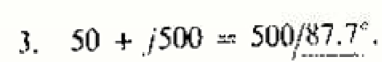
**Ejemplo 16.** Expresar $450/\underline{94^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.



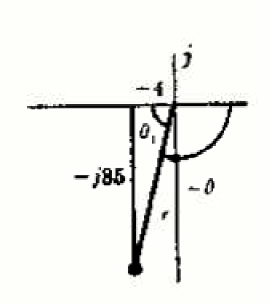

1. Se hace el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia es 86°.
2. Como el ángulo de referencia es mayor que 84,27°, la parte imaginaria $y = 450$.
3. $\cos 86^\circ = \text{sen}\ 4^\circ = 0{,}070$, de donde $x = 450 \times 0{,}070 = 31{,}5$.
4. La parte real es negativa y la imaginaria es positiva.
5. $450/\underline{94^\circ} = -31{,}5 + j450$.

**Ejemplo 17.** Expresar $50 + j500$ en forma polar, $r/\underline{\theta}$




1. Se hace el «mono» correspondiente. La relación de partes imaginaria a real es mayor que 10 a 1, lo cual indica que el ángulo es mayor de 84,27°; por tanto, $r = 500$.
2. $\theta_1 = \text{arc tg}\,\dfrac{20}{500} = \text{arc tg}\ 0{,}04 = 2{,}3^\circ$. Por tanto, $\theta = 90^\circ - 2{,}3^\circ = 87{,}7^\circ$.
3.  $50 + j500 = 500/\underline{87{,}7^\circ}$.

**Ejemplo 18.** Expresar $-4 - j85$ en forma polar, $r/\underline{\theta}$.




1. Se hace el «mono» correspondiente. La relación de partes imaginaria a real es mayor que 10 a 1, lo cual indica que el ángulo es mayor de 84,27°; por tanto, $r = 85$.
2. $\theta_1 = 90^\circ - \text{arc tg}\,\dfrac{4}{85} = 90^\circ - \text{arc tg}\,0{,}047 = 90^\circ - 2{,}7^\circ = 87{,}3^\circ$. Por tanto, $\theta = 87{,}3^\circ \pm 180^\circ = 267{,}3^\circ$ o bien $-92{,}7^\circ$.
3. $-4 - j85 = 85/\underline{267{,}3^\circ} = 85/\underline{-92{,}7^\circ}$.

# Problemas

**4-1** Demostrar la fórmula de Euler.

Supongamos que una función se puede representar por una serie de potencias de $x$ de tipo Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \cdots$$

siendo continuas, en $x = 0$, la función y todas sus derivadas.

Los desarrollos de Maclaurin de $\cos\theta$, sen $\theta$ y $e^{j\theta}$ en potencias de $\theta$ son:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \qquad \text{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - j\frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

Agrupando términos en la serie correspondiente a $e^{j\theta}$ tendremos,

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$$

**4-2** Dibujar el plano complejo y situar los siguientes números complejos. Expresar cada uno de ellos en forma polar y repetir el dibujo. Comparar las dos representaciones gráficas para cerciorarse de que las conversiones fueron bien hechas.

(*a*) $2 - j2$ (*b*) $3 + j8$ (*c*) $-5 + j3$ (*d*) $-4 - j4$ (*e*) $5 + j0$ (*f*) $j6$ (*g*) $-4$ (*h*) $-j5$

**4-3** Expresar cada uno de los números complejos que se dan a continuación en forma polar:

(*a*) $15e^{j\pi/4}$ (*b*) $5e^{-j2\pi/3}$ (*c*) $-4e^{j5\pi/6}$ (*d*) $-2e^{-j\pi/2}$ (*e*) $10e^{-j7\pi/6}$ (*f*) $-18e^{-j3\pi/2}$

*Sol.* (*a*) $15\angle 45°$, (*b*) $5\angle -120°$, (*c*) $4\angle -30°$, (*d*) $2\angle 90°$, (*e*) $10\angle -210°$ ó $10\angle 150°$, (*f*) $18\angle -90°$

**4-4** Efectuar la operación que se indica:

(*a*) $z = 3 - j4$. Hallar $zz^*$.
(*b*) $z = 10\angle -40°$. Hallar $zz^*$.
(*c*) $z = 20\angle 53{,}1°$. Hallar $z + z^*$.
(*d*) $z = 2.5e^{-j\pi/3}$. Hallar $zz^*$.
(*e*) $z = 2 + j8$. Hallar $z - z^*$.
(*f*) $z = 10 - j4$. Hallar $z + z^*$.
(*g*) $z = 95\angle 25°$. Hallar $z - z^*$.
(*h*) $z = r\angle\theta$. Hallar $z/z^*$.

*Sol.* (*a*) 25, (*b*) 100, (*c*) 24, (*d*) 6,25, (*e*) $j16$, (*f*) 20, (*g*) $j80{,}2$, (*h*) $1\angle 2\theta$.

**4-5** Hallar las raíces que se indican de los números complejos siguientes:

(*a*) $\sqrt{5 + j8}$ (*b*) $\sqrt{150\angle -60°}$ (*c*) $\sqrt[3]{6{,}93 - j4}$ (*d*) $\sqrt[3]{27e^{j3\pi/2}}$ (*e*) $\sqrt[4]{1}$ (*f*) $\sqrt{4}$

*Sol.* (*a*) $3{,}07\angle 29°$, $3{,}07\angle 209°$, (*b*) $12{,}25\angle -30°$, $12{,}25\angle 150°$, (*c*) $2\angle -10°$, $2\angle 110°$, $2\angle 230°$, (*d*) $3e^{j\pi/2}$, $3e^{j7\pi/6}$, $3e^{j11\pi/6}$, (*e*) $1\angle 0$, $1\angle 90°$, $1\angle 180°$, $1\angle 270°$, (*f*) $2\angle 0$, $2\angle 180°$, es decir, $\pm 2$.

**4-6** Hallar el logaritmo neperiano de los números complejos (*a*)-(*d*). En el apartado (*e*) calcular el producto mediante logaritmos.

(*a*) $20\angle 45°$, (*b*) $6\angle -60°$, (*c*) $0{,}5\angle 120°$, (*d*) $0{,}3\angle 180°$, (*e*) $(0{,}3\angle 180°)(20\angle 45°)$

*Sol.* (*a*) $3 + j\pi/4$, (*b*) $1{,}79 - j\pi/3$, (*c*) $-0{,}693 + j2\pi/3$, (*d*) $-1{,}2 + j\pi$, (*e*) $6\angle 225°$

**4-7** Mediante la regla de cálculo, pasar de forma polar a binómica cada uno de los números complejos que se indican.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $12{,}3\angle 30°$ | *Sol.* $10{,}63 + j6{,}15$ | (*e*) | $0{,}05\angle -20°$ | *Sol.* $0{,}047 - j0{,}0171$ |
| (*b*) | $53\angle 160°$ | $-49{,}8 + j18{,}1$ | (*f*) | $0{,}003\angle 80°$ | $0{,}00052 + j0{,}00295$ |
| (*c*) | $25\angle -45°$ | $17{,}7 - j17{,}7$ | (*g*) | $0{,}013\angle 260°$ | $-0{,}00226 - j0{,}0128$ |
| (*d*) | $86\angle -115°$ | $-36{,}3 - j78$ | (*h*) | $0{,}156\angle -190°$ | $-0{,}1535 + j0{,}0271$ |

**4-8** Mediante la regla de cálculo, pasar de forma binómica a polar cada uno de los números complejos que se indican.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $-12 + j16$ | *Sol.* $20\angle 126{,}8°$ | (*e*) | $0{,}048 - j0{,}153$ | *Sol.* $0{,}160\angle -72{,}55°$ |
| (*b*) | $2 - j4$ | $4{,}47\angle -63{,}4°$ | (*f*) | $0{,}0171 + j0{,}047$ | $0{,}05\angle 70°$ |
| (*c*) | $-59 - j25$ | $64\angle 203°$ | (*g*) | $-69{,}4 - j40$ | $80\angle 210°$ |
| (*d*) | $700 + j200$ | $727\angle 16°$ | (*h*) | $-2 + j2$ | $28{,}3\angle 135°$ |

**4-9** Mediante la regla de cálculo, pasar de forma polar a binómica cada uno de los números complejos que se indican:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $10\angle 3^\circ$ | $10 + j0,523$ | (*e*) | $0,02\angle 94^\circ$ | $-0,00139 + j0,02$ |
| (*b*) | $25\angle 88^\circ$ | $0,871 + j25$ | (*f*) | $0,70\angle 266^\circ$ | $-0,0488 - j0,70$ |
| (*c*) | $50\angle -93^\circ$ | $-2,62 - j50$ | (*g*) | $0,80\angle -5^\circ$ | $0,8 - j0,0696$ |
| (*d*) | $45\angle 179^\circ$ | $-45 + j0,785$ | (*h*) | $200\angle 181^\circ$ | $-200 - j3,49$ |

**4-10** Mediante la regla de cálculo, pasar de forma binómica a forma polar cada uno de los números complejos que se indican:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $540 + j40$ | $540\angle 4,25^\circ$ | (*e*) | $0,8 - j0,0696$ | $0,8\angle -5^\circ$ |
| (*b*) | $-10 - j250$ | $250\angle -92,29^\circ$ | (*f*) | $10 + j0,523$ | $10\angle 3^\circ$ |
| (*c*) | $8 - j0,5$ | $8\angle 3,58^\circ$ | (*g*) | $-200 - j3,49$ | $200\angle 181^\circ$ |
| (*d*) | $25 + j717$ | $717\angle 88^\circ$ | (*h*) | $0,02 - j0,001$ | $0,02\angle -2,87^\circ$ |

**4-11** Como ejercicio con la regla de cálculo, pasar de una a otra forma los números complejos que se indican. Pasar las respuestas a la forma original:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $40\angle 10^\circ$ | (*e*) | $5,0 + j0,3$ | (*i*) | $-0,05 - j0,80$ | (*m*) | $80\angle -98^\circ$ | (*q*) | $0,85\angle 1^\circ$ |
| (*b*) | $18 - j9$ | (*f*) | $0,50\angle 174^\circ$ | (*j*) | $150\angle -5^\circ$ | (*n*) | $-15 - j30$ | (*r*) | $3 + j4$ |
| (*c*) | $0,03 + j0,80$ | (*g*) | $180 + j55$ | (*k*) | $0,002\angle -178^\circ$ | (*o*) | $5\angle 233,1^\circ$ | (*s*) | $20\angle -143,1^\circ$ |
| (*d*) | $0,06\angle -100^\circ$ | (*h*) | $25\angle 88^\circ$ | (*l*) | $-1080 + j250$ | (*p*) | $-26 + j15$ | (*t*) | $-5 - j8,66$ |

**4-12** Hallar la suma o diferencia de los números complejos que se indican:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $(10\angle 53,1^\circ) + (4 + j2)$ | $10 + j10$ | (*e*) | $(-5 + j5) - (7,07\angle 135^\circ)$ | $0$ |
| (*b*) | $(10\angle 90^\circ) + (8 - j2)$ | $8 + j8$ | (*f*) | $(2 - j10) - (1 - j10)$ | $1$ |
| (*c*) | $(-4 - j6) + (2 + j4)$ | $-2 - j2$ | (*g*) | $(10 + j1) + 6 - (13,45\angle -42^\circ)$ | $6 + j10$ |
| (*d*) | $(2,83\angle 45^\circ) - (2 - j8)$ | $j10$ | (*h*) | $-(5\angle 53,1^\circ) - (1 - j6)$ | $-4 + j2$ |

**4-13** Hallar el producto de los números complejos que se indican. Como ejercicio complementario, se pueden convertir todos los complejos a forma polar y calcular de nuevo su producto, comprobando el resultado:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $(3 - j2)(1 - j4)$ | $-5 - j14$ | (*e*) | $(j2)(j5)$ | $-10$ |
| (*b*) | $(2 + j0)(3 - j3)$ | $6 - j6$ | (*f*) | $(-j1)(j6)$ | $6$ |
| (*c*) | $(-1 - j1)(1 + j1)$ | $-j2$ | (*g*) | $(2 + j2)(2 - j2)$ | $8$ |
| (*d*) | $(j2)(4 - j3)$ | $6 + j8$ | (*h*) | $(x + jy)(x - jy)$ | $x^2 + y^2$ |

**4-14** Hallar el cociente de los números complejos que se indican multiplicando numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador. Pasar los números a forma polar y calcular de nuevo su cociente comprobando el resultado:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $(5 + j5)/(1 - j1)$ | $j5$ | (*e*) | $(3 + j3)/(2 + j2)$ | $1,5$ |
| (*b*) | $(4 - j8)/(2 + j2)$ | $-1 - j3$ | (*f*) | $(-5 - j10)/(2 + j4)$ | $-2,5$ |
| (*c*) | $(5 - j10)/(3 + j4)$ | $-1 - j2$ | (*g*) | $10/(6 + j8)$ | $0,6 - j0,8$ |
| (*d*) | $(8 + j12)/(j2)$ | $6 - j4$ | (*h*) | $j5/(2 - j2)$ | $-1,25 + j1,25$ |

**4-15** Hallar cada unos de los productos que se indican:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $(2,5 + j10)(-0,85 + j4,3)$ | $45\angle 177,1^\circ$ | (*e*) | $(2 + j6)(18\angle 21^\circ)$ | $113,5\angle 92,5^\circ$ |
| (*b*) | $(3,8 - j1,5)(6 - j2,3)$ | $26,2\angle -42,6^\circ$ | (*f*) | $1\angle 80^\circ\ (25\angle -45^\circ)(0,2\angle -15^\circ)$ | $5\angle 20^\circ$ |
| (*c*) | $(72 - j72)(1,3 + j4,8)$ | $506\angle 29,8^\circ$ | (*g*) | $(12 - j16)(0,23 + j0,75)$ | $15,66\angle 19,7^\circ$ |
| (*d*) | $(3\angle 20^\circ)(2\angle -45^\circ)$ | $6\angle -25^\circ$ | (*h*) | $(j1,63)(2,6 + j1)$ | $4,53\angle 111,1^\circ$ |

**4-16** Expresar cada una de las relaciones por un único complejo:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $(23,5 + j8,55)/(4,53 - j2,11)$ | $5\angle 45^\circ$ | (*e*) | $(6,88\angle 12^\circ)/(2 + j1)$ | $3,08\angle -14,6^\circ$ |
| (*b*) | $(21,2 - j21,2)/(3,54 - j3,54)$ | $6\angle 0^\circ$ | (*f*) | $(5 + j5)/5\angle 80^\circ$ | $1,414\angle -35^\circ$ |
| (*c*) | $(-7,07 + j7,07)/(4,92 + j0,868)$ | $2\angle 125^\circ$ | (*g*) | $1/(6 + j8)$ | $0,1\angle -53,1^\circ$ |
| (*d*) | $(-j45)/(6,36 - j6,36)$ | $5\angle -45^\circ$ | (*h*) | $(-10 + j20)/(2 - j1)$ | $10\angle 143,2^\circ$ |

**4-17** En cada uno de los casos siguientes hallar el valor de la expresión $z_1 z_2/(z_1 + z_2)$:

| | | *Sol.* | | | *Sol.* |
|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | $z_1 = 10 + j5,\ z_2 = 20\angle 30^\circ$ | $7,18\angle 27,8^\circ$ | (*c*) | $z_1 = 6 - j2,\ z_2 = 1 + j8$ | $5,52\angle 23,81^\circ$ |
| (*b*) | $z_1 = 5\angle 45^\circ,\ z_2 = 10\angle -70^\circ$ | $5,5\angle 15,2^\circ$ | (*d*) | $z_1 = 20,\ z_2 = j40$ | $17,9\angle 26,6^\circ$ |

# Capítulo 5

# Impedancia compleja y notación fasorial

## INTRODUCCION

El análisis de circuitos en régimen permanente senoidal tiene una gran importancia no solo porque las tensiones que suministran los generadores son, muy aproximadamente, funciones senoidales del tiempo, sino porque cualquier forma de onda periódica se puede sustituir por un término constante y una serie de términos de senos y cosenos. Se trata del *método de Fourier de análisis de formas de ondas* y será objeto de estudio en otro capitulo.

En el Capítulo 3 se estudiaron muchos circuitos sencillos en los que las tensiones y corrientes eran funciones senoidales del tiempo. Sin embargo, hemos visto cómo a pesar de tratarse de circuitos relativamente simples su análisis es muy pesado. Mediante el empleo de la notación *fasorial* en la representación de tensiones e intensidades de corriente y el concepto de *impedancia compleja* de los elementos del circuito, el estudio en régimen permanente senoidal se facilita en grado sumo.

## IMPEDANCIA COMPLEJA

Consideremos al circuito serie $RL$ de la Fig. 5-1 al que se le aplica una tensión $v(t) = V_m e^{j\omega t}$. Según la fórmula de Euler, esta función se descompone en un término en seno y otro en coseno, $V_m \cos \omega t + jV_m \operatorname{sen} \omega t$. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla o lazo tendremos,

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = V_m e^{j\omega t}$$

Esta ecuación diferencial lineal es de primer orden y su solución particular es de la forma $i(t) = Ke^{j\omega t}$. Sustituyendo esta función de corriente resulta,

Fig. 5-1

$$RKe^{j\omega t} + j\omega LKe^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

de donde $K = \dfrac{V_m}{R + j\omega L}$ e $i(t) = \dfrac{V_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t}$. La relación entre las funciones de tensión e intensidad de corriente pone de manifiesto que la impedancia es un número complejo cuya parte real es el valor de $R$ y cuya parte imaginaria es $\omega$L:

$$\mathbf{Z} = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\dfrac{V_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t}} = R + j\omega L$$

Consideremos ahora un circuito serie $RC$ con la misma tensión aplicada $V_m e^{j\omega t}$, como indica la Fig. 5-2. En este caso,

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = V_m e^{j\omega t} \qquad (1)$$

Haciendo $i(t) = Ke^{j\omega t}$ y sustituyendo en $(1)$ resulta,

$$RKe^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}Ke^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

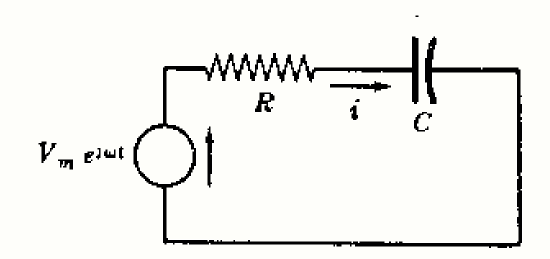



Fig. 5-2

de donde $K = \dfrac{V_m}{R + 1/j\omega C} = \dfrac{V_m}{R - j(1/\omega C)}$ y $i(t) = \dfrac{V_m}{R - j(1/\omega C)} e^{j\omega t}$. Por tanto,

$$\mathbf{Z} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\dfrac{V_m}{R - j(1/\omega C)} e^{j\omega t}} = R - j(1/\omega C)$$

Una vez más observamos cómo la impedancia es un número complejo cuya parte real es el valor de $R$ y cuya parte imaginaria es, en este caso, $-1/\omega C$.

Todo esto indica que los elementos de un circuito se pueden expresar mediante su impedancia compleja $\mathbf{Z}$, la cual se puede situar directamente sobre el diagrama del circuito, como indica la Figura 5-3.

Ahora bien, como la impedancia es un número complejo se podrá representar por un punto en el plano complejo. Además, como la resistencia óhmica no puede ser negativa, solo se precisan el primero y el cuarto cuadrante. La representación gráfica correspondiente se llama *diagrama de impedancias*. (Véase Figura 5-4.)

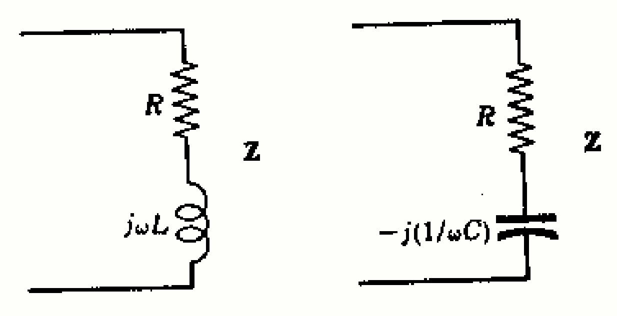
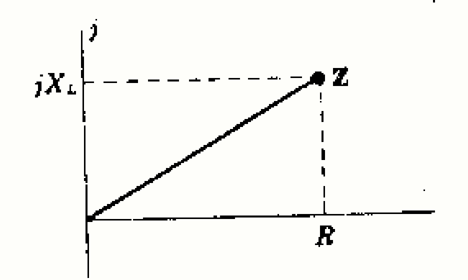



Fig. 5-3



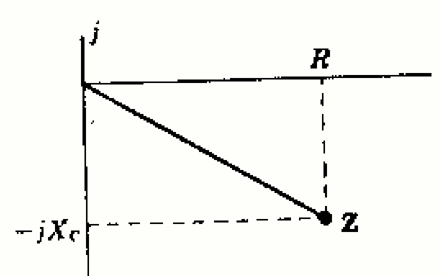



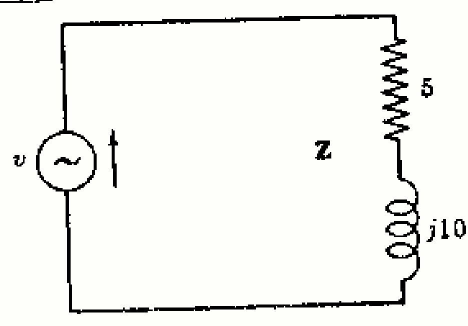

Fig. 5-4. **Diagramas de impedancia**

La resistencia $R$ corresponde a un punto sobre el eje real positivo. Una inductancia o reactancia inductiva $X_L$ se representará por un punto del eje imaginario positivo, mientras que una capacitancia o reactancia capacitiva $X_C$ estará representada por un punto sobre el eje imaginario negativo. En general, una impedancia compleja $\mathbf{Z}$ se encontrará sobre el primero o el cuarto cuadrante, según los elementos que integren el circuito. El argumento de la forma polar de $\mathbf{Z}$ está comprendido, según lo dicho, entre $\pm 90°$ o bien $\pm \pi/2$ radianes.

**Ejemplo 1.**

A un circuito serie $RL$ con $R = 5$ ohmios y $L = 2$ milihenrios se le aplica una tensión $v = 150 \text{ sen } 5000t$ voltios. (Véase Fig. 5-5.) Hallar su impedancia compleja $\mathbf{Z}$.

La reactancia inductiva es $X_L = \omega L = 5000(2 \times 10^{-3}) = 10\ \Omega$; por tanto, $\mathbf{Z} = 5 + j10$. En forma polar, $\mathbf{Z} = 11{,}16\underline{/63{,}4°}$.



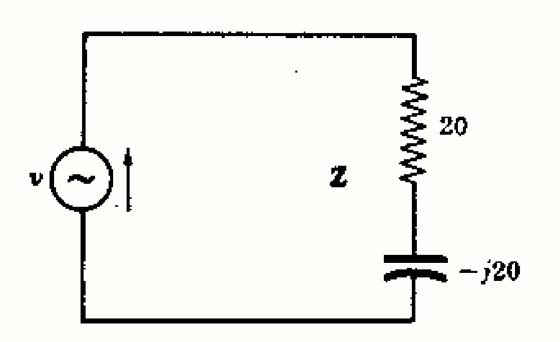

j10 — $\mathbf{Z} = 5 + j10 = 11{,}16\underline{/63{,}4°}$; 63.4°; 5

Fig. 5-5

**Ejemplo 2.**

A un circuito serie $RC$ con $R = 20$ ohmios, $C = 5$ microfaradios, se le aplica una tensión $v = 150 \cos 10.000t$ voltios. (Véase Fig. 5-6.) Hallar su impedancia compleja $\mathbf{Z}$.

La reactancia capacitiva es $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{10.000(5 \times 10^{-6})} = 20\ \Omega$; por tanto, $\mathbf{Z} = 20 - j20$. En forma polar, $\mathbf{Z} = 28{,}3\underline{/-45°}$.



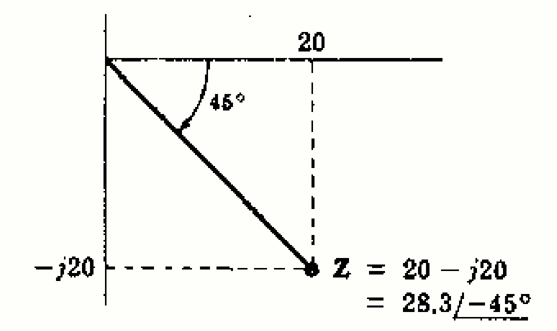
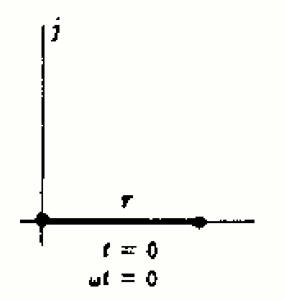



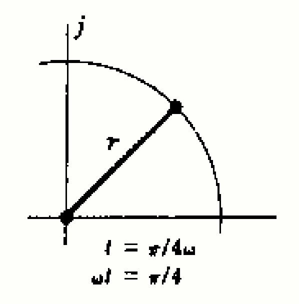

Fig. 5-6

En todos los circuitos, excepto en aquellos que solo contienen elementos resistivos puros, la impedancia es una función de la pulsación $\omega$, ya que tanto $X_L$ como $X_C$ son funciones de $\omega$. Por ello, cualquier impedancia compleja solo es válida para aquella frecuencia a la que fue calculada.

## NOTACION FASORIAL

Consideremos la función $f(t) = r\, e^{j\omega t}$. Representa un número complejo que depende del tiempo $t$. Sin embargo, su módulo es constante e igual a $r$. Haciendo una representación gráfica en los instantes $t = 0$, $\pi/4\omega$ y $\pi/2\omega$, como indica la Fig. 5-7, se pone de manifiesto la naturaleza de la citada función.



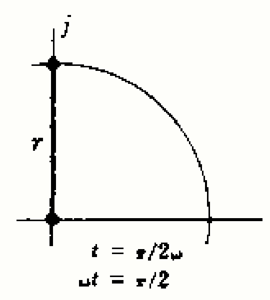
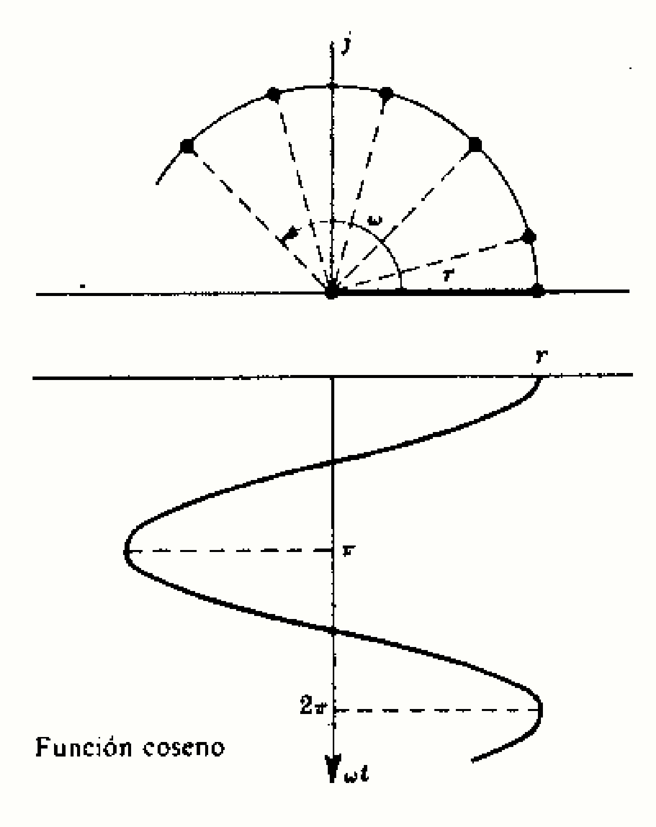




**Fig. 5-7. Función** $r\, e^{j\omega t}$

En efecto, para $\omega$ constante, el segmento gira en sentido contrario al de las agujas del reloj con velocidad angular constante. Si observamos las proyecciones de este segmento giratorio sobre los ejes real e imaginario, veremos que coinciden con los términos coseno y seno, respectivamente, de $e^{j\omega t}$ dados por la fórmula de Euler.



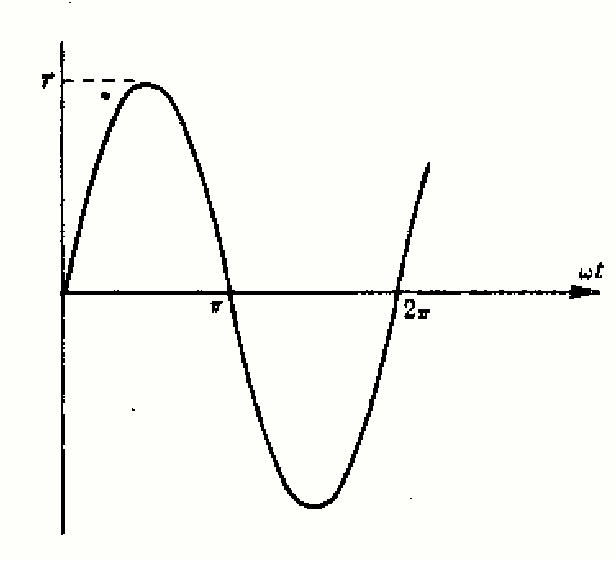




Fig. 5-8

En el Capítulo 3 vimos que por un circuito serie $RL$ al que se le aplica una tensión $v = V_m$ sen $\omega t$ voltios circula una corriente, $i = I_m$ sen $(\omega t - \theta)$ amperios, que está retrasada un ángulo $\theta$ respecto de la tensión, siendo $\theta$ = arc tg $(\omega L/R)$. Este ángulo de fase depende de las constantes del circuito y de la frecuencia de la tensión aplicada, pero nunca puede ser mayor de 90° o $\pi/2$ radianes. En la Fig. 5-9($b$) se han representado las formas de onda de $v$ e $i$ su función de $\omega t$. En la Fig. 5-9($a$) se muestran un par de segmentos dirigidos que giran en el plano complejo en sentido contrario al de las agujas del reloj con velocidad angular constante $\omega$. Como los dos tienen la misma velocidad, el ángulo que forman, o fase, permanece constante. Además, por el sentido de giro se deduce que la corriente está retrasada respecto de la tensión un ángulo $\theta$.

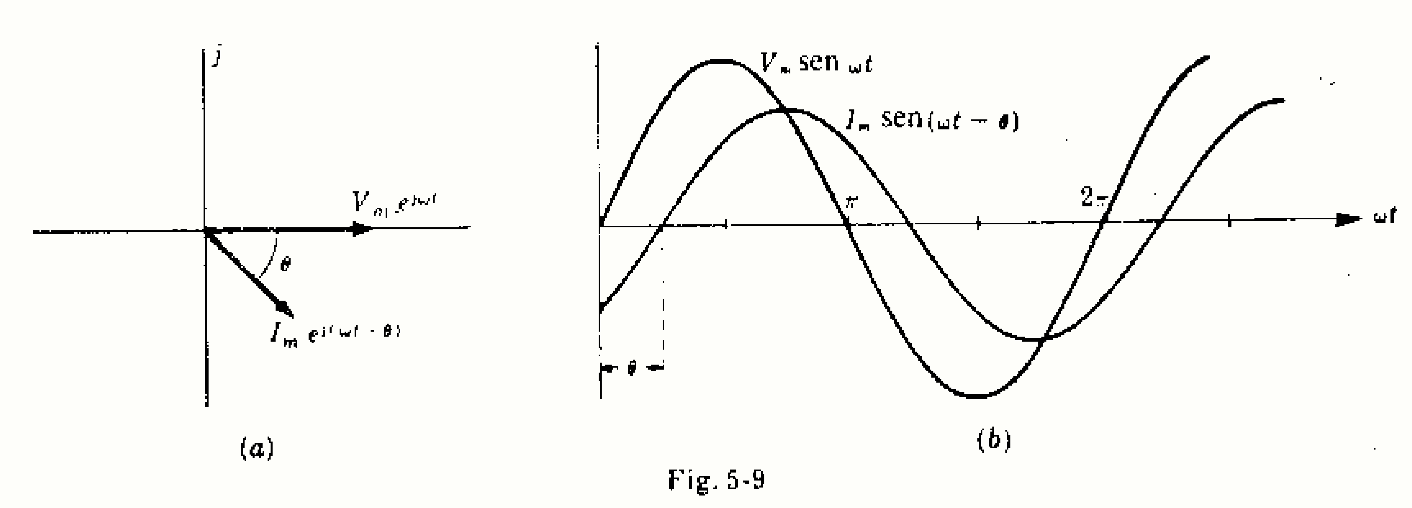


Fig. 5-9

Las proyecciones del segmento giratorio sobre el eje imaginario son, exactamente, las funciones representadas. Esto se deduce de la fórmula de Euler, ya que la parte imaginaria de la función exponencial es la función seno.

Consideremos una función de tensión general $v = V_m e^{j(\omega t + \alpha)}$, siendo $\alpha$ la fase inicial de la misma, es decir, en el instante inicial $t = 0$. Apliquemos esta tensión a un circuito de impedancia $\mathbf{Z} = ze^{j\theta}$, $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$. En estas condiciones, la intensidad de corriente viene dada por:

$$(V_m e^{j(\omega t + \alpha)})/(ze^{j\theta}) = (V_m/z)\, e^{j(\omega t + \alpha - \theta)} = I_m e^{j(\omega t + \alpha - \theta)}, \quad \text{es decir,}$$

$$I_m e^{j(\omega t + \alpha - \theta)} = \frac{V_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{ze^{j\theta}} \tag{1}$$

Esta ecuación pertenece al *dominio del tiempo*, ya que éste aparece explícitamente en las expresiones de la corriente y de la tensión. A continuación, vamos a hacer dos cambios en dicha ecuación para representar los *fasores*. En primer lugar, multipliquemos la igualdad por $e^{-j\omega t}$ para eliminar el tiempo. Después, multipliquémosla por $1/\sqrt{2}$ para obtener los valores eficaces de corriente y tensión.

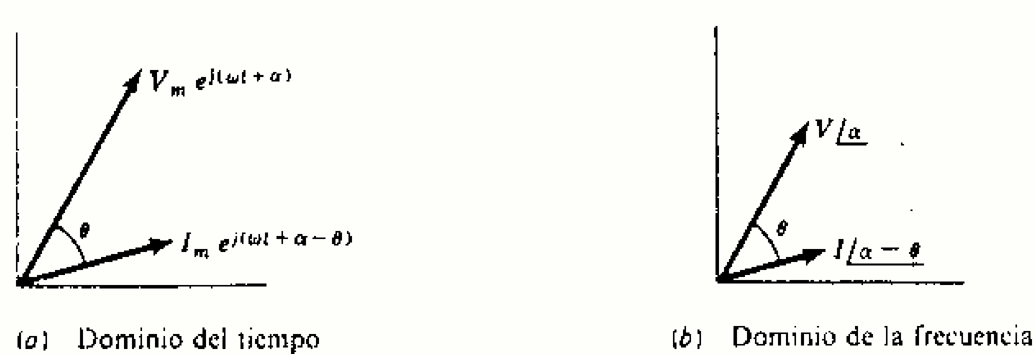
$$\frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{2}}(I_m e^{j(\omega t + \alpha - \theta)}) = \frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{2}}\left(\frac{V_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{ze^{j\theta}}\right)$$

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha - \theta)} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{j\alpha}}{ze^{j\theta}} \tag{2}$$

$$I\underline{/\alpha - \theta} = \frac{V\underline{/\alpha}}{z\underline{/\theta}} \tag{3}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} \tag{4}$$

La ecuación (2) es la transformada de la anterior al *dominio de la frecuencia*. En ella no aparece el tiempo. Sin embargo, la variación con el tiempo de la ecuación (1) está bien clara. En la expresión (3), los símbolos $V$ e $I$ sin subíndices indican los valores eficaces de la tensión e intensidad de corriente respectivamente. La expresión (4) relaciona, pues, las magnitudes complejas **I**, **V** y **Z** y como tales deben considerarse, esto es, con su módulo y su argumento. Esta última fórmula es el *equivalente fasorial* de la ley de Ohm que, a veces, se llama *forma compleja*, o *forma vectorial*, de la ley de Ohm.




(*a*) Dominio del tiempo (*b*) Dominio de la frecuencia

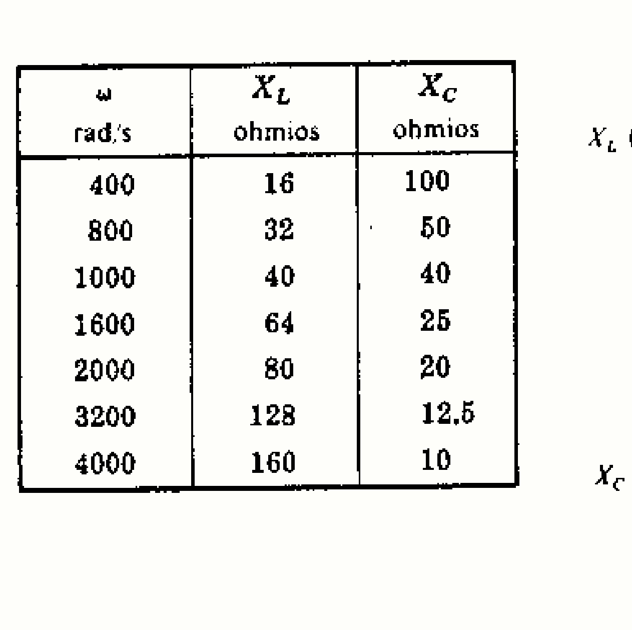
**Fig. 5-10**

En la Fig. 5-10(*a*) se representan, en el plano complejo, las funciones de tensión e intensidad de corriente expresadas en forma exponencial. Dicha representación pertenece al *dominio del tiempo t*, el cual aparece explícitamente. En la Fig. 5-10(*b*) se representan los *fasores de tensión* e *intensidad de corriente* respectivos. Los módulos son $1/\sqrt{2}$ veces los correspondientes de la Fig. 5-10(*a*) y no aparece el tiempo en forma explícita. Sin embargo, el ángulo $\theta$ y el módulo de la intensidad depende de la frecuencia, razón por la cual diremos que la Fig. 5-10(*b*) es una representación en el *dominio de la frecuencia*.

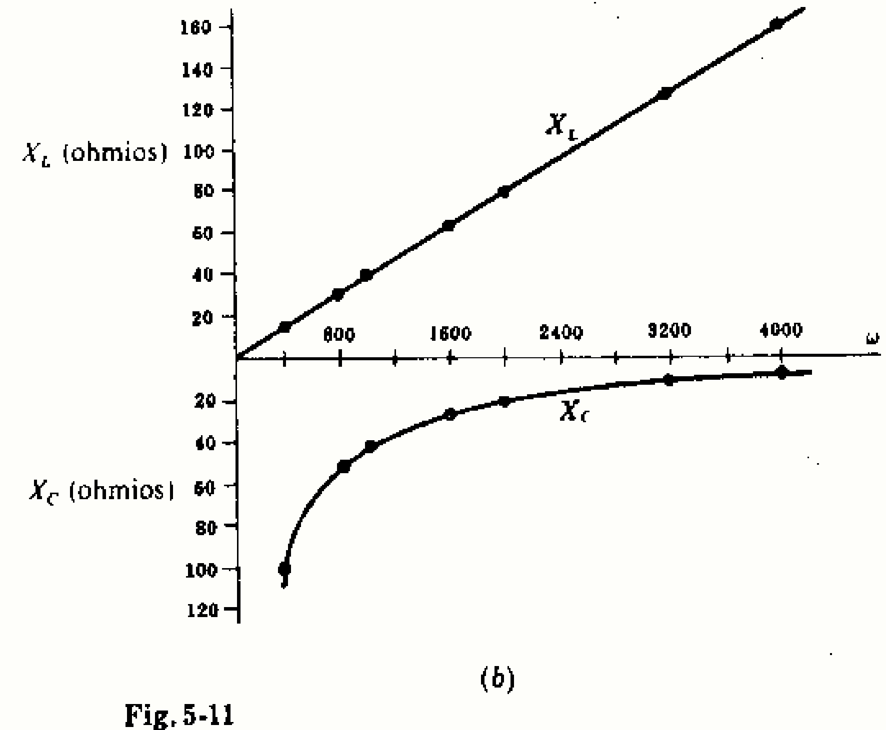
# Problemas resueltos

**5-1** Hacer una representación gráfica de la variación de $X_L$ y $X_C$ con $\omega$ en el margen de 400 a 4000 radianes por segundo. Los valores de $L$ y de $C$ son, respectivamente, 40 milihenrios y 25 microfaradios.

Dando valores a $\omega$ comprendidos en el margen dado y sustituyendo en $X_L = \omega L$ y $X_C = 1/\omega C$, se obtiene la tabla de la Fig. 5-11(*a*). En la Fig. 5-11(*b*) se pueden observar las representaciones gráficas de $X_L$ y $X_C$.



| $\omega$ rad/s | $X_L$ ohmios | $X_C$ ohmios |
|---|---|---|
| 400 | 16 | 100 |
| 800 | 32 | 50 |
| 1000 | 40 | 40 |
| 1600 | 64 | 25 |
| 2000 | 80 | 20 |
| 3200 | 128 | 12,5 |
| 4000 | 160 | 10 |




(*a*) (*b*)

**Fig. 5-11**

Cualquier circuito con una bobina $L$ o un condensador $C$ tiene una impedancia que depende de la frecuencia. Así, pues, un diagrama de impedancias construido para una frecuencia dada solo es válido para dicha frecuencia.

**5-2** Construir los diagramas fasoriales y de impedancia y determinar las constantes del circuito para la tensión y corriente siguientes: $v = 150 \operatorname{sen}(5000t + 45°)$ voltios, $i = 3 \operatorname{sen}(5000t - 15°)$ amperios.

El módulo del fasor es $1/\sqrt{2}$ veces el valor máximo. Por tanto,

$$\mathbf{V} = \frac{150}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ = 106\angle 45^\circ, \qquad \mathbf{I} = \frac{3}{\sqrt{2}}\angle -15^\circ = 2{,}12\angle -15^\circ$$

y
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{106\angle 45^\circ}{2{,}12\angle -15^\circ} = 50\angle 60^\circ = 25 + j43{,}3$$

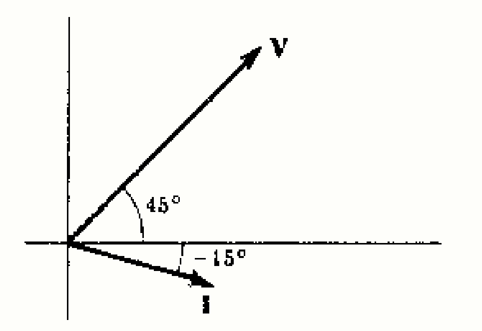



Diagrama fasorial

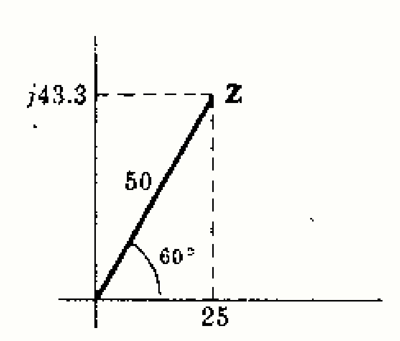



Diagrama de impedancias

Fig. 5-12

La corriente está retrasada respecto de la tensión un ángulo de 60°, lo cual indica que se trata de un circuito serie *RL*. De la ecuación anterior obtenemos $\omega L = 43{,}3\ \Omega$ de donde $L = 43{,}3/5000 = 8{,}66$ mH. Las constantes del circuito son, pues, $R = 25\ \Omega$ y $L = 8{,}66$ mH.

**5-3** Construir los diagramas fasoriales y de impedancias y determinar las constantes del circuito para la tensión y corriente siguientes: $v = 311 \operatorname{sen}(2500t + 170^\circ)$ voltios, $i = 15{,}5 \operatorname{sen}(2500t - 145^\circ)$ amperios.

$$\mathbf{V} = \frac{311}{\sqrt{2}}\angle 170^\circ = 220\angle 170^\circ, \qquad \mathbf{I} = \frac{15.5}{\sqrt{2}}\angle -145^\circ = 11\angle -145^\circ$$

y
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{220\angle 170^\circ}{11\angle -145^\circ} = 20\angle -45^\circ = 14{,}14 - j14{,}14$$

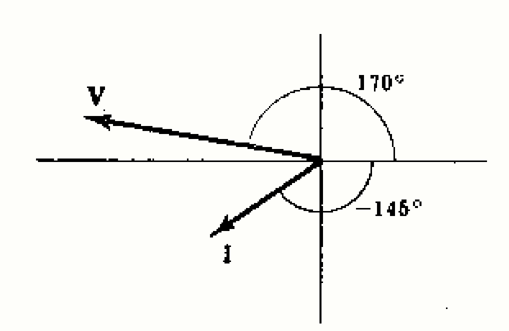



Diagrama fasorial

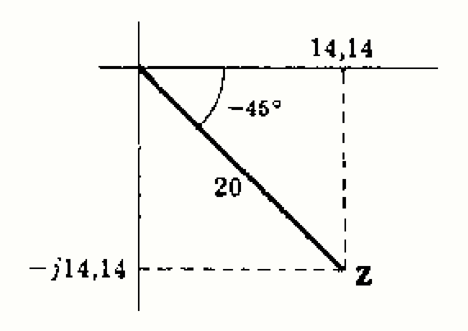



Diagrama de impedancias

Fig. 5-13

La corriente está adelantada respecto de la tensión un ángulo de 45°, lo cual indica que se trata de un circuito serie *RC*. De la ecuación anterior se deduce que $X_C = 1/\omega C = 14{,}14\ \Omega$, de donde $C = 1/(14{,}14 \times 2500) = 28{,}3\ \mu$F. Las constantes del circuito son, pues, $R = 14{,}14\ \Omega$ y $C = 28{,}3\ \mu$F.

**5-4** Un circuito serie de dos elementos, $R = 20$ ohmios y $L = 0{,}02$ henrios, tiene una impedancia igual a $40\angle\theta$ ohmios. Hallar el argumento y la frecuencia $f$ en hertzios (Hz) o ciclos por segundo (c.p.s.).

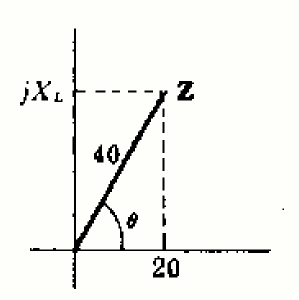



Fig. 5-14

Impedancia del circuito $= 20 + jX_L = 40\angle\theta$.

De la Fig. 5-14, $\theta = \cos^{-1} 20/40 = 60^\circ$; por tanto,

$$X_L = 40 \operatorname{sen} 60^\circ = 34{,}6\ \Omega$$

Ahora bien, $X_L = \omega L = 2\pi f L$, con lo que $f = \dfrac{X_L}{2\pi L} = \dfrac{34{,}6}{2\pi(0{,}02)} = 275$ Hz (o c.p.s.)

**5-5** A un circuito serie con $R = 10$ ohmios y $C = 50$ microfaradios se le aplica una tensión cuya frecuencia es tal que la corriente adelanta 30° respecto de la tensión. ¿A qué frecuencia la corriente estaría adelantada 70°?

En la Fig. 5-15, tg $-30° = -X_{C_1}/10 = -0{,}576$ o bien $X_{C_1} = 5{,}76\ \Omega$. Ahora bien, como $X_{C_1} = 1/2\pi f_1 C$ y

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C X_{C_1}} = \frac{1}{2\pi(50 \times 10^{-6}\ \text{F})(5{,}76\ \Omega)} = 553\ \text{Hz (o c.p.s.)}$$

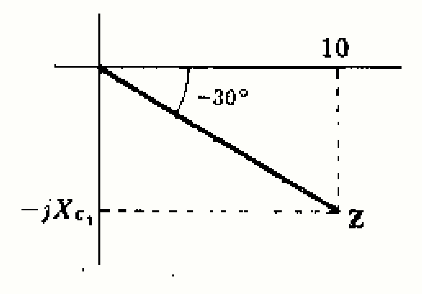
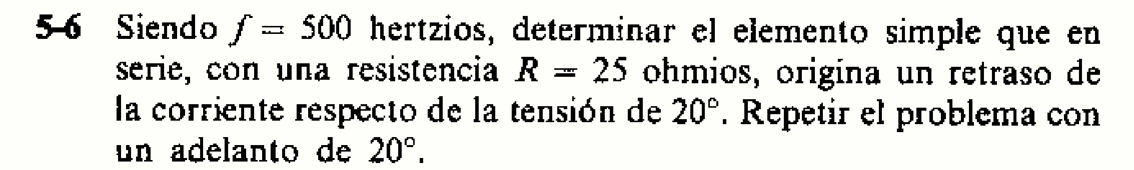


Fig. 5-15

Con la nueva frecuencia $f_2$ la corriente debe estar adelantada 70°. Ahora bien, tg $-70° = -X_{C_2}/10 = -2{,}74$, con lo cual $X_{C_2} = 27{,}4\ \Omega$. Entonces, como $f_2/f_1 = X_{C_1}/X_{C_2}$ resulta $f_2/553 = 5{,}76/27{,}4$, de donde $f_2 = 116$ Hz (o c.p.s.).

Debido a que $X_C$ es inversamente proporcional a $\omega$, el circuito serie $RC$ tendrá un ángulo de fase tanto mayor cuanto menor sea la frecuencia.



**5-6** Siendo $f = 500$ hertzios, determinar el elemento simple que en serie, con una resistencia $R = 25$ ohmios, origina un retraso de la corriente respecto de la tensión de 20°. Repetir el problema con un adelanto de 20°.

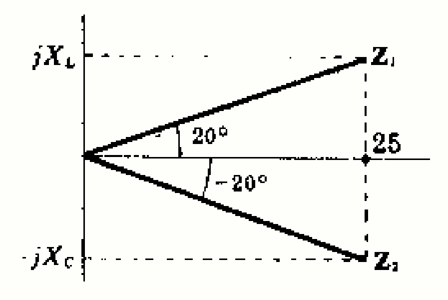


Fig. 5-16

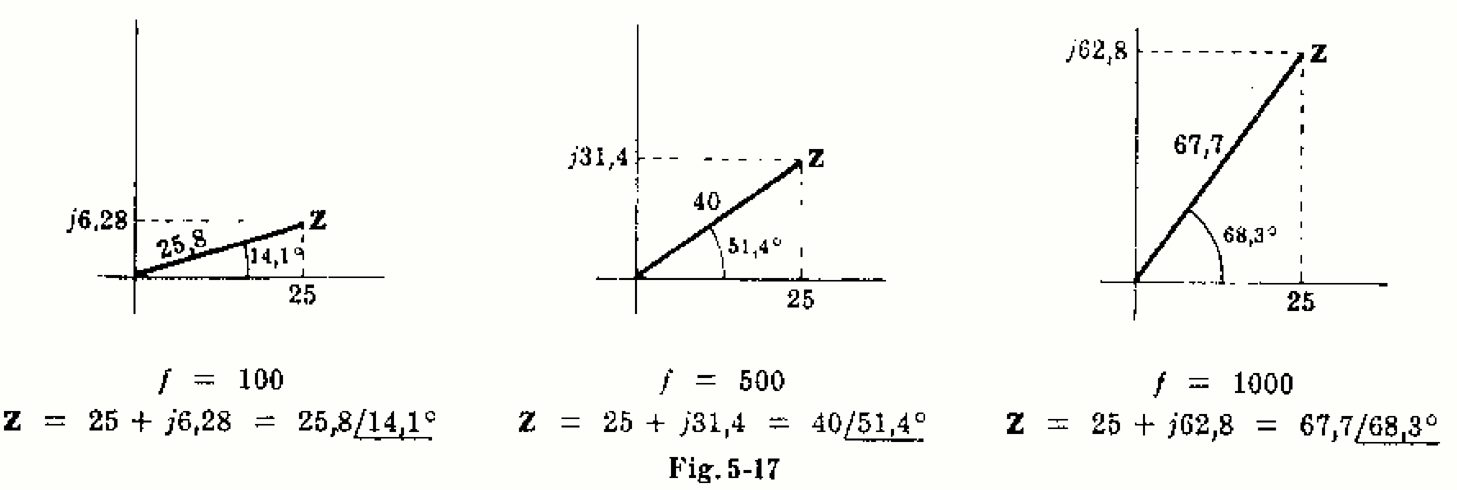
Un retraso de 20° requiere una reactancia inductiva $X_L$ en serie con $R$. Además, la reactancia capacitiva $X_C$ que origina un adelanto de 20° tendrá el mismo valor óhmico que $X_L$.

Para el retraso de corriente, tg $20° = X_L/25$ o bien $X_L = 9{,}1\ \Omega$. Entonces, $L = X_L/2\pi f = 9{,}1/2\pi(500) = 2{,}9$ mH.

Para el adelanto de corriente, $C = 1/2\pi f X_C = 1/2\pi(500)(9{,}1) = 35\ \mu$F.

**5-7** Un circuito serie con $R = 25$ ohmios y $L = 0{,}01$ henrios se utiliza con frecuencia de 100, 500 y 1000 hertzios. Calcular la impedancia del circuito **Z** para cada una de ellas.

Para $f = 100$ Hz, $X_L = 2\pi f L = 2\pi(100)(0{,}01) = 6{,}28\ \Omega$. Análogamente, para $f = 500$ Hz, $X_L = 31{,}4\ \Omega$ y para $f = 1000$ Hz, $X_L = 62{,}8\ \Omega$. Los valores de **Z** correspondientes se pueden observar en la Figura 5-17.




$f = 100$ $\quad$ $\mathbf{Z} = 25 + j6{,}28 = 25{,}8\underline{/14{,}1°}$

$f = 500$ $\quad$ $\mathbf{Z} = 25 + j31{,}4 = 40\underline{/51{,}4°}$

$f = 1000$ $\quad$ $\mathbf{Z} = 25 + j62{,}8 = 67{,}7\underline{/68{,}3°}$

Fig. 5-17

**5-8** A un circuito serie con $R = 10$ ohmios y $C = 40$ microfaradios se le aplica una tensión $v = 500 \cos(2500t - 20°)$ voltios. Hallar la intensidad de corriente $i$ que circula por él.

$X_C = 1/\omega C = 1/2500(40 \times 10^{-6}) = 10\ \Omega$ y la impedancia compleja $\mathbf{Z} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}\underline{/-45°}$. La tensión en notación fasorial es $\mathbf{V} = (500/\sqrt{2})\underline{/-20°}$. Entonces,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{(500/\sqrt{2})\underline{/-20°}}{(10\sqrt{2})\underline{/-45°}} = 25\underline{/25°}$$

e

$$i = 25\sqrt{2}\cos(2500t + 25°)$$

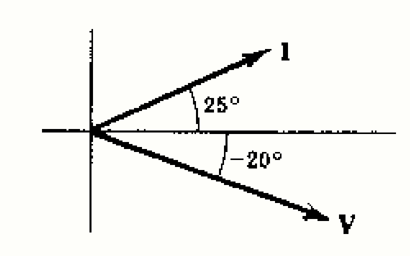


Fig. 5-18

El diagrama fasorial de la Fig. 5-18 nos dice que la intensidad de corriente **I** adelanta a la tensión **V** en la impedancia, en un ángulo de 45°.

**5-9** A un circuito serie con $R = 8$ ohmios y $L = 0{,}02$ henrios se le aplica una tensión $v = 283 \text{ sen } (300t + 90°)$ voltios. Hallar la intensidad de corriente $i$ que circula por él.

$X_L = \omega L = 300(0{,}02) = 6\ \Omega$, $\mathbf{Z} = 8 + j6 = 10\underline{/36{,}9°}$, y $\mathbf{V} = (283/\sqrt{2})\underline{/90°} = 200\underline{/90°}$. Entonces,

$$\mathbf{I} = \frac{200\underline{/90°}}{10\underline{/36{,}9°}} = 20\underline{/53{,}1°}$$

e
$$i = 20\sqrt{2}\,\text{sen}(300t + 53{,}1°)$$

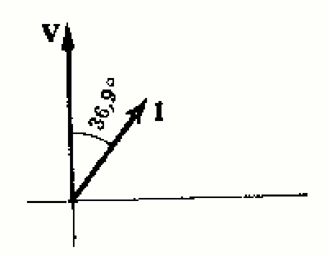
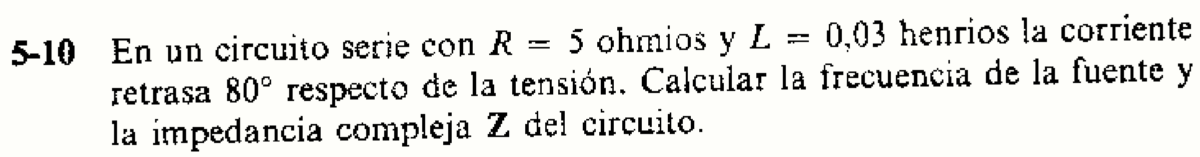


Fig. 5-19


**5-10** En un circuito serie con $R = 5$ ohmios y $L = 0{,}03$ henrios la corriente retrasa 80° respecto de la tensión. Calcular la frecuencia de la fuente y la impedancia compleja $\mathbf{Z}$ del circuito.

De la Fig. 5-20, $X_L = 5 \text{ tg } 80° = 28{,}4\ \Omega$. Como $X_L = 2\pi fL$, $f = X_L/2\pi L = 28{,}4/2\pi(0{,}03) = 151$ Hz. La impedancia compleja es $\mathbf{Z} = 5 + j28{,}4 = 28{,}8\underline{/80°}\ \Omega$.

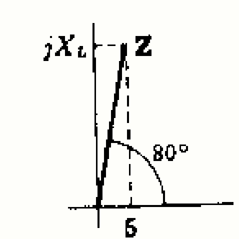
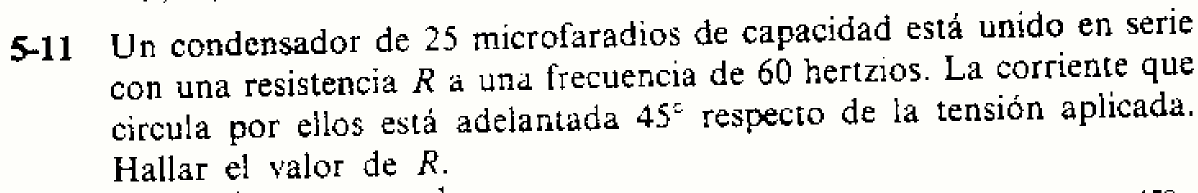


Fig. 5-20


**5-11** Un condensador de 25 microfaradios de capacidad está unido en serie con una resistencia $R$ a una frecuencia de 60 hertzios. La corriente que circula por ellos está adelantada 45° respecto de la tensión aplicada. Hallar el valor de $R$.

$X_C = \dfrac{1}{2\pi fC} = \dfrac{1}{2\pi(60)(25 \times 10^{-6})} = 106\ \Omega$. Como el ángulo de fase es 45°, $R = X_C = 106\ \Omega$.

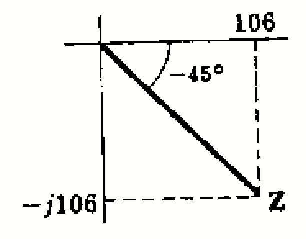


Fig. 5-21

**5-12** A un circuito serie con $R = 8$ ohmios y $L = 0{,}06$ henrios se le aplica una tensión $v_1 = 70{,}7 \text{ sen } (200t + 30°)$ voltios. A continuación, se le aplica una segunda tensión $v_2 = 70{,}7 \text{ sen } (300t + 30°)$ voltios en lugar de la primera. Hallar el valor de la intensidad $i$ para cada una de las fuentes y construir los diagramas fasoriales correspondientes.

(*a*) Con la tensión aplicada $v_1$,

$$X_L = \omega L = 200(0{,}06) = 12 \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_1 = R + jX_L = 8 + j12 = 14{,}4\underline{/56{,}3°}$$

Como $\mathbf{V}_1 = (70{,}7/\sqrt{2})\underline{/30°} = 50\underline{/30°}$,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50\underline{/30°}}{14{,}4\underline{/56{,}3°}} = 3{,}47\underline{/-26{,}3°} \quad \text{e} \quad i_1 = 3{,}47\sqrt{2}(\text{sen } 200t - 26{,}3°)$$

(*b*) Con la tensión aplicada $v_2$,

$$X_L = \omega L = 300(0{,}06) = 18 \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_2 = 8 + j18 = 19{,}7\underline{/66°}$$

Como $\mathbf{V}_2 = 50\underline{/30°}$,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} = \frac{50\underline{/30°}}{19{,}7\underline{/66°}} = 2{,}54\underline{/-36°} \quad \text{e} \quad i_2 = 2{,}54\sqrt{2} \text{ sen } (300t - 36°)$$

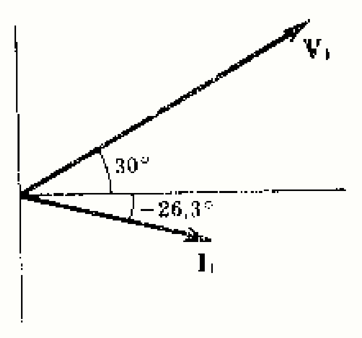


Diagrama fasorial, $\omega = 200$

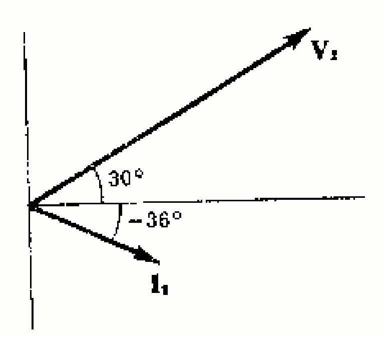


Diagrama fasorial, $\omega = 300$

Fig. 5-22

**5-13** Mediante el diagrama fasorial hallar la suma de las intensidades de corriente $i_1 = 14{,}14$ sen $(\omega t + 13{,}2^\circ)$ amperios e $i_2 = 8{,}95$ sen $(\omega t + 121{,}6^\circ)$ amperios de la Figura 5-23.

$$\mathbf{I}_1 = (14{,}14/\sqrt{2})\angle 13{,}2^\circ = 10\angle 13{,}2^\circ = 9{,}73 + j2{,}28$$
$$\mathbf{I}_2 = (8{,}95/\sqrt{2})\angle 121{,}6^\circ = 6{,}33\angle 121{,}6^\circ = -3{,}32 + j5{,}39$$
$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 6{,}41 + j7{,}67 = 10\angle 50^\circ$$

Por tanto, $i_1 + i_2 = 10\sqrt{2}$ sen $(\omega t + 50^\circ)$.

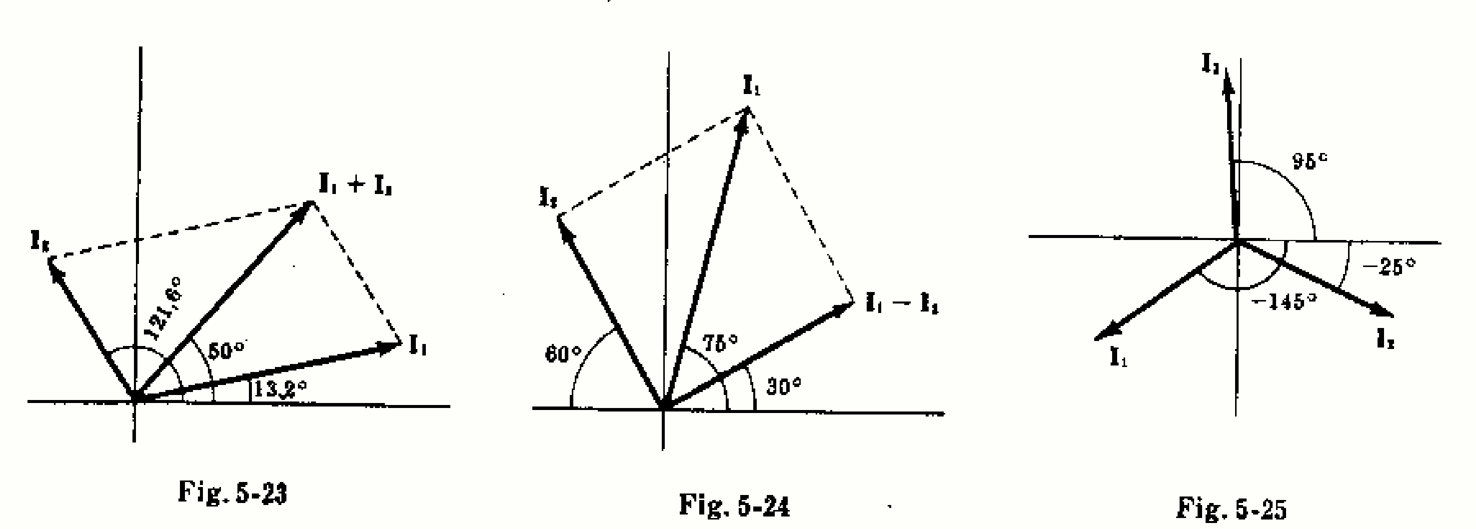



Fig. 5-23 Fig. 5-24 Fig. 5-25

**5-14** Hallar la diferencia $i_1 - i_2$ siendo $i_1 = 50 \cos(\omega t + 75^\circ)$ amperios e $i_2 = 35{,}4 \cos(\omega t + 120^\circ)$ amperios en la Figura 5-24.

$$\mathbf{I}_1 = (50/\sqrt{2})\angle 75^\circ = 35{,}4\angle 75^\circ = 9{,}16 + j34{,}2$$
$$\mathbf{I}_2 = (35{,}4/\sqrt{2})\angle 120^\circ = 25\angle 120^\circ = -12{,}5 + j21{,}7$$
$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = 21{,}7 + j12{,}5 = 25\angle 30^\circ$$

Por tanto, $i_1 - i_2 = 25\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ)$.

**5-15** Hallar la suma de las intensidades de corriente $i_1 = 32{,}6$ sen $(\omega t - 145^\circ)$ amperios, $i_2 = 32{,}6$ sen $(\omega t - 25^\circ)$ amperios e $i_3 = 32{,}6$ sen $(\omega t + 95^\circ)$ amperios.

$$\mathbf{I}_1 = (32{,}6/\sqrt{2})\angle -145^\circ = 23\angle -145^\circ = -18{,}8 - j13{,}2$$
$$\mathbf{I}_2 = (32{,}6/\sqrt{2})\angle -25^\circ = 23\angle -25^\circ = 20{,}8 - j9{,}71$$
$$\mathbf{I}_3 = (32{,}6/\sqrt{2})\angle 95^\circ = 23\angle 95^\circ = -2 + j23$$
$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = j0{,}09$$

En los límites de precisión de la regla de cálculo la suma anterior es cero. El diagrama fasorial de la Figura 5-25 muestra que las tres corrientes están defasadas 120° entre sí. Esto, junto con la igualdad de sus módulos, da como resultado una suma nula.

**5-16** Hallar la suma de las tensiones $v_1 = 126{,}5$ sen $(\omega t + 63{,}4^\circ)$ voltios y $v_2 = 44{,}7 \cos(\omega t - 161{,}5^\circ)$ voltios, y expresarla mediante una función seno y, luego, por una función coseno.

Transformando $v_2$ en una función seno, $v_2 = 44{,}7$ sen $(\omega t - 161{,}5^\circ + 90^\circ) = 44{,}7$ sen $(\omega t - 71{,}5^\circ)$. Ahora bien,

$$\mathbf{V}_1 = (126{,}5/\sqrt{2})\angle 63{,}4^\circ = 89{,}5\angle 63{,}4^\circ = 40 + j80$$
$$\mathbf{V}_2 = (44{,}7/\sqrt{2})\angle -71{,}5^\circ = 31{,}6\angle -71{,}5^\circ = 10 - j30$$
$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 50 + j50 = 50\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

y $v_1 + v_2 = 100$ sen $(\omega t + 45^\circ)$.

O bien como sen $x = \cos(x - 90^\circ)$, $v_1 + v_2 = 100 \cos(\omega t - 45^\circ)$.

**5-17** Expresar cada una de las siguientes tensiones (voltios) en notación fasorial y construir el diagrama correspondiente. $v_1 = 212$ sen $(\omega t + 45°)$, $v_2 = 141{,}4$ sen $(\omega t - 90°)$, $v_3 = 127{,}3 \cos(\omega t + 30°)$, $v_4 = 85 \cos(\omega t - 45°)$, $v_5 = 141{,}4$ sen $(\omega t + 180°)$.

En primer lugar, debemos expresar todas las tensiones mediante idéntica función, seno o coseno, para poder realizar la representación fasorial en un mismo diagrama. Transformando $v_3$ y $v_4$ en funciones seno: $v_3 = 127{,}3$ sen $(\omega t + 120°)$, $v_4 = 85$ sen $(\omega t + 45°)$.

$$\mathbf{V}_1 = (212/\sqrt{2})\underline{/45°} = 150\underline{/45°}$$
$$\mathbf{V}_2 = (141{,}4/\sqrt{2})\underline{/-90°} = 100\underline{/-90°}$$
$$\mathbf{V}_3 = (127{,}3/\sqrt{2})\underline{/120°} = 90\underline{/120°}$$
$$\mathbf{V}_4 = (85/\sqrt{2})\underline{/45°} = 60\underline{/45°}$$
$$\mathbf{V}_5 = (141{,}4/\sqrt{2})\underline{/180°} = 100\underline{/180°}$$

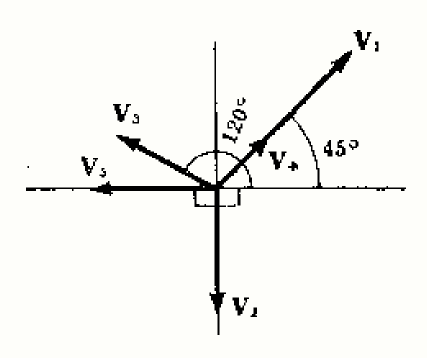



Fig. 5-26

# Problemas propuestos

En los Problemas 5-18 a 5-22 dibujar los diagramas fasorial y de impedancias y determinar las constantes de los circuitos serie suponiendo que contienen dos elementos (tensiones en voltios e intensidades en amperios).

**5-18** $v = 283 \cos(800t + 150°)$, $i = 11{,}3 \cos(800t + 140°)$. *Sol.* $R = 24{,}6\ \Omega$, $L = 5{,}43$ mH

**5-19** $v = 50$ sen $(2000t - 25°)$, $i = 8$ sen $(2000t + 5°)$. *Sol.* $R = 5{,}41\ \Omega$, $C = 160\ \mu$F

**5-20** $v = 10 \cos(5000t - 160°)$, $i = 1{,}333 \cos(5000t - 73{,}82°)$. *Sol.* $R = 0{,}5\ \Omega$, $C = 26{,}7\ \mu$F

**5-21** $v = 80$ sen $(1000t + 45°)$, $i = 8 \cos(1000t - 90°)$. *Sol.* $R = 7{,}07\ \Omega$, $L = 7{,}07$ mH

**5-22** $v = 424 \cos(2000t + 30°)$, $i = 28{,}3 \cos(2000t + 83{,}2°)$. *Sol.* $R = 9\ \Omega$, $C = 41{,}6\ \mu$F

**5-23** Un circuito serie se compone de una resistencia $R = 8$ ohmios y de un condensador de capacidad $C = 30$ microfaradios. ¿A qué frecuencia la corriente adelanta un ángulo de 30° a la tensión? *Sol.* $f = 1155$ Hz.

**5-24** En un circuito serie $RL$ la autoinducción es $L = 21{,}2$ milihenrios. A la frecuencia de 60 hertzios la corriente está retrasada 53,1° respecto de la tensión. Calcular el valor de $R$. *Sol.* $R = 6\ \Omega$.

**5-25** A un circuito serie de dos elementos se le aplica una tensión $\mathbf{V} = 240\underline{/0°}$ voltios y por él circula una corriente $\mathbf{I} = 50\underline{/-60°}$ amperios. Hallar el fasor de la intensidad de corriente que resultaría aplicando la misma tensión, pero se redujera la resistencia del circuito en un (*a*) 60 %, (*b*) 30 % de su valor.
*Sol.* (*a*) $54{,}7\underline{/-70{,}85°}$ A; (*b*) $57{,}1\underline{/-80{,}15°}$ A.

**5-26** La tensión y la intensidad de corriente en un circuito serie de dos elementos son $\mathbf{V} = 150\underline{/-120°}$ voltios e $\mathbf{I} = 7{,}5\underline{/-90°}$ amperios. ¿En qué tanto por ciento debe variar la resistencia para que el fasor de corriente valga 12 amperios y cuál es el ángulo asociado a esta corriente? *Sol.* 56,8 % en disminución; $\underline{/-66{,}8°}$.

**5-27** El ángulo de fase de la impedancia de un circuito serie $RC$ con $R = 10$ ohmios vale $-45°$ a una frecuencia $f_1 = 500$ hertzios. Hallar la frecuencia a la que el módulo de la impedancia es (*a*) el doble que el valor de $f_1$, (*b*) la mitad que el valor de $f_1$.
*Sol.* (*a*) 189 Hz; (*b*) No es posible, ya que el límite inferior de $\mathbf{Z}$ es $10 + j0$.

**5-28.** El ángulo de fase de la impedancia de un circuito serie $RL$, con $R = 10$ ohmios, vale 30° a una frecuencia $f_1 = 100$ hertzios. ¿A qué frecuencia el módulo de la impedancia es el doble que el valor de $f_1$? *Sol.* 360 Hz.

**5-29** En un circuito serie de dos elementos con $R = 5$ ohmios la corriente está retrasada 75° respecto de la tensión aplicada a una frecuencia de 60 hertzios. (*a*) Determinar el segundo elemento del circuito. (*b*) Hallar el ángulo de fase que resulta para el tercer armónico $f = 180$ hertzios. *Sol.* (*a*) 0,0496 H; (*b*) $\theta = 84{,}88°$.

**5-30** Un circuito serie consta de una resistencia $R = 5$ ohmios y un condensador de capacidad $C = 50$ microfaradios. En el mismo instante se le aplican dos fuentes de tensión, $v_1 = 170 \cos(1000t + 20°)$ y $v_2 = 170 \cos(2000t + 20°)$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente que suministra cada una de las fuentes.
*Sol.* $i_1 = 8{,}25 \cos(1000t + 95{,}95°)$ A; $i_2 = 15{,}2 \cos(2000t + 83{,}4°)$ A.

**5-31** A un circuito serie de dos elementos se le aplica una tensión $\mathbf{V} = 150\underline{/-45^\circ}$ voltios y circula una intensidad $\mathbf{I} = 4{,}74\underline{/-166{,}6^\circ}$ amperios para $\omega = 2000$ radianes por segundo. Con una segunda fuente de tensión, el ángulo de fase entre la corriente y la tensión es de 30°. Calcular la pulsación $\omega$ de esta segunda fuente.
*Sol.* 385 rad/s.

**5-32** En el Problema 5-31, ¿qué variación en la frecuencia de la fuente daría lugar a un fasor intensidad de corriente de 6 amperios? Con variación ilimitada de la frecuencia, ¿cuál será el máximo fasor intensidad de corriente posible?
*Sol.* 23,6 % de disminución en $f$; 15,0 A.

**5-33** Hallar la suma de las tensiones (voltios) de la Fig. 5-27, $v_1 = 50$ sen $(\omega t + 90°)$, $v_2 = 50$ sen $(\omega t + 30°)$. ¿Qué tensión indicaría un voltímetro que se conectara en los terminales exteriores?
*Sol.* 86,6 sen $(\omega t + 60°)$; 61,2 V.

**5-34** Hallar la suma de las tensiones (voltios) de la Fig. 5-28; $v_1 = 35$ sen $(\omega t + 45°)$, $v_2 = 100$ sen $(\omega t - 30°)$. Elegir como sentido positivo para la suma el de $v_1$. *Sol.* 97 sen $(\omega t + 129{,}6°)$.

**5-35** Repetir el Problema 5-34 tomando como positivo el sentido de $v_2$. *Sol.* 114 sen $(\omega t - 12{,}75°)$.

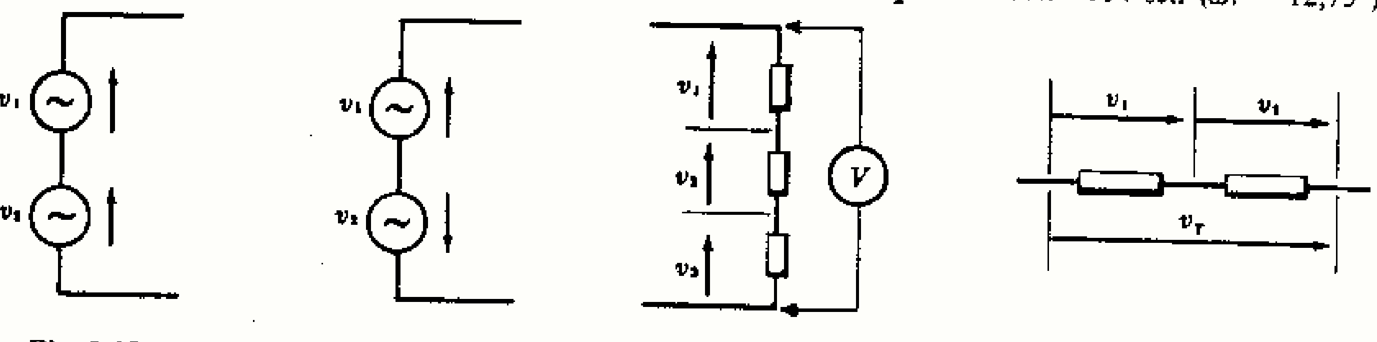



Fig. 5-27 Fig. 5-28 Fig. 5-29 Fig. 5-30

**5-36** Determinar la lectura de un voltímetro en los bornes de las impedancias de la Fig. 5-29 cuando las caídas de tensión en los elementos son: $v_1 = 70{,}7$ sen $(\omega t + 30°)$, $v_2 = 28{,}3$ sen $(\omega t + 120°)$, $v_3 = 14{,}14$ cos $(\omega t + 30°)$ voltios. *Sol.* 58,3 V.

**5-37** En la Fig. 5-30 hallar el valor de $v_1$ siendo las otras tensiones $v_2 = 31{,}6$ cos $(\omega t + 73{,}4°)$ y $v_T = 20$ cos $(\omega t - 35°)$ voltios. *Sol.* $v_1 = 42{,}4$ cos $(\omega t - 80°)$ V.

**5-38** Determinar las lecturas de un voltímetro aplicado a cada una de las impedancias del Problema 5-37 y a ambas a la vez. ¿Cómo puede explicarse este resultado? *Sol.* $V_1 = 30$ V; $V_2 = 22{,}4$ V; $V_T = 14{,}14$ V.

**5-39** Determinar la lectura del amperímetro de la Fig. 5-31 siendo las dos intensidades de corriente $i_1 = 14{,}14$ sen $(\omega t - 20°)$ e $i_2 = 7{,}07$ sen $(\omega t + 60°)$ amperios. *Sol.* 11,9 A.

**5-40** Hallar el valor de $i_T$ en la Fig. 5-32 siendo las intensidades de corriente $i_1 = 14{,}14$ sen $(\omega t + 45°)$, $i_2 = 14{,}14$ sen $(\omega t - 75°)$, $i_3 = 14{,}14$ sen $(\omega t - 195°)$ amperios. *Sol.* $i_T = 0$.

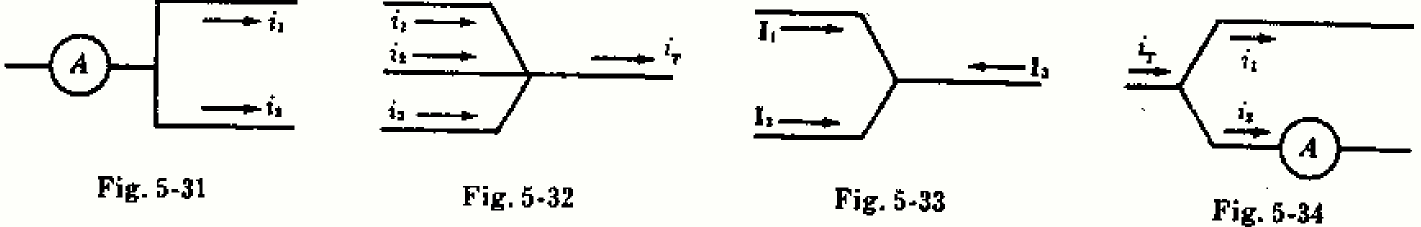



Fig. 5-31 Fig. 5-32 Fig. 5-33 Fig. 5-34

**5-41** Hallar el fasor intensidad de corriente $\mathbf{I}_3$ en la dirección indicada en el diagrama de la Fig. 5-33 sabiendo que $\mathbf{I}_1 = 25\underline{/70^\circ}$ e $\mathbf{I}_2 = 25\underline{/-170^\circ}$ amperios. *Sol.* $\mathbf{I}_3 = 25\underline{/-50^\circ}$ A.

**5-42** Hallar la corriente $i_2$ y la lectura del amperímetro de la Fig. 5-34 siendo las otras intensidades $i_T = 13{,}2$ sen $(\omega t - 31°)$ e $i_1 = 3{,}54$ sen $(\omega t + 20°)$ amperios. *Sol.* $i_2 = 11{,}3$ sen $(\omega t - 45°)$ 8 A.

**5-43** Para una frecuencia dada y con elementos fijos en un circuito el valor de la impedancia corresponde a un punto en el diagrama de impedancias. Sin embargo, si un elemento o la frecuencia son variables resulta un lugar geométrico de impedancias en vez de un único punto. Discutir qué variable produce los lugares geométricos de impedancias en cada una de las siguientes figuras.

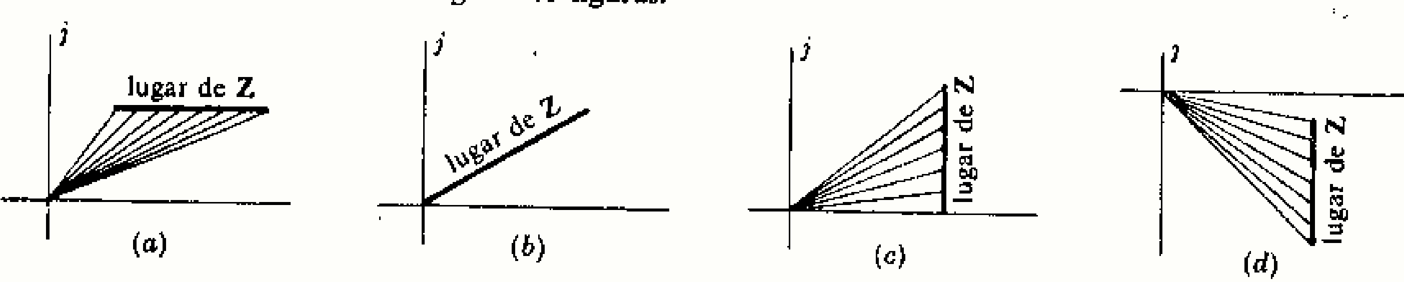



Fig. 5-35

# Capítulo 6

## Circuitos serie y paralelo

### INTRODUCCION

Un circuito contiene, en general, elementos en serie y elementos en paralelo. Sin embargo, en este capítulo trataremos por separado unos circuitos de otros examinando los diferentes métodos de análisis. En los problemas de este capítulo y los siguientes los circuitos son combinaciones en serie y en paralelo.

### CIRCUITO SERIE

El circuito serie de la Fig. 6-1 se compone de una fuente de tensión y tres impedancias. La fuente de tensión se supone constante y es la encargada de mantener la diferencia de potencial necesaria en el circuito. El fasor intensidad de corriente **I** al circular por las distintas impedancias produce unas diferencias de potencial en bornes de cada una de ellas que representan unas *caídas de tensión*. La segunda ley de Kirchhoff establece que *en toda malla o circuito cerrado la suma de las fuerzas electromotrices aplicadas o subidas de tensión es igual a la suma de las caídas de tensión producidas*. Esta sencilla ley proporciona la solución de todo circuito serie.

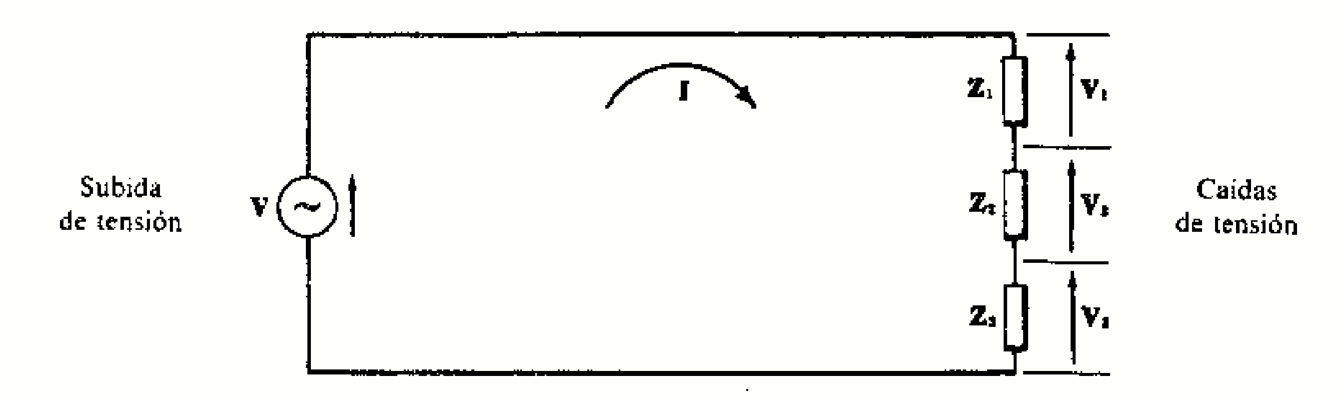



**Fig. 6-1. Circuito serie**

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I} + \mathbf{Z}_2\mathbf{I} + \mathbf{Z}_3\mathbf{I} = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I} = \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I}$$

de donde,

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_{eq} \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3$$

La caída de tensión en un elemento viene dada por el producto de la impedancia compleja **Z** por el fasor intensidad de corriente **I**. Así, en el circuito de la Fig. 6-1, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}$ y $\mathbf{V}_3 = \mathbf{Z}_3\mathbf{I}$. Las flechas marcan el sentido de referencia de estas tensiones de manera que el punto o terminal por donde entra el fasor intensidad está a más potencial que por donde sale. (Caída de tensión.)

La impedancia equivalente $\mathbf{Z}_{eq}$ de un número cualquiera de impedancias en serie es la suma de las impedancias individuales, es decir, $\mathbf{Z}_{eq} = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \ldots)$. Estas impedancias son números complejos y su suma conviene hacerla expresando las impedancias en forma binómica.

**Ejemplo 1.**

En el circuito serie de la Fig. 6-2 hallar $\mathbf{Z}_{eq}$ e **I**. Demostrar que la suma de las caídas de tensión es igual al fasor tensión aplicado.

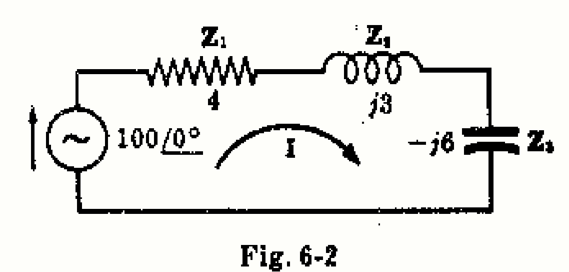



**Fig. 6-2**

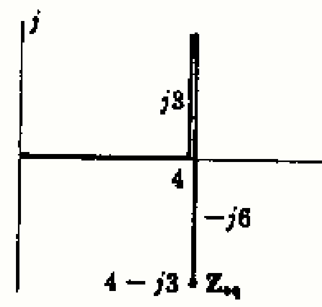
$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = 4 + j3 - j6$$
$$= 4 - j3 = 5\underline{/-36.9°}$$

con lo que $$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100/0°}{5/-36{,}9°} = 20/36{,}9°$$

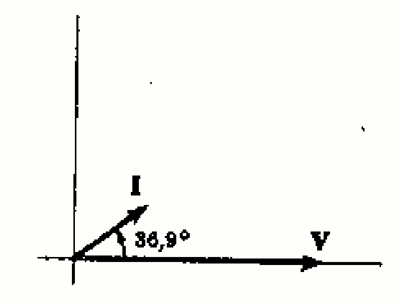
Entonces, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I} = 20/36{,}9°\,(4) = 80/36{,}9°$, $\mathbf{V}_2 = 60/126{,}9°$, $\mathbf{V}_3 = 120/-53{,}1°$

y $$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = (64 + j48) + (-36 + j48) + (72 - j96) = 100 + j0 = \mathbf{V}$$

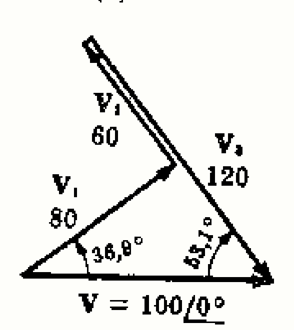
como se indica gráficamente en el diagrama fasorial de tensiones de la Figura 6-3(*c*).




(*a*) Diagrama de impedancias




(*b*) Diagrama fasorial VI




(*c*) Diagrama fasorial de tensiones

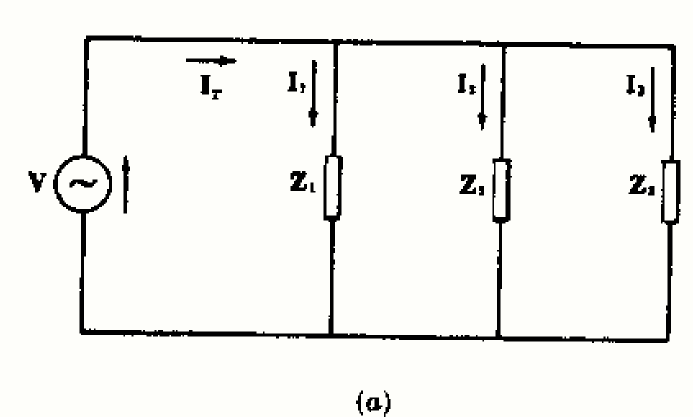
**Fig. 6-3**

La impedancia equivalente es capacitiva, por lo que la corriente I que circula por ella está adelantada un ángulo de 36,9° respecto de la tensión V, como indica la Fig. 6-3(*b*). Obsérvese que $\mathbf{V}_1$, que es la caída de tensión en la resistencia óhmica pura, está en fase con la corriente. La intensidad I está retrasada 90° respecto de $\mathbf{V}_2$, pero está adelantada 90° respecto de $\mathbf{V}_3$.

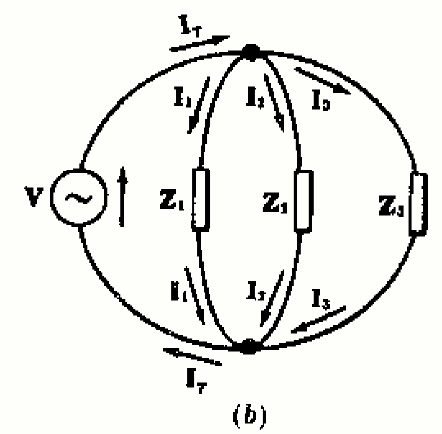
Si conectáramos un voltímetro en bornes de cada una de las impedancias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ indicaría los valores 80, 60 y 120 voltios, respectivamente. A primera vista pudiera pensarse que la tensión total debería ser 260 voltios. Sin embargo, el voltímetro conectado a las tres impedancias indica 100 voltios. Debe recordarse a este respecto que en el análisis en régimen permanente senoidal *todas las tensiones e intensidades de corriente son fasores* y, como tales, deben sumarse *vectorialmente*.

## CIRCUITO PARALELO

En la Fig. 6-4(*a*) se muestra una fuente de tensión aplicada a una asociación en paralelo de tres impedancias. En la Fig. 6-4(*b*) se repite el esquema del circuito para hacer resaltar el hecho de que la fuente y las impedancias solo tienen dos nudos comunes. En cualquiera de ellos podemos aplicar la primera ley de Kirchhoff, es decir, *la suma de las intensidades de corriente que entran en un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen de él.*




(*a*)




(*b*)

**Fig. 6-4. Circuito paralelo**

La tensión constante que suministra la fuente aparece directamente en cada una de las ramas de las impedancias. Por tanto, en este caso podemos obtener, independientemente, las intensidades de corriente que circulan por cada rama.

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_1 + \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2 + \mathbf{V}/\mathbf{Z}_3 = \mathbf{V}(1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + 1/\mathbf{Z}_3) = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_{eq}$$

Por tanto, $\mathbf{I}_T = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_{eq}$ y $1/\mathbf{Z}_{eq} = (1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + 1/\mathbf{Z}_3)$

Es decir, la impedancia equivalente de un número cualquiera de impedancias en paralelo viene dada por

$$1/\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + 1/\mathbf{Z}_3 + \cdots$$

**Ejemplo 2.**

Hallar la impedancia equivalente y la intensidad total en el circuito de la Fig. 6-5; representar el diagrama fasorial correspondiente a V e I.

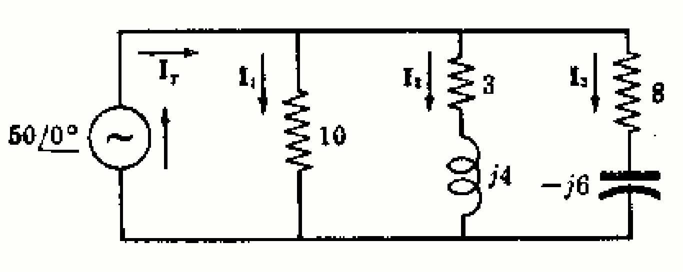
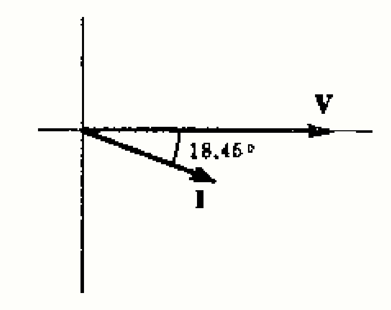



Fig. 6-5

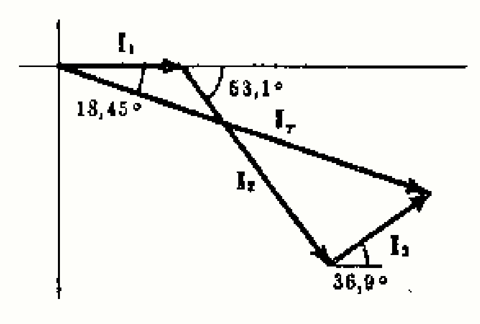
$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \frac{50\angle 0°}{10} + \frac{50\angle 0°}{5\angle 53{,}1°} + \frac{50\angle 0°}{10\angle -36{,}9°} = 15 - j5 = 15{,}8\angle -18{,}45°$$

Entonces, $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{V}/\mathbf{I}_T = (50\angle 0°)/(15{,}8\angle -18{,}45°) = 3{,}16\angle 18{,}45° = 3 + j1$

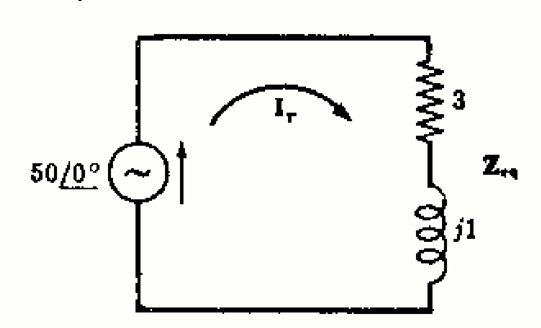
e $\mathbf{I}_1 = 50\angle 0°/10 = 5\angle 0°, \quad \mathbf{I}_2 = 10\angle -53{,}1°, \quad \mathbf{I}_3 = 5\angle 36{,}9°$




(a) Diagrama fasorial VI




(b) Suma o resultante de fasores intensidad



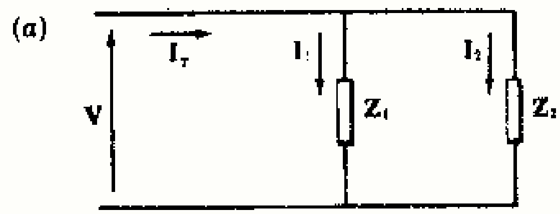

(c) Circuito equivalente

Fig. 6-6

## CIRCUITO DE DOS RAMAS EN PARALELO

En la práctica es muy frecuente encontrarse con circuitos a base de dos impedancias en paralelo, razón por la cual merece la pena dedicarle un estudio independiente. Las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ de la Fig. 6-7(*a*) tienen aplicada una tensión V. La impedancia equivalente viene dada por $1/\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2$ o bien $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$.

(*a*)




(*b*)

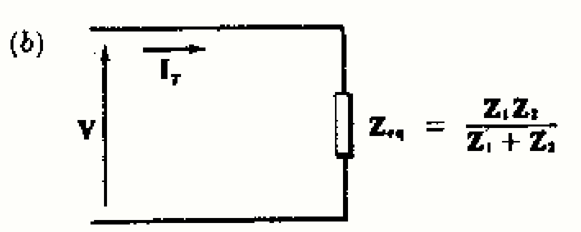



Fig. 6-7. Circuito paralelo de dos ramas

Sustituyendo $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I}_T = \left(\frac{Z_1Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)\mathbf{I}_T$ en $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2$ y despejando las intensidades de corriente por cada rama se obtienen,

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\right)\mathbf{I}_T \qquad \text{y} \qquad \mathbf{I}_2 = \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\right)\mathbf{I}_T$$

## ADMITANCIA

El recíproco de la impedancia compleja Z se llama *admitancia* compleja, es decir, $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$. Como $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}$. La admitancia Y se expresa en $(\text{ohmios})^{-1}$ o bien *mhos* cuyo símbolo es ℧. El concepto de admitancia está asociado al circuito paralelo, como se indica en la Figura 6-8.

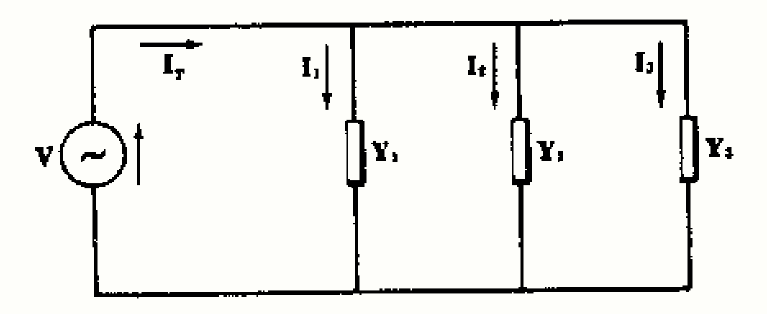



Fig. 6-8.

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{Y}_1\mathbf{V} + \mathbf{Y}_2\mathbf{V} + \mathbf{Y}_3\mathbf{V} = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V} = \mathbf{Y}_{eq}\mathbf{V}$$

y $$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3$$

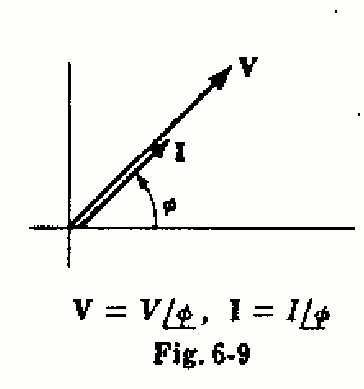
Es decir, la admitancia equivalente de un número cualquiera de admitancias en paralelo es la suma de las admitancias individuales.

En forma binómica, $\mathbf{Z} = R \pm jX$. El signo positivo indica una reactancia inductiva $X_L = \omega L$ y el signo negativo corresponde a una reactancia capacitiva $X_C = 1/\omega C$.

Análogamente, $\mathbf{Y} = G \pm jB$ en donde $G$ se llama *conductancia* y $B$ recibe el nombre de *susceptancia*. El signo positivo indica una susceptancia capacitiva $B_C$ y el signo negativo el de una susceptancia inductiva $B_L$.

Consideremos un fasor de tensión general **V** y la intensidad de corriente **I** a que da lugar. La corriente **I** puede estar adelantada, retrasada o en fase con **V**, pero, en cualquier caso, el ángulo entre ambas no puede exceder de 90°. Por consiguiente, se presentan tres casos:

1.° Los fasores intensidad de corriente y tensión están en fase, como indica la Figura 6-9.

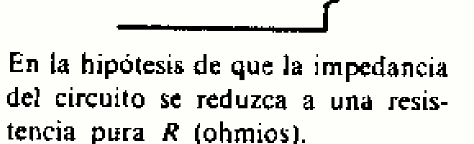



$\mathbf{V} = V\underline{/\phi}, \ \mathbf{I} = I\underline{/\phi}$

**Fig. 6-9**

**Impedancia**

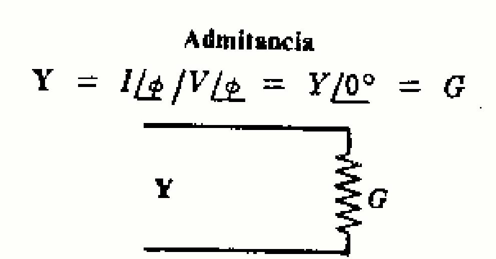
$\mathbf{Z} = V\underline{/\phi}/I\underline{/\phi} = Z\underline{/0^\circ} = R$




En la hipótesis de que la impedancia del circuito se reduzca a una resistencia pura $R$ (ohmios).

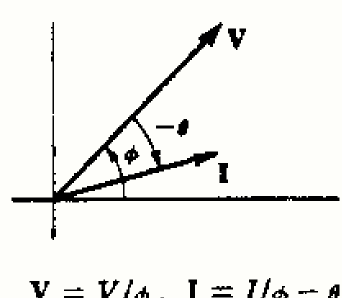
**Admitancia**

$\mathbf{Y} = I\underline{/\phi}/V\underline{/\phi} = Y\underline{/0^\circ} = G$




En la hipótesis de que la admitancia del circuito se reduzca a una conductancia pura $G$ (ohmios).

2.° El fasor intensidad de corriente está retrasado un ángulo $\theta$ respecto del de tensión, como indica la Figura 6-10.




$\mathbf{V} = V\underline{/\phi}, \ \mathbf{I} = I\underline{/\phi - \theta}$

**Fig. 6-10**

**Impedancia**

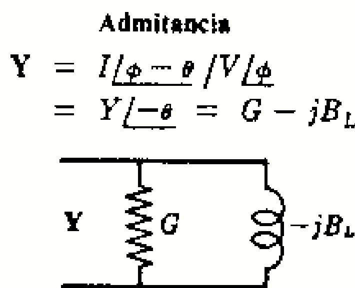
$\mathbf{Z} = V\underline{/\phi}/I\underline{/\phi - \theta}$
$= Z\underline{/\theta} = R + jX_L$

Z, R, $jX_L$

En la hipótesis de que la impedancia del circuito se reduzca a una resistencia en serie con una reactancia inductiva.

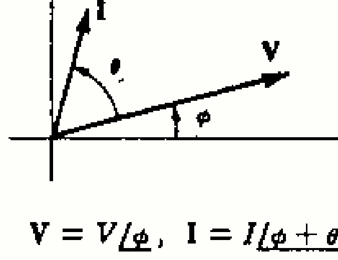
**Admitancia**

$\mathbf{Y} = I\underline{/\phi - \theta}/V\underline{/\phi}$
$= Y\underline{/-\theta} = G - jB_L$




En la hipótesis de que la admitancia del circuito se reduzca a una conductancia en paralelo con una susceptancia inductiva.

3.° El fasor intensidad de corriente está adelantado un ángulo $\theta$ respecto del de tensión, como indica la Figura 6-11.

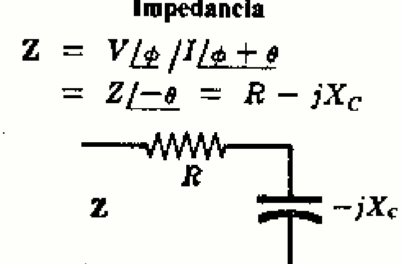



$\mathbf{V} = V\underline{/\phi}, \ \mathbf{I} = I\underline{/\phi + \theta}$

**Fig. 6-11**

**Impedancia**

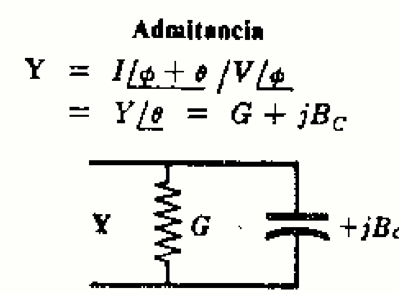
$\mathbf{Z} = V\underline{/\phi}/I\underline{/\phi + \theta}$
$= Z\underline{/-\theta} = R - jX_C$




En la hipótesis de que la impedancia del circuito se reduzca a una resistencia en serie con una reactancia capacitiva.

**Admitancia**

$\mathbf{Y} = I\underline{/\phi + \theta}/V\underline{/\phi}$
$= Y\underline{/\theta} = G + jB_C$




En la hipótesis de que la admitancia del circuito se reduzca a una conductancia en paralelo con una susceptancia capacitiva.

## CONVERSION ZY

En forma polar, es muy fácil convertir **Z** en **Y**, y viceversa, ya que $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$. Sin embargo, a veces es necesario utilizar las relaciones entre las componentes rectangulares de la forma binómica, como vamos a ver a continuación.

$$\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z} \qquad\qquad \mathbf{Z} = 1/\mathbf{Y}$$

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \qquad\qquad R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

$$\therefore \quad G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \qquad\qquad \therefore \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad \text{y} \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

**Ejemplo 3.**

Dada la impedancia $\mathbf{Z} = 3 + j4$ ohmios, hallar la admitancia correspondiente $\mathbf{Y}$.

$$\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z} = 1/5\underline{/53,1^\circ} = 0,2\underline{/-53,1^\circ} = 0,12 - j0,16$$

de donde la conductancia $G = 0,12$ ℧ y la susceptancia inductiva $B = 0,16$ ℧.

*Otro método.*

$G = R/(R^2 + X^2) = 3/(9 + 16) = 0,12$ y $B = -X/(R^2 + X^2) = -4/25 = -0,16$. Por tanto, $\mathbf{Y} = 0,12 - j0,16$

## Problemas resueltos

**6-1** Las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ de la Fig. 6-12 están en serie con una fuente de tensión $\mathbf{V} = 100\underline{/0^\circ}$. Hallar las caídas de tensión en cada una de ellas y el diagrama fasorial correspondiente.

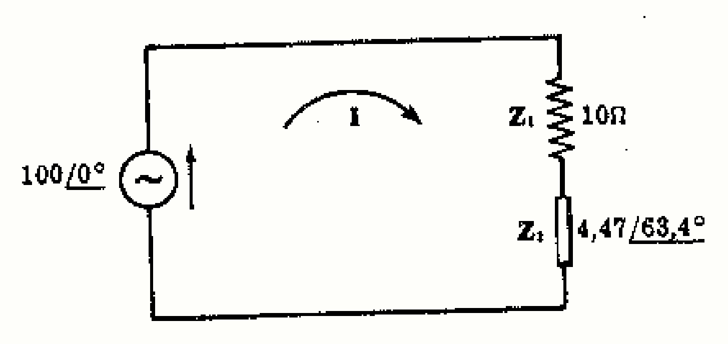



Fig. 6-12

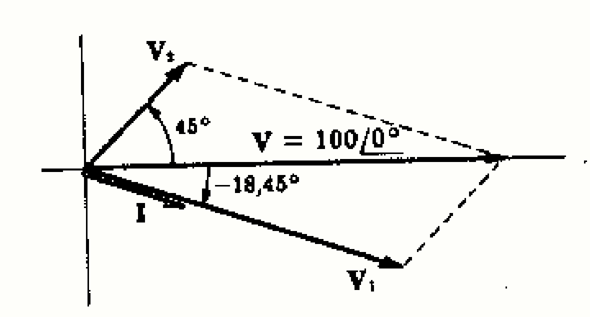



Fig. 6-13

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 10 + (2 + j4) = 12 + j4 = 12,65\underline{/18,45^\circ} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100\underline{/0^\circ}}{12,65\underline{/18,45^\circ}} = 7,9\underline{/-18,45^\circ}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I} = 7,9\underline{/-18,45^\circ}\,(10) = 79\underline{/-18,45^\circ} = 74,9 - j25$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I} = (7,9\underline{/-18,45^\circ})(4,47\underline{/63,4^\circ}) = 35,3\underline{/45^\circ} = 25 + j25$$

La suma de caídas de tensiones $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (74,9 - j25) + (25 + j25) = 99,9 + j0 \approx 100\underline{/0^\circ} = \mathbf{V}$, como se indica gráficamente en el diagrama fasorial de la Figura 6-13.

**6-2** Hallar la impedancia $\mathbf{Z}_2$ en el circuito serie de la Figura 6-14.

En este circuito, $\mathbf{Z}_{eq} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \dfrac{50\underline{/45^\circ}}{2,5\underline{/-15^\circ}} = 20\underline{/60^\circ} = 10 + j17,3$. Como $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$,

$$10 + j17,3 = (5 + j8) + \mathbf{Z}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_2 = 5 + j9,3$$

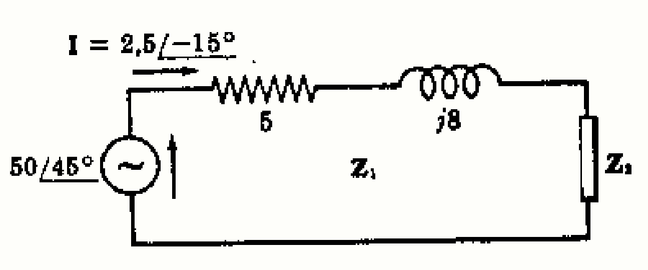



Fig. 6-14

**6-3** En el circuito de la Fig. 6-15, la intensidad de corriente está adelantada 63,4° respecto de la tensión a la pulsación $\omega = 400$ radianes por segundo. Hallar la resistencia $R$ y la caída de tensión en cada elemento del circuito. Trazar el correspondiente diagrama fasorial de tensiones.

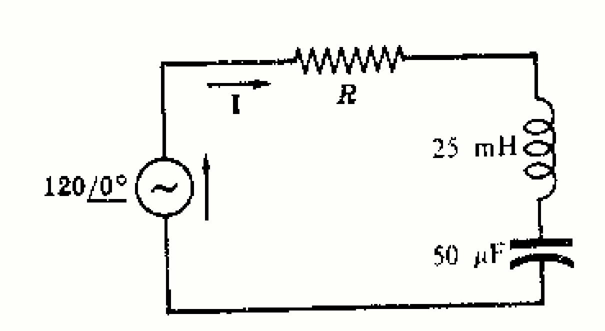



Fig. 6-15

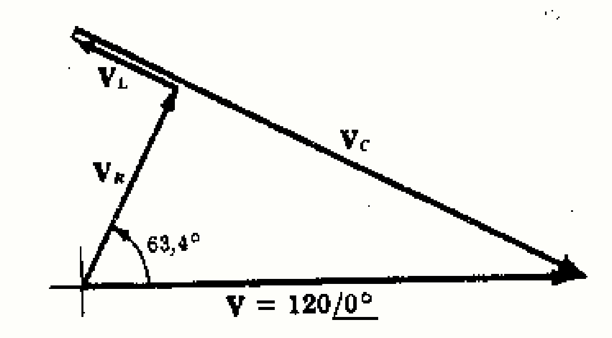



Fig. 6-16

$X_L = \omega L = 400(25 \times 10^{-3}) = 10\ \Omega$, $X_C = 1/\omega C = 1/400(50 \times 10^{-6}) = 50\ \Omega$ y $\mathbf{Z} = R + j(X_L - X_C) = R - j40$. Por otra parte, $\mathbf{Z} = Z/\underline{-63{,}4^\circ}$. Como tg $-63{,}4^\circ = (X_L - X_C)/R$, $R = -40/(\text{tg } -63{,}4^\circ) = 20\ \Omega$.

La impedancia $\mathbf{Z} = 20 - j40 = 44{,}7/\underline{-63{,}4^\circ}$ y la intensidad $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \dfrac{120/\underline{0^\circ}}{44{,}7/\underline{-63{,}4^\circ}} = 2{,}68/\underline{63{,}4^\circ}$. Por tanto

$$\mathbf{V}_R = 53{,}6/\underline{63{,}4^\circ}, \quad \mathbf{V}_L = 26{,}8/\underline{153{,}4^\circ}, \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_C = 134/\underline{-26{,}6^\circ}$$

En el diagrama fasorial de la Fig. 6-16, $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = \mathbf{V}$.

**6-4** Para obtener las constantes $R$ y $L$ de una bobina se coloca ésta en serie con una resistencia patrón de 10 ohmios y se miden las caídas de tensión en $R_s$, en la bobina y en el circuito serie completo. Determinar $R$ y $L$ si los valores obtenidos a la frecuencia de 60 hertzios son $V_{R_s} = 20$ voltios $V_{\text{bobina}} = 22{,}4$ voltios, $V_T = 36$ voltios.

En la resistencia patrón, la tensión $\mathbf{V}_{R_s}$ y la intensidad de corriente $\mathbf{I}$ están en fase. Escribiendo $\mathbf{V}_{R_s} = 20/\underline{0^\circ}$, se obtiene $\mathbf{I} = \mathbf{V}_{R_s}/R_s = 2/\underline{0^\circ}$.

En la Fig. 6-17, con centro en el origen del fasor $\mathbf{V}_{R_s}$, trazamos un arco de radio igual a 36, y con centro en el extremo de $\mathbf{V}_{R_s}$ un arco de radio 22,4. El punto de intersección de ambos corresponde al extremo de los fasores $\mathbf{V}_T$ y $\mathbf{V}_{\text{bobina}}$ de forma que $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_{R_s} + \mathbf{V}_{\text{bobina}}$.

Mediante el teorema del coseno se deduce el ángulo del fasor $\mathbf{V}_T$.

$$\cos\alpha = \frac{(36)^2 + (20)^2 - (22{,}4)^2}{2(36)(20)} = 0{,}831, \quad \alpha = 33{,}7^\circ$$

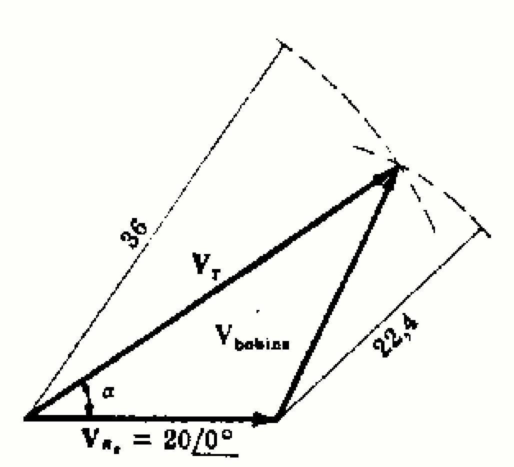
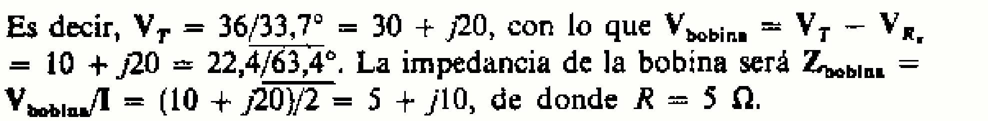



Fig. 6-17



Es decir, $\mathbf{V}_T = 36/\underline{33{,}7^\circ} = 30 + j20$, con lo que $\mathbf{V}_{\text{bobina}} = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_{R_s} = 10 + j20 = 22{,}4/\underline{63{,}4^\circ}$. La impedancia de la bobina será $\mathbf{Z}_{\text{bobina}} = \mathbf{V}_{\text{bobina}}/\mathbf{I} = (10 + j20)/2 = 5 + j10$, de donde $R = 5\ \Omega$.

A la frecuencia de 60 Hz, $X_L = 2\pi f L = 2\pi(60)L = 10$, con lo que $L = 26{,}5$ mH.

**6-5** En el circuito paralelo de la Fig. 6-18 hallar las intensidades de corriente en cada rama así como la intensidad total. Construir el diagrama fasorial correspondiente. Calcular $\mathbf{Z}_{\text{eq}}$ a partir de $\mathbf{V}/\mathbf{I}$ y comparar el valor obtenido con $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$.

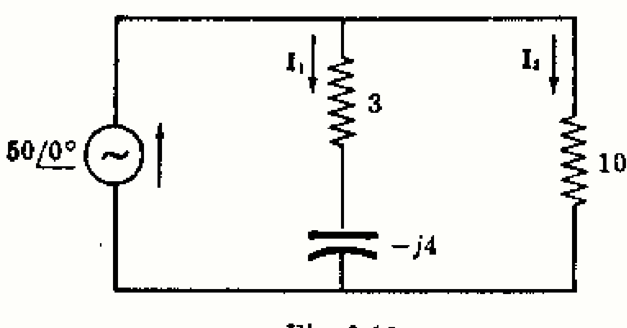



Fig. 6-18

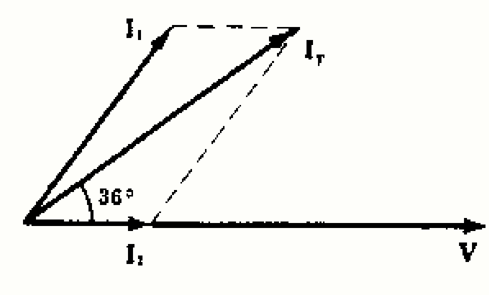



Fig. 6-19

$\mathbf{Z}_1 = 3 - j4 = 5/\underline{-53{,}1^\circ}$ y $\mathbf{Z}_2 = 10$. Por tanto,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50/\underline{0^\circ}}{5/\underline{-53{,}1^\circ}} = 10/\underline{53{,}1^\circ} = 6 + j8$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{50/\underline{0^\circ}}{10} = 5/\underline{0^\circ} = 5$$

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 11 + j8 = 13{,}6/\underline{36^\circ}$$

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_T} = \frac{50/\underline{0^\circ}}{13{,}6/\underline{36^\circ}} = 3{,}67/\underline{-36^\circ}, \quad \mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{5/\underline{-53{,}1^\circ}\,(10)}{(3 - j4) + 10} = \frac{50/\underline{-53{,}1^\circ}}{13{,}6/\underline{-17{,}1^\circ}} = 3{,}67/\underline{-36^\circ}$$

En la Fig. 6-19 se representa el diagrama fasorial.

**6-6** Hallar las intensidades de corriente que circulan por cada elemento del circuito semiparalelo de la Figura 6-20.

$$\mathbf{Z}_{eq} = 10 + \frac{5(j10)}{5 + j10} = 14 + j2 = 14{,}14\underline{/8{,}14^\circ} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{I}_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100\underline{/0^\circ}}{14{,}14\underline{/8{,}14^\circ}} = 7{,}07\underline{/-8{,}14^\circ}. \quad \text{Entonces,}$$

$$\mathbf{I}_{10} = \mathbf{I}_T = 7{,}07\underline{/-8{,}14^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{j10} = \mathbf{I}_T\left(\frac{5}{5 + j10}\right) = 7{,}07\underline{/-8{,}14^\circ}\left(\frac{5}{5 + j10}\right) = 3{,}16\underline{/-71{,}54^\circ}$$

$$\mathbf{I}_5 = \mathbf{I}_T\left(\frac{j10}{5 + j10}\right) = 7{,}07\underline{/-8{,}14^\circ}\left(\frac{j10}{5 + j10}\right) = 6{,}32\underline{/18{,}46^\circ}$$

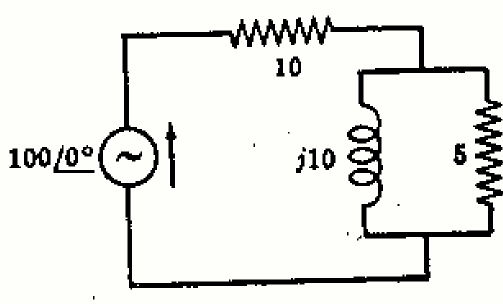


Fig. 6-20

**6-7** En el circuito paralelo de la Fig. 6-21 los valores eficaces de las intensidades de corriente $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_T$ son 18,15 y 30 amperios, respectivamente. Determinar las impedancias desconocidas $R$ y $X_L$.

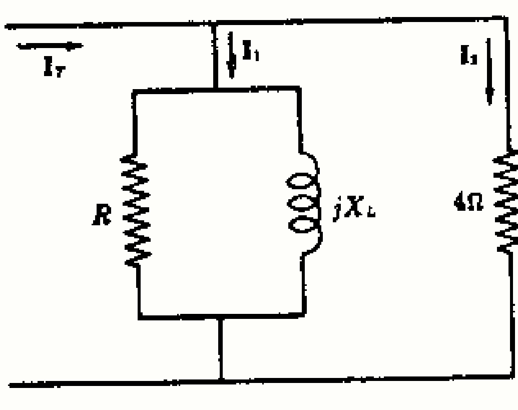


Fig. 6-21

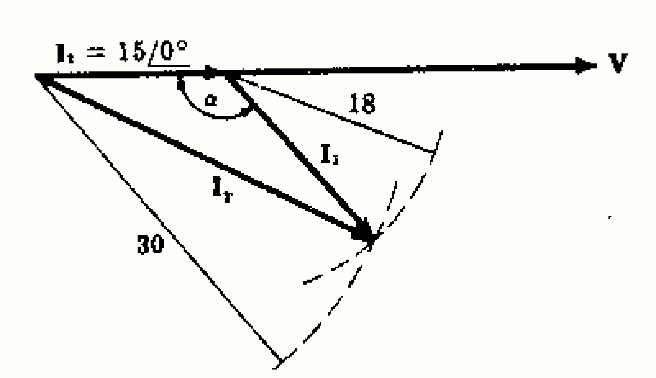


Fig. 6-22

Aplicando la primera ley de Kirchhoff, $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_T$. La intensidad $\mathbf{I}_2$ está en fase con la tensión aplicada V. Escribiendo $\mathbf{I}_2 = 15\underline{/0^\circ}$ resulta $\mathbf{V} = (4)\,15\underline{/0^\circ} = 60\underline{/0^\circ}$. Debido a la reactancia inductiva, la corriente $\mathbf{I}_1$ estará retrasada respecto de la tensión aplicada. Con una construcción idéntica a la del Problema 6-4 resulta la Fig. 6-22. En este caso,

$$\cos\alpha = \frac{(15)^2 + (18)^2 - (30)^2}{2(15)(18)} = -0{,}65, \qquad \text{de donde} \qquad \alpha = 130{,}5^\circ$$

Del diagrama $\mathbf{I}_1 = 18\underline{/-49{,}5^\circ}$. Por tanto, $\mathbf{Z}_1 = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_1} = \dfrac{60\underline{/0^\circ}}{18\underline{/-49{,}5^\circ}} = 3{,}33\underline{/49{,}5^\circ}$.

La impedancia compleja es $\mathbf{Y}_1 = 1/R + 1/jX_L = 1/3{,}33\underline{/49{,}5^\circ} = 0{,}195 - j0{,}228$. Por consiguiente,

$$R = \frac{1}{0{,}195} = 5{,}13\ \Omega \qquad \text{y} \qquad X_L = \frac{1}{0{,}228} = 4{,}39\ \Omega$$

**6-8** En el circuito serie de la Fig. 6-23 el valor eficaz de la intensidad de corriente es de 5 amperios. ¿Qué lecturas indicaría un voltímetro conectado primero a la entrada del circuito y después en cada uno de los elementos?

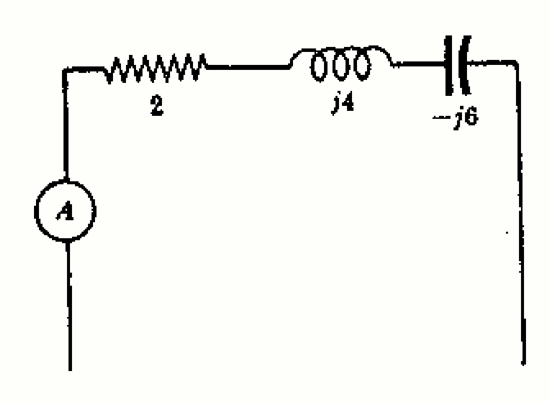


Fig. 6-23

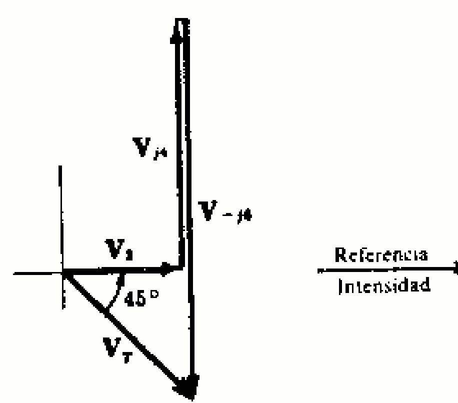


Fig. 6-24

$Z_{eq} = 2 + j4 - j6 = 2{,}83\underline{/-45^\circ}$. Por tanto,

$$V_T = (2{,}83)(5) = 14{,}14 \text{ V} \qquad V_{j4} = (4)(5) = 20 \text{ V}$$
$$V_2 = (2)(5) = 10 \text{ V} \qquad V_{-j6} = (6)(5) = 30 \text{ V}$$

En el diagrama fasorial de la Fig. 6-24 se puede ver la suma de los fasores de tensión en cada elemento del circuito.

**6-9** En el circuito paralelo de la Fig. 6-25 un voltímetro conectado en bornes de la resistencia de 3 ohmios indica una lectura de 45 voltios. ¿Qué lectura indicará el amperímetro?

$I_2 = 45/3 = 15$ A. Suponiendo que el ángulo es 0°, $\mathbf{I}_2 = 15\underline{/0^\circ}$. Por tanto, $\mathbf{V} = (3 - j3)\,15\underline{/0^\circ} = 63{,}6\underline{/-45^\circ}$ e $\mathbf{I}_1 = 63{,}6\underline{/-45^\circ}/(5 + j2) = 11{,}8\underline{/-66{,}8^\circ} = 4{,}64 - j10{,}85$.

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = (4{,}64 - j10{,}85) + 15 = 19{,}64 - j10{,}85 = 22{,}4\underline{/-29^\circ}$$

La lectura del amperímetro es 22,4 A

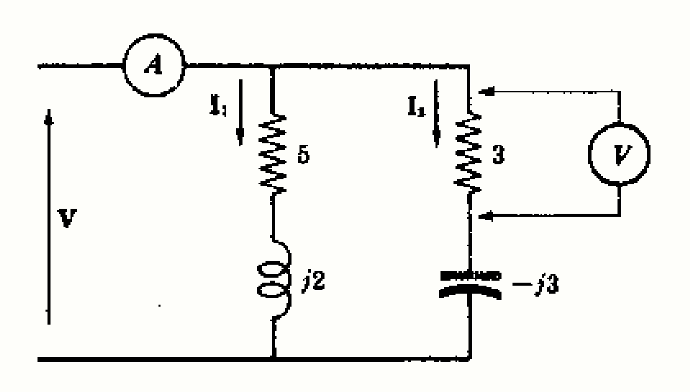



Fig. 6-25

**6-10** En el circuito serie-paralelo de la Fig. 6-26 el valor eficaz de la tensión en la asociación en paralelo es de 50 voltios. Hallar el módulo de la tensión **V** correspondiente.

$$\mathbf{Z}_p = \frac{(20 + j60)j6}{20 + j60 + j6} = 5{,}52\underline{/88{,}45^\circ} = 0{,}149 + j5{,}52$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 8{,}5\underline{/30^\circ} + (0{,}149 + j5{,}52) = 12{,}3\underline{/52{,}4^\circ}$$

Ahora bien, $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I}$ y $\mathbf{V}_p = \mathbf{Z}_p\mathbf{I}$, $V_p/Z_p = V/Z_{eq}$. Por tanto,

$$V = V_p(Z_{eq}/Z_p) = 50(12{,}3/5{,}52) = 111{,}5 \text{ V}$$

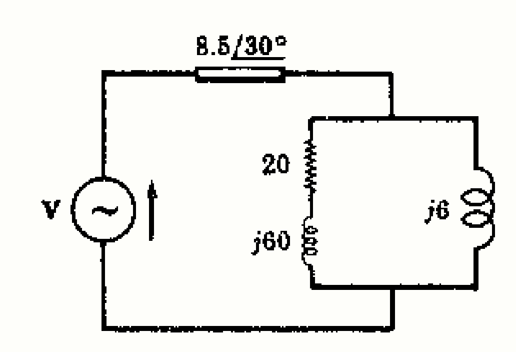



Fig. 6-26

**6-11** Hallar la intensidad total de corriente y la impedancia equivalente del circuito de cuatro ramas en paralelo representado en la Figura 6-27.

$$\mathbf{Y}_1 = 1/j5 = -j0{,}2$$
$$\mathbf{Y}_2 = 1/10\underline{/60^\circ} = 0{,}05 - j0{,}0866$$
$$\mathbf{Y}_3 = 1/15 = 0{,}067$$
$$\mathbf{Y}_4 = 1/-j10 = j0{,}1$$
$$\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}117 - j0{,}1866 = 0{,}22\underline{/-58^\circ}$$

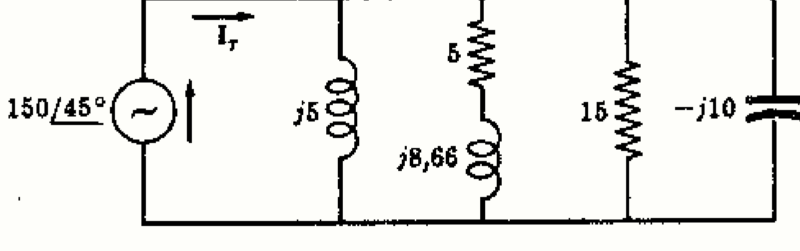



Fig. 6-27

Por tanto, $\mathbf{I}_T = \mathbf{V}\mathbf{Y}_{eq} = (150\underline{/45^\circ})(0{,}22\underline{/-58^\circ}) = 33\underline{/-13^\circ}$ y $\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Y}_{eq} = 1/(0{,}22\underline{/-58^\circ}) = 4{,}55\underline{/58^\circ}$

**6-12** Hallar la impedancia $\mathbf{Z}_1$ del circuito de tres ramas en paralelo representado en la Figura 6-28.

La admitancia compleja del circuito es $\mathbf{Y}_{eq} = \dfrac{\mathbf{I}_T}{\mathbf{V}} = \dfrac{31{,}5\underline{/24^\circ}}{50\underline{/60^\circ}} = 0{,}63\underline{/-36^\circ} = 0{,}51 - j0{,}37$. Ahora bien, $\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_1 + (0{,}1) + (0{,}16 - j0{,}12) = 0{,}51 - j0{,}37$, $\mathbf{Y}_1 = 0{,}25 - j0{,}25 = 0{,}25\sqrt{2}\underline{/-45^\circ}$. Por tanto,

$$\mathbf{Z}_1 = 1/\mathbf{Y}_1 = 2\sqrt{2}\underline{/45^\circ} = 2 + j2$$

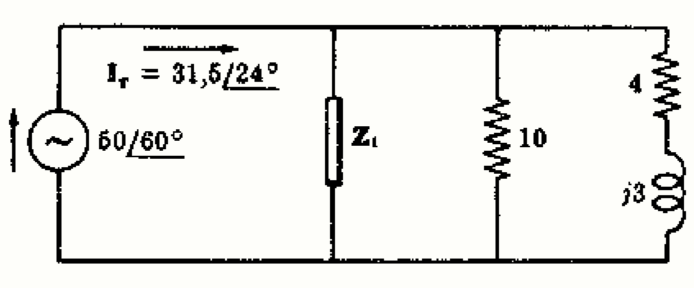



Fig. 6-28

*Otro método.*

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1 + \frac{50\underline{/60^\circ}}{10} + \frac{50\underline{/60^\circ}}{5\underline{/36{,}9^\circ}} = 31{,}5\underline{/24^\circ},$$ de donde $\mathbf{I}_1 = 17{,}7\underline{/15^\circ}$. Por consiguiente,

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_1} = \frac{50\underline{/60^\circ}}{17{,}7\underline{/15^\circ}} = 2\sqrt{2}\underline{/45^\circ} = 2 + j2.$$

**6-13** Dado el diagrama fasorial de tensión de la Fig. 6-29 determinar los valores de la admitancia e impedancia equivalentes.

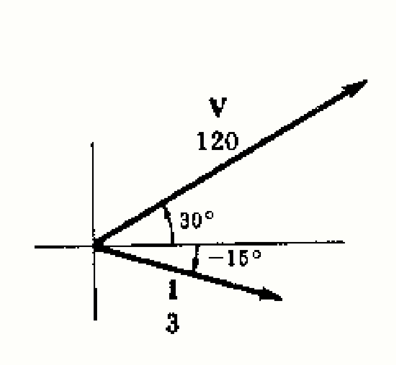



Fig. 6-29



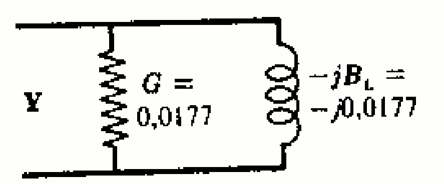
**Impedancia equivalente**

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{120\angle 30^\circ}{3\angle -15^\circ} = 40\angle 45^\circ = 28{,}3 + j28{,}3$$

**Admitancia equivalente**

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{3\angle -15^\circ}{120\angle 30^\circ} = 0{,}025\angle -45^\circ = 0{,}0177 - j0{,}0177$$

Z 28,3 j28,3




**6-14** Hallar $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$ en el circuito serie-paralelo de la Figura 6-30.

Calculemos, en primer lugar, la admitancia equivalente de las tres ramas en paralelo y luego la impedancia correspondiente.

$$\mathbf{Y}_{p_{eq}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{5\angle -53{,}1^\circ}$$

con lo que $= 0{,}32 - j0{,}34 = 0{,}467\angle -46{,}7^\circ$

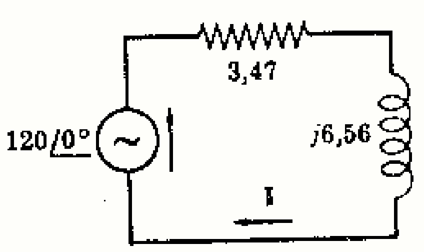
$$\mathbf{Z}_{p_{eq}} = 1/\mathbf{Y}_{p_{eq}} = 2{,}14\angle 46{,}7^\circ = 1{,}47 + j1{,}56$$

Fig. 6-30 (2, j5, 5, j2, 3, −j4)

Por tanto, $\mathbf{Z}_{eq} = (2 + j5) + (1{,}47 + j1{,}56) = 3{,}47 + j6{,}56 = 7{,}42\angle 62{,}1^\circ$

$$\mathbf{Y}_{eq} = 1/(7{,}42\angle 62{,}1^\circ) = 0{,}135\angle -62{,}1^\circ = 0{,}063 - j0{,}119$$

**6-15** Obtener dos circuitos equivalentes al circuito serie-paralelo del Problema 6-14 con $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$, respectivamente. Hallar las intensidades de corriente que circulan por ellos al aplicarles una tensión $\mathbf{V} = 120\angle 0^\circ$ a cada uno.



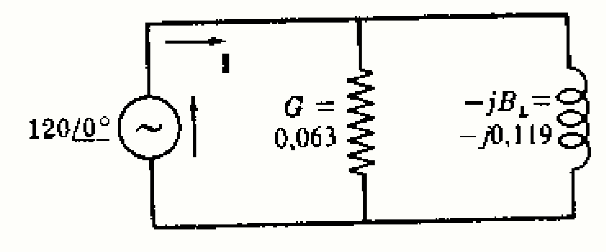




Fig. 6-31

(*a*) $\mathbf{Z} = 7{,}42\angle 62{,}1^\circ$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\angle 0^\circ}{7{,}42\angle 62{,}1^\circ} = 16{,}2\angle -62{,}1^\circ$$

(*b*) $\mathbf{Y} = 0{,}135\angle -62{,}1^\circ$

$$\mathbf{I} = \mathbf{VY} = (120\angle 0^\circ)(0{,}135\angle -62{,}1^\circ) = 16{,}2\angle -62{,}1^\circ$$

**6-16** Las constantes de una bobina son $R_s$ y $L_s$ en serie. Hallar las constantes equivalentes en paralelo $R_p$ y $L_p$, en función de $R_s$ y $L_s$.

Como la admitancia de los dos circuitos equivalentes de la Figura 6-32 es la misma,

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_s \quad \text{o} \quad \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2}$$

Igualando las partes real e imaginaria de las dos admitancias,

$$\frac{1}{R_p} = \frac{R_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{-j\omega L_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2}$$

de donde $R_p = R_s + (\omega L_s)^2/R_s$ y $L_p = L_s + R_s^2/\omega^2 L_s$.

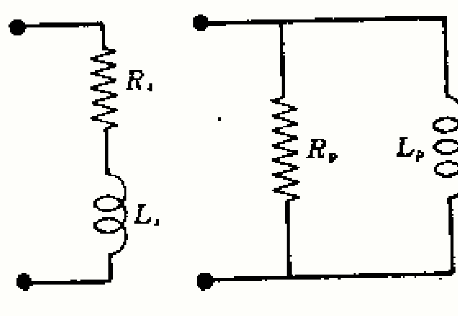



Fig. 6-32

**6-17** Hallar la impedancia equivalente del circuito serie-paralelo representado en la Figura 6-33.

$$Z_{eq} = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)R_3}{R_2 + R_3 + j\omega L} = R_1 + \frac{(R_2R_3 + j\omega LR_3)[(R_2+R_3) - j\omega L]}{(R_2+R_3)^2 + (\omega L)^2}$$

$$= R_1 + \frac{R_2R_3(R_2+R_3) + \omega^2L^2R_3 + j\omega LR_3(R_2+R_3) - j\omega L(R_2R_3)}{(R_2+R_3)^2+(\omega L)^2}$$

$$= \left[R_1 + \frac{R_3(R_2^2 + R_2R_3 + \omega^2L^2)}{(R_2+R_3)^2 + (\omega L)^2}\right] + j\left[\frac{\omega LR_3^2}{(R_2+R_3)^2+(\omega L)^2}\right]$$

$$= R_{eq} + j\omega L_{eq}$$

Fig. 6-33

**6-18** En el circuito paralelo de la Fig. 6-34 la primera rama contiene dos resistencias iguales $R$ en serie y la segunda se compone de una resistencia $R_1$ en serie con una bobina de autoinducción $L$ variable. Obtener la variación de tensión entre los puntos $A$ y $B$ al variar el valor de $L$.

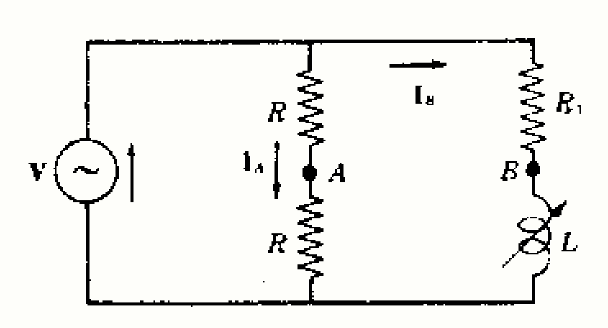


Fig. 6-34

En la primera rama la intensidad $\mathbf{I}_A = \mathbf{V}/2R$ y la tensión en cada resistencia es $R\mathbf{I}_A = \frac{1}{2}\mathbf{V}$.

En la segunda rama, la intensidad es

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}/(R_1 + j\omega L)$$

y la tensión en la bobina,

$$\mathbf{I}_B j\omega L = \frac{\mathbf{V}}{(R_1 + j\omega L)}(j\omega L)$$

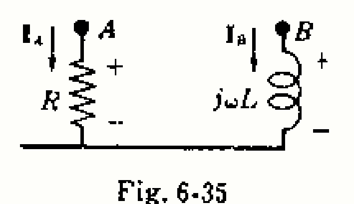


Fig. 6-35

Teniendo en cuenta las polaridades que se indican en la Fig. 6-35,

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_A R - \mathbf{I}_B(j\omega L) = \tfrac{1}{2}\mathbf{V} - \frac{\mathbf{V}}{(R_1 + j\omega L)}(j\omega L)$$

Racionalizando el segundo término de la expresión anterior y separando las partes real e imaginaria resulta

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2L^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right) - j\left(\frac{\omega LR_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right)\right]$$

La expresión entre corchetes es un número complejo que, en forma polar, tendrá un módulo $r$ y una fase $\phi$.

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2L^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega LR_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\phi = \text{arc tg}\,\frac{-\omega LR_1/[R_1^2 + (\omega L)^2]}{\frac{1}{2} - \omega^2L^2/[R_1^2 + (\omega L)^2]} = \text{arc tg}\,\frac{-2\omega LR_1}{R_1^2 - (\omega L)^2} = \text{arc tg}\,\frac{-2(\omega L/R_1)}{1 - (\omega L/R_1)^2}$$

Así, pues, el módulo de $\mathbf{V}_{AB}$ es constante, es decir, $V_{AB} = \frac{1}{2}V$; ahora bien, como $\text{tg}\,2x = (2\,\text{tg}\,x)/(1 - \text{tg}^2\,x)$ y $\omega L/R = \text{tg}\,\theta$, $\phi = -2\theta$, siendo $\theta$ el ángulo de la impedancia compleja de la segunda rama.

**6-19** En el circuito de la Fig. 6-36 existen dos mallas activas unidas por una resistencia de 10 ohmios. Hallar la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$.

De la Fig. 6-36 se deduce

$$\mathbf{I}_A = \frac{10\angle 30^\circ}{3 - j4} = \frac{10\angle 30^\circ}{5\angle -53{,}1^\circ} = 2\angle 83{,}1^\circ$$

e

$$\mathbf{I}_B = \frac{10\angle 0^\circ}{3 + j4} = \frac{10\angle 0^\circ}{5\angle 53{,}1^\circ} = 2\angle -53{,}1^\circ$$

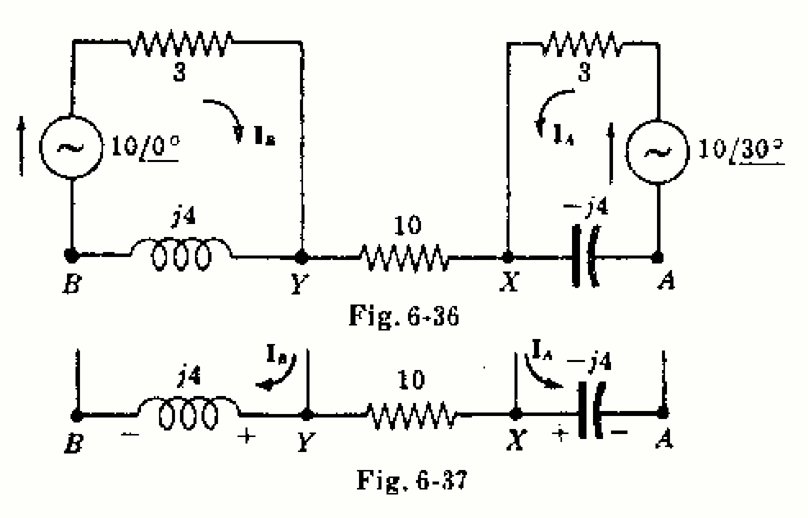


Fig. 6-36

Fig. 6-37

Para calcular $\mathbf{V}_{AB}$ necesitamos conocer las polaridades de las tensiones en los elementos como indica la Fig. 6-37. En estas condiciones,

$$\mathbf{V}_{AX} = (-j4)(-\mathbf{I}_A) = (-j4)(-2\angle 83{,}1^\circ) = -8\angle -6{,}9^\circ = -7{,}94 + j0{,}96$$

$$\mathbf{V}_{XY} = 0 \quad \text{(no circula corriente por la resistencia de 10 } \Omega)$$

$$\mathbf{V}_{YB} = (j4)(\mathbf{I}_B) = (j4)(2\angle -53{,}1^\circ) = 8\angle 36{,}9^\circ = \quad 6{,}4 \ + j4{,}8$$

Por consiguiente, $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AX} + \mathbf{V}_{XY} + \mathbf{V}_{YB} = -1{,}54 + j5{,}76 = 5{,}95\angle 105^\circ$

**6-20** La intensidad de corriente total que circula por el circuito de la Fig. 6-38 es $\mathbf{I}_T = 18\angle 45^\circ$ amperios. Calcular la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$.

Fig. 6-38

De la Fig. 6-38 se deduce

$$\mathbf{I}_A = \left(\frac{\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B}\right)\mathbf{I}_T = \left(\frac{j8}{30 + j8}\right)(18\angle 45^\circ) = 4{,}66\angle 120^\circ$$

e

$$\mathbf{I}_B = \left(\frac{\mathbf{Z}_A}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B}\right)\mathbf{I}_T = \left(\frac{30}{30 + j8}\right)(18\angle 45^\circ) = 17{,}5\angle 30^\circ$$

Las tensiones en la resistencia de 20 Ω y en la reactancia $j6$ son $\mathbf{V}_{20} = (20)\mathbf{I}_A = 93{,}2\angle 120^\circ$ y $\mathbf{V}_{j6} = (j6)\mathbf{I}_B = 105\angle 120^\circ$, respectivamente.

La Fig. 6-39 permite sumar las tensiones con las polaridades correctas, es decir,

$$\mathbf{V}_{AB} = (93{,}2\angle 120^\circ) - (105\angle 120^\circ) = 11{,}8\angle -60^\circ$$

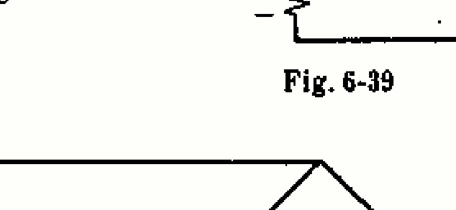



Fig. 6-39

**6-21** Hallar la impedancia equivalente entre los puntos $A$ y $B$ del circuito en puente de la Figura 6-40.

La asociación en paralelo de $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_4$ está en serie con la asociación en paralelo de $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{eq} &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4} + \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \\ &= \frac{500(2000\angle -30^\circ)}{500 + 2000\angle -30^\circ} + \frac{250\angle 30^\circ(1000)}{250\angle 30^\circ + 1000} \\ &= 596\angle 4{,}05^\circ\end{aligned}$$

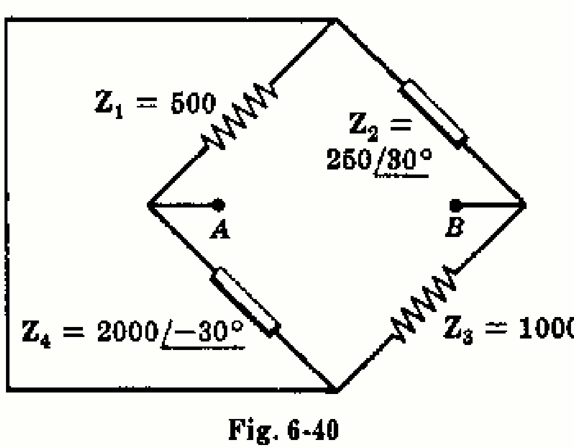



Fig. 6-40

# Problemas propuestos

**6-22** En el circuito serie de la Fig. 6-41 hallar las caídas de tensión en bornes de cada impedancia. Demostrar, mediante el diagrama fasorial correspondiente, que la suma $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$ es igual a la tensión aplicada $\mathbf{V} = 100\angle 0^\circ$ voltios.
*Sol.* $31{,}4\angle 20{,}8^\circ$ V; $25{,}1\angle 50{,}8^\circ$ V; $62{,}9\angle -29{,}2^\circ$ V.

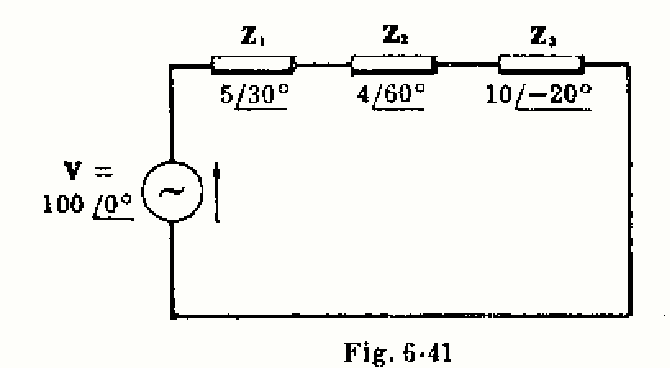



Fig. 6-41

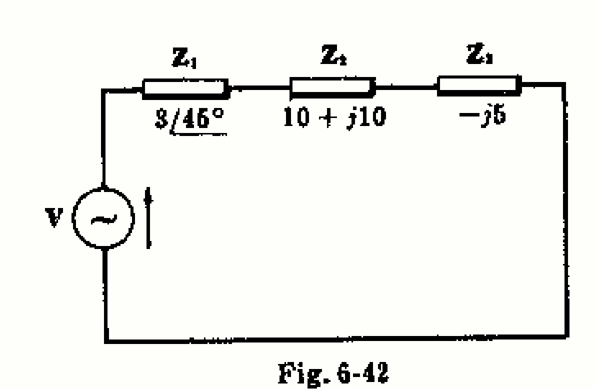



Fig. 6-42

**6-23** En el circuito serie de la Fig. 6-42 hallar la tensión aplicada $\mathbf{V}$ sabiendo que la caída de tensión en $\mathbf{Z}_1$ es $27\angle -10^\circ$ voltios. *Sol.* $126{,}5\angle -24{,}6^\circ$ V.

**6-24** Tres impedancias $\mathbf{Z}_1 = 5 + j5$, $\mathbf{Z}_2 = -j8$ y $\mathbf{Z}_3 = 4$ ohmios están en serie con una fuente de tensión desconocida **V**. Hallar los valores de **I** y de **V** sabiendo que la caída de tensión en $\mathbf{Z}_3$ es $63{,}2/\underline{18{,}45°}$ voltios.
*Sol.* $\mathbf{I} = 15{,}8/\underline{18{,}45°}$ A; $\mathbf{V} = 150/\underline{0°}$ V.

**6-25** Una fuente de tensión $\mathbf{V} = 25/\underline{180°}$ voltios se conecta a un circuito serie compuesto por una resistencia $R$ fija y una reactancia $X_L$ variable. Para un cierto valor de esta reactancia inductiva resulta una corriente $\mathbf{I} = 11{,}15/\underline{153{,}4°}$ amperios. En estas condiciones, se ajusta $X_L$ para que el retraso de la intensidad respecto de la tensión sea de 60°. ¿Cuál es el valor eficaz de la intensidad de corriente? *Sol.* 6,25 A.

**6-26** En el circuito serie de la Fig. 6-43 la caída de tensión en la reactancia $j2$ ohmios es $\mathbf{V}_{j2} = 13{,}04/\underline{15°}$ voltios. Hallar el valor de la impedancia **Z**. *Sol.* $R = 4\ \Omega$ y $X_C = 15\ \Omega$.

**6-27** Un circuito serie está compuesto por una resistencia $R = 1$ ohmio, una reactancia inductiva $jX_L = j4$ ohmios y una tercera impedancia **Z**. Sabiendo que la tensión aplicada y la intensidad de corriente resultante son $\mathbf{V} = 50/\underline{45°}$ voltios e $\mathbf{I} = 11{,}2/\underline{108{,}4°}$ amperios, respectivamente, determinar el valor de la impedancia desconocida **Z**. *Sol.* $\mathbf{Z} = 1 - j8\ \Omega$.

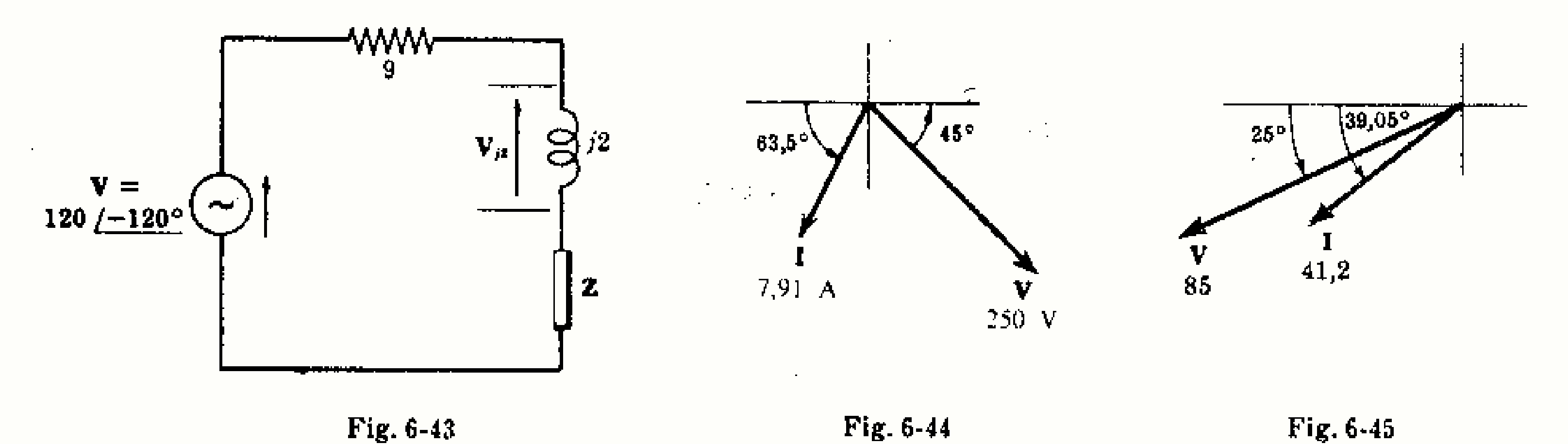



Fig. 6-43 Fig. 6-44 Fig. 6-45

**6-28** Un circuito serie de tres elementos contiene una bobina de autoinducción $L = 0{,}02$ henrios. La tensión aplicada y la intensidad de corriente resultante se muestran en el diagrama fasorial de la Fig. 6-44. Sabiendo que $\omega = 500$ radianes/segundo, determinar los otros dos elementos del circuito. *Sol.* $R = 10\ \Omega$; $L = 0{,}04$ H.

**6-29** Hallar la impedancia **Z** y la admitancia **Y** correspondiente al diagrama fasorial de la Figura 6-45.
*Sol.* $\mathbf{Z} = 2 - j0{,}5\ \Omega$; $\mathbf{Y} = 0{,}47 + j0{,}1175$ ℧.

**6-30** Para determinar las constantes $R$ y $L$ de una bobina se conecta en serie con una resistencia de 25 ohmios y al conjunto se aplica una fuente de tensión de 120 voltios a 60 hertzios; se miden las tensiones en bornes de la resistencia y en la bobina dando los valores $V_R = 70{,}8$ voltios y $V_{\text{bobina}} = 86$ voltios. ¿Cuáles son las constantes de la bobina en cuestión? *Sol.* $R = 5\ \Omega$; $L = 79{,}6$ mH.

**6-31** Una asociación serie $RC$ se conecta en serie con una resistencia de 15 ohmios. Al aplicar al circuito total una fuente de tensión de 120 voltios a 60 hertzios las tensiones eficaces en la combinación $RC$ y en la resistencia pura son 87,3 y 63,6 voltios, respectivamente. Determinar los valores de $R$ y de $C$.
*Sol.* $R = 5\ \Omega$; $C = 132{,}5\ \mu$F.

**6-32** Hallar la impedancia y la admitancia equivalente, $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$, en el circuito de dos ramas en paralelo de la Figura 6-46. Deducir la intensidad de corriente en cada circuito equivalente.
*Sol.* $\mathbf{Z}_{eq} = 18{,}6/\underline{7{,}15°}\ \Omega$; $\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}0538/\underline{-7{,}15°}$ ℧; $\mathbf{I}_T = 10{,}75/\underline{-7{,}15°}$ A.

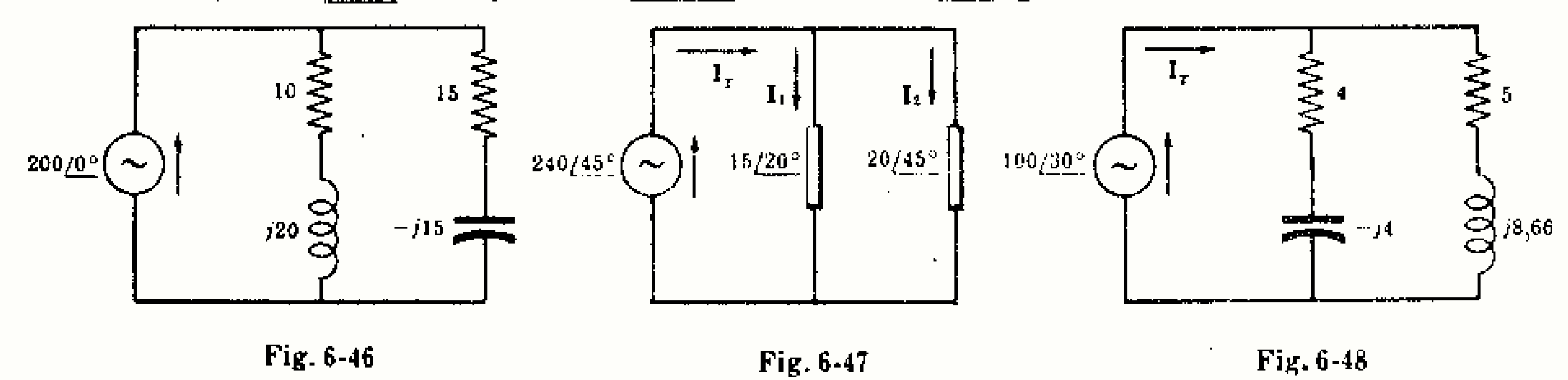



Fig. 6-46 Fig. 6-47 Fig. 6-48

**6-33** En el circuito paralelo de la Fig. 6-47 hallar las intensidades de corrientes en cada rama así como la intensidad total. Construir el diagrama fasorial de corrientes con $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_T$.
*Sol.* $16/\underline{25°}$ A; $12/\underline{0°}$ A; $27{,}4/\underline{14{,}3°}$ A.

**6-34** Hallar el valor de la intensidad total que circula por el circuito de dos ramas en paralelo de la Fig. 6-48. Obtener $\mathbf{Z}_{eq}$ a partir de la relación $\mathbf{V}/\mathbf{I}_T$ y comparar este valor con $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$.
*Sol.* $\mathbf{I}_T = 17{,}9\underline{/42{,}4^\circ}$ A; $\mathbf{Z}_{eq} = 5{,}59\underline{/-12{,}4^\circ}\ \Omega$.

**6-35** El diagrama fasorial de la Fig. 6-49 corresponde a un circuito de dos ramas en paralelo. Hallar las impedancias de cada rama $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$. *Sol.* $\mathbf{Z}_1 = 2{,}5 + j20\ \Omega$; $\mathbf{Z}_2 = 15\underline{/-90^\circ}\ \Omega$.

**6-36** En el diagrama fasorial de la Fig. 6-50 se representan la tensión aplicada a un circuito de dos ramas en paralelo y las intensidades que circulan por cada rama. Calcular las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ de dichas ramas.
*Sol.* $\mathbf{Z}_1 = 11{,}55 - j20\ \Omega$; $\mathbf{Z}_2 = 27{,}6 + j11{,}75\ \Omega$.

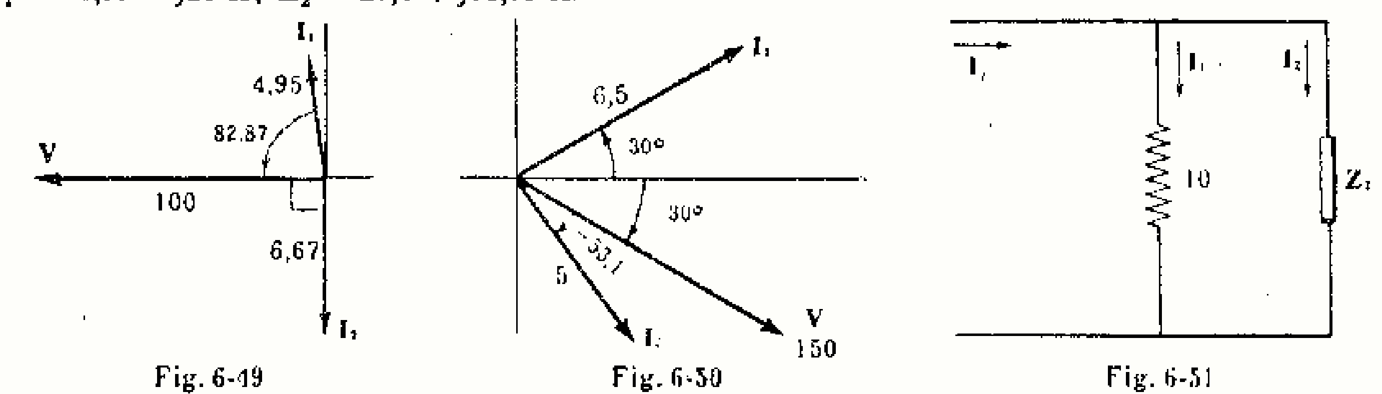


Fig. 6-49 Fig. 6-50 Fig. 6-51

**6-37** En el circuito de la Fig. 6-51 determinar el valor de $\mathbf{Z}_2$ sabiendo que $\mathbf{I}_1 = 2\underline{/-30^\circ}$ e $\mathbf{I}_T = 4{,}47\underline{/33{,}4^\circ}$ amperios.
*Sol.* $\mathbf{Z}_2 = -j5\ \Omega$.

**6-38** Mediante el empleo de las admitancias hallar la admitancia y la impedancia equivalente, $\mathbf{Y}_{eq}$ y $\mathbf{Z}_{eq}$, del circuito de cuatro ramas en paralelo representado en la Fig. 6-52. Obtener la intensidad $\mathbf{I}_T$ del circuito equivalente.
*Sol.* $\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}22\underline{/-58^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{Z}_{eq} = 4{,}55\underline{/58^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}_T = 33\underline{/-13^\circ}$ A.

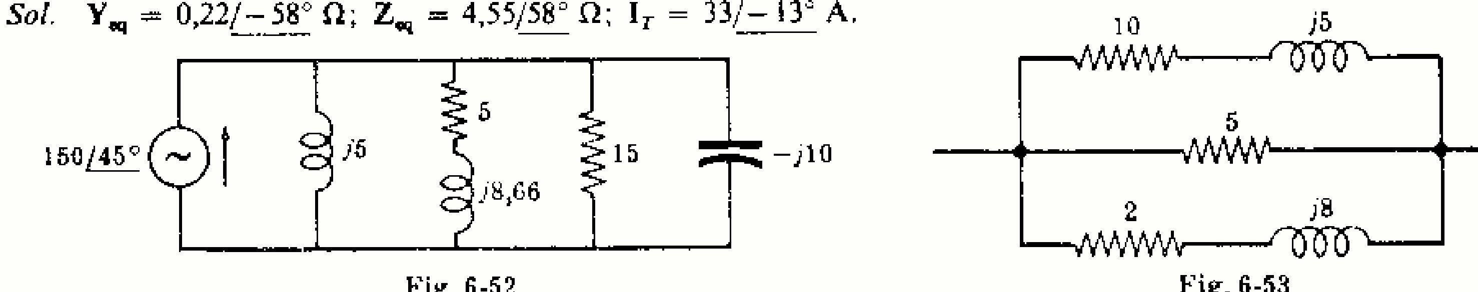


Fig. 6-52 Fig. 6-53

**6-39** Hallar la impedancia y admitancia equivalente, $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$, en el circuito de tres ramas en paralelo representado en la Figura 6-53. *Sol.* $\mathbf{Z}_{eq} = 2{,}87\underline{/27^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}348\underline{/-27^\circ}$ ℧.

**6-40** En el circuito de la Fig. 6-54 hallar el valor de $\mathbf{Z}$ sabiendo que $\mathbf{V} = 50\underline{/30^\circ}$ voltios e $\mathbf{I}_T = 27{,}9\underline{/57{,}8^\circ}$ amperios.
*Sol.* $\mathbf{Z} = 5\underline{/-30^\circ}\ \Omega$.

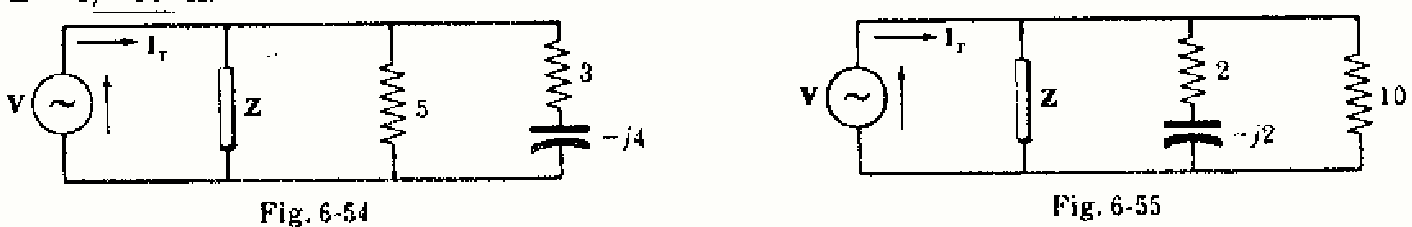


Fig. 6-54 Fig. 6-55

**6-41** En el circuito de la Fig. 6-55 hallar el valor de $\mathbf{Z}$ sabiendo que $\mathbf{V} = 100\underline{/90^\circ}$ voltios e $\mathbf{I}_T = 50{,}2\underline{/102{,}5^\circ}$ amperios. *Sol.* $\mathbf{Z} = 5\underline{/45^\circ}\ \Omega$.

**6-42** A una asociación serie $RC$ en paralelo con una resistencia de 20 ohmios se le aplica una fuente de tensión a 60 hertzios que suministra una intensidad de corriente total de 7,02 amperios. La intensidad de corriente por la resistencia de 20 ohmios es de 6 amperios y la correspondiente por la rama $RC$ es 2,3 amperios. Hallar los valores de $R$ y de $C$. *Sol.* $R = 15\ \Omega$; $C = 53{,}1\ \mu$F.

**6-43** Hallar los valores de $R$ y $X_L$ en el circuito de la Fig. 6-56 sabiendo que el valor eficaz de la intensidad de corriente total vale 29,9 amperios, el de la intensidad que circula por la resistencia pura es 8 amperios y la correspondiente por la rama $RL$ es 22,3 amperios. *Sol.* $R = 5{,}8\ \Omega$; $X_L = 14{,}5\ \Omega$.

**6-44** Hallar la tensión $\mathbf{V}_{AB}$ en el circuito de la Figura 6-57. *Sol.* $28{,}52\underline{/183{,}68^\circ}$ V.

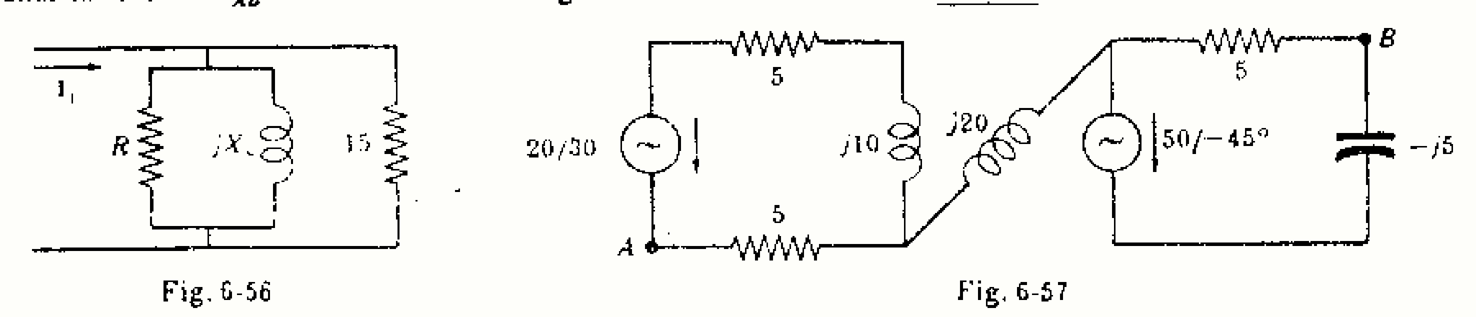


Fig. 6-56 Fig. 6-57

**6-45** La lectura de un voltímetro en bornes de la resistencia de 3 ohmios del circuito de la Fig. 6-58 es 45 voltios. ¿Qué valor indicará el amperímetro? *Sol.* 19,4 A.

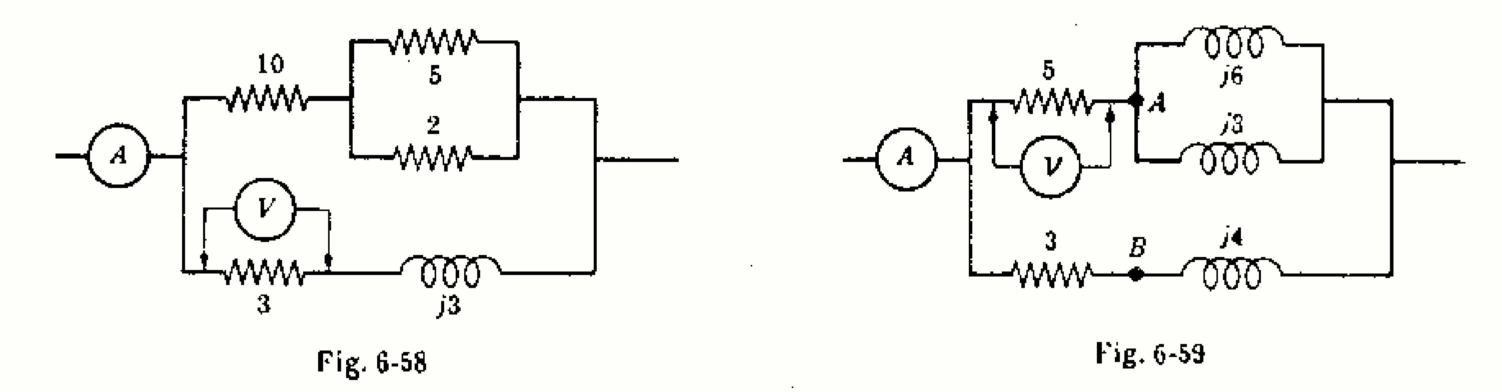



Fig. 6-58 Fig. 6-59

**6-46** La lectura de un voltímetro en bornes de la resistencia de 5 ohmios del circuito de la Fig. 6-59 es 45 voltios. ¿Qué valor indicará el amperímetro? *Sol.* 18 A.

**6-47** Hallar el valor eficaz de la tensión entre los puntos $A$ y $B$ del circuito del Problema 6-46 *Sol.* 25,2 V.

**6-48** La tensión eficaz entre los puntos $A$ y $B$ del circuito de la Fig. 6-60 vale 25 voltios. Hallar los valores eficaces de $\mathbf{V}$ y de $\mathbf{I}_T$. *Ind.* Suponer aplicada una tensión cualquiera $\mathbf{V}'$ y determinar la tensión $\mathbf{V}'_{AB}$ correspondiente. De ello se deduce $V/25 = V'/V'_{AB}$. *Sol.* 54,3 V; 14,2 A.

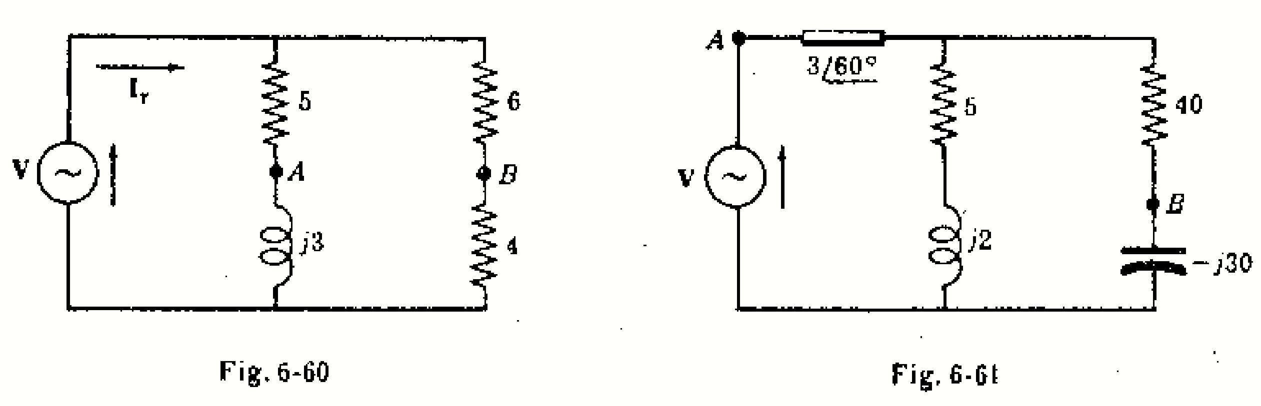



Fig. 6-60 Fig. 6-61

**6-49** En el circuito paralelo de la Fig. 6-61 hallar el valor eficaz de la tensión de la fuente sabiendo que la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$ vale 50 voltios. *Sol.* 54,6 V.

**6-50** En el circuito de la Fig. 6-62 dar valores arbitrarios a $R$ y $X_L$. Demostrar que para cualquier par de valores de $R$ y $X_L$ el valor eficaz de $\mathbf{V}_{AB}$ es constante e igual a 50 voltios.

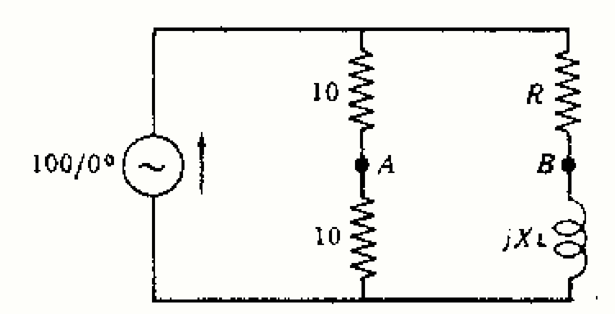



Fig. 6-62

# Capítulo 7

# Potencia eléctrica y factor de potencia

## INTRODUCCION

En muchos dispositivos eléctricos uno de los parámetros que más interesa es el de la potencia. Por ejemplo, es importante conocer la potencia suministrada por un alternador, la potencia consumida por un motor eléctrico, la potencia emitida por una emisora de radio o televisión, etc.

La tensión aplicada al circuito de elementos pasivos de la Fig. 7-1 es una función del tiempo. La intensidad que resulta es, igualmente, una función del tiempo cuyo valor depende de los elementos que integren dicho circuito. El producto, en cada instante, de la tensión por la intensidad se llama potencia instantánea y viene dada por

$$p = vi$$

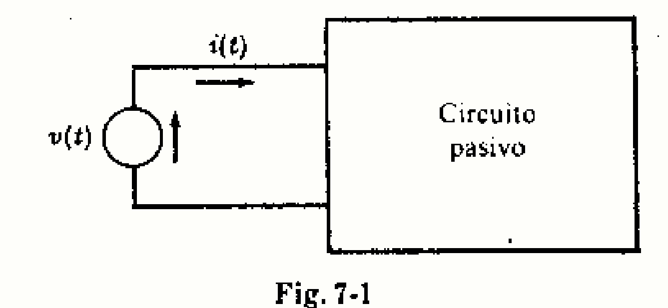



Fig. 7-1

La potencia $p$ puede tomar valores positivos o negativos, según el instante o el intervalo de tiempo que se considere. Una potencia $p$ positiva significa una transferencia de energía de la fuente a la red, mientras que una potencia $p$ negativa corresponde a una transferencia de energía de la red a la fuente.

## POTENCIA EN REGIMEN PERMANENTE SENOIDAL: POTENCIA ACTIVA ($P$)

Consideremos el caso ideal en que el circuito pasivo contenga, exclusivamente, un elemento inductivo al que se le aplica una tensión senoidal de la forma $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$. La intensidad de corriente que circula es de la forma $i = I_m \operatorname{sen} (\omega t - \pi/2)$. El valor de la potencia instantánea es

$$p = vi = V_m I_m (\operatorname{sen} \omega t)(\operatorname{sen} \omega t - \pi/2)$$

Como $\operatorname{sen} (\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t$ y $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, podremos escribir

$$p = -\tfrac{1}{2} V_m I_m \operatorname{sen} 2\omega t$$

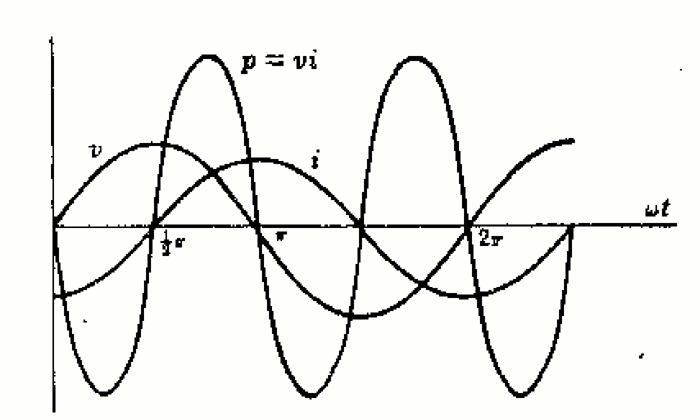



Fig. 7-2. Circuito de una bobina pura $L$

En la Fig. 7-2 se pone de manifiesto este hecho. Cuando $v$ e $i$ son positivos, la potencia $p$ es positiva, por lo que existirá una transferencia de energía de la fuente a la bobina. Cuando $v$ e $i$ son de signo contrario, la potencia es negativa, y la bobina devuelve a la fuente la energía que antes le había suministrado. La frecuencia de la potencia es el doble que la correspondiente a la tensión o la corriente. El valor medio de la potencia, que representaremos por $P$, en un ciclo o periodo completo es cero.

En el caso ideal, también, de que el circuito estuviese formado por un condensador puro de capacidad $C$ obtendríamos resultados análogos, como puede apreciarse en la Figura 7-3.

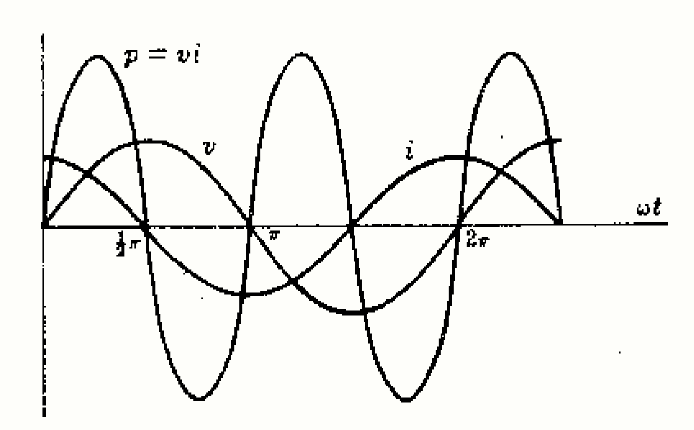



Fig. 7-3. Circuito de un condensador puro $C$

Apliquemos ahora una tensión $v = V_m$ sen $\omega t$ a un circuito constituido por una sola resistencia. La intensidad de corriente que circula por ella es $i = I_m$ sen $\omega t$ y la potencia correspondiente

$$p = vi = V_m I_m \text{ sen}^2\, \omega t$$

Ahora bien, $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, con lo cual

$$p = \tfrac{1}{2}V_m I_m(1 - \cos 2\omega t)$$

resultado que se puede observar en la Fig. 7-4. En este caso vemos que la frecuencia de la potencia es también el doble de la correspondiente a la tensión o a la corriente. Además, la potencia es siempre positiva y varía desde cero a un valor máximo $V_m I_m$. El valor medio de la potencia es $\frac{1}{2}V_m I_m$.

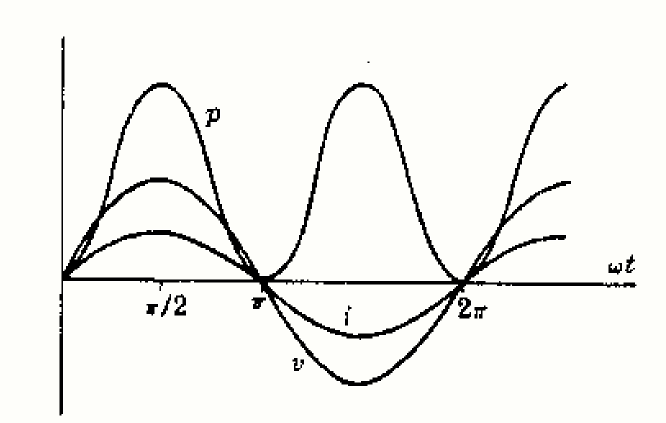



Fig. 7-4. Circuito de una resistencia pura $R$

Finalmente, consideremos el caso de un circuito pasivo general. Aplicando una tensión senoidal $v = V_m$ sen $\omega t$, circula una corriente de intensidad $i = I_m$ sen $(\omega t + \theta)$. El ángulo de fase $\theta$ será positivo o negativo, según el carácter inductivo o capacitivo, respectivamente, del circuito. La potencia instantánea es

$$p = vi = V_m I_m \text{ sen } \omega t \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

Ahora bien, sen $\alpha$ sen $\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ y $\cos -\alpha = \cos \alpha$, con lo cual

$$p = \tfrac{1}{2}V_m I_m[\cos\theta - \cos(2\omega t + \theta)]$$

La potencia instantánea $p$ consta de un término cosenoidal, $-\frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta)$, cuyo valor medio es cero, y de un término constante, $\frac{1}{2}V_m I_m \cos\theta$. En estas condiciones, el valor medio de $p$ o potencia activa $P$ es

$$P = \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos\theta = VI\cos\theta$$

en donde $V = V_m/\sqrt{2}$ e $I = I_m/\sqrt{2}$ son los valores eficaces de los fasores **V** e **I**, respectivamente. El término $\cos\theta$ se llama *factor de potencia* (f.p.). El ángulo $\theta$ es el que forman **V** e **I** y está siempre comprendido entre $\pm 90°$. De aquí se deduce que $\cos\theta$ y, por tanto, $P$, es siempre positivo. Sin embargo, para indicar el signo de $\theta$ diremos que un *circuito inductivo*, en el que la intensidad de corriente está retrasada respecto de la tensión, tiene un *factor de potencia en retraso*. Un *circuito capacitivo*, como la corriente está adelantada respecto de la tensión, tiene un *factor de potencia en adelanto*.

La potencia activa $P$ también se puede deducir de la expresión de definición de la potencia media $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p\,dt$.

La unidad de potencia activa en el sistema mksa es el vatio (W); como múltiplo se emplea el kilovatio (kW), de manera que 1 kW = 1000 W.

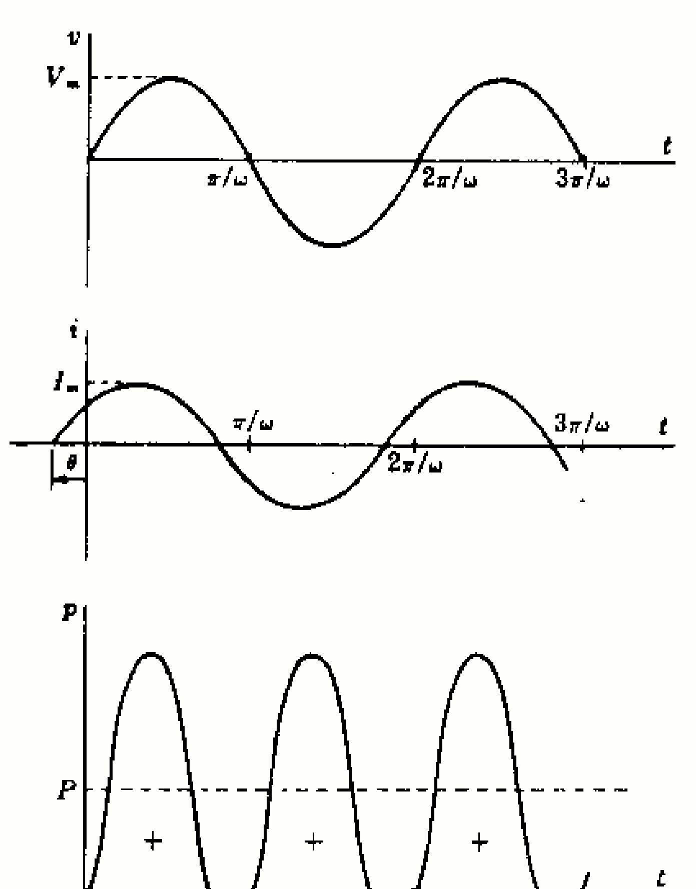



Fig. 7-5

## POTENCIA APARENTE ($S$)

El producto $VI$ se llama *potencia aparente* y se representa por la letra mayúscula $S$.

La unidad de $S$ en el sistema mksa es el voltio-amperio (VA), y su múltiplo más empleado es el kilovoltio-amperio (kVA), siendo 1 kVA = 1000 VA.

## POTENCIA REACTIVA ($Q$)

El producto $VI$ sen $\theta$ se llama *potencia reactiva* y se representa por la letra mayúscula $Q$.

La unidad de $Q$ en el sistema mksa es el voltio-amperio reactivo (VAR), y su múltiplo más empleado es el kilovoltio-amperio reactivo (kVAR), siendo 1 kVAR = 1000 VAR.

## TRIANGULO DE POTENCIAS

Las expresiones de las potencias activa, aparente y reactiva se pueden representar geométricamente mediante los lados de un triángulo que se llama *triángulo de potencias*.

Sea un circuito inductivo y representemos el retraso de la intensidad de corriente como indica la Fig. 7-6(*a*), esto es, tomando la tensión **V** como referencia. En la Fig. 7-6(*b*) está representada la intensidad de corriente con sus componentes activa y reactiva. La componente activa está en fase con la tensión **V** y la componente reactiva está en cuadratura con **V**, es decir, defasada 90° en retraso. Este diagrama se repite en la Fig. 7-6(*c*), en donde **I**, $I \cos \theta$ e $I$ sen $\theta$ están multiplicados por la tensión eficaz **V**. En este caso:

Potencia activa $P$ = tensión × componente activa (en fase) de la intensidad = $VI \cos \theta$

Potencia aparente $S$ = tensión × intensidad = $VI$

Potencia reactiva $Q$ = tensión × componente reactiva (en cuadratura) de la intensidad = $VI$ sen $\theta$

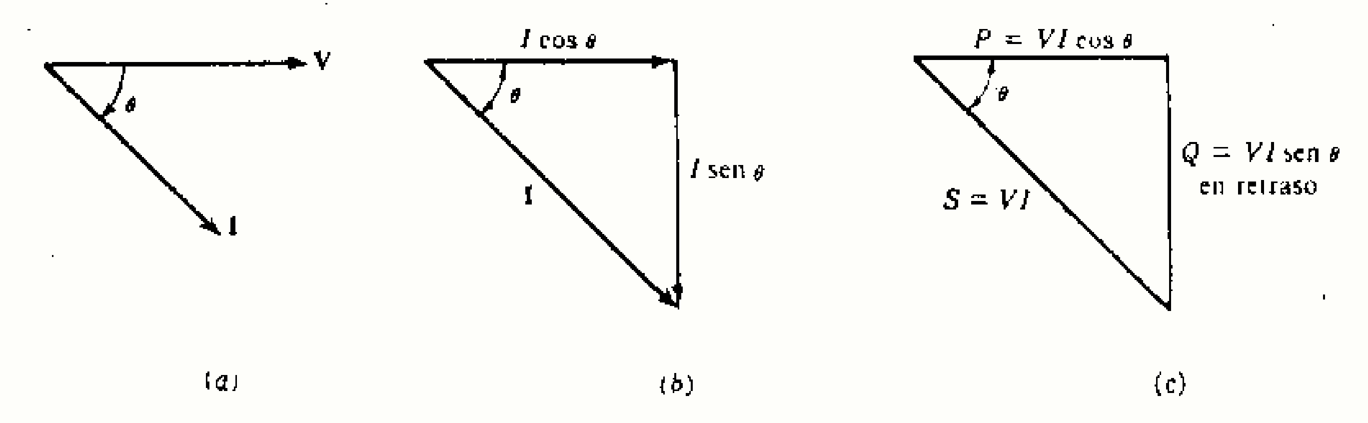



**Fig. 7-6. Triángulo de potencias: Carga inductiva**

Con un procedimiento análogo se construyen los diagramas de la Fig. 7-7. El triángulo de potencias para una carga capacitiva tiene la componente $Q$ por encima de la horizontal.

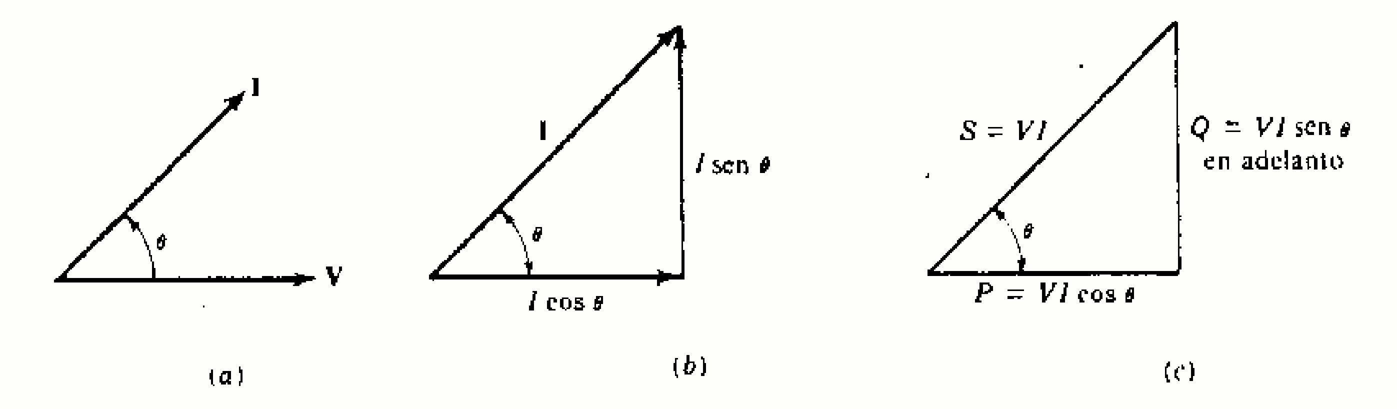



**Fig. 7-7. Triángulo de potencias: Carga capacitiva**

## POTENCIA COMPLEJA

Los tres lados $S$, $P$ y $Q$ del triángulo de potencias se deducen del producto $\mathbf{VI}^*$ de la tensión por el complejo conjugado de la intensidad. El resultado de este producto es un número complejo que se llama *potencia compleja* **S**. Su parte real es la potencia activa $P$ y su parte imaginaria es la potencia reactiva $Q$.

Sean $\mathbf{V} = Ve^{j\alpha}$ e $\mathbf{I} = Ie^{j(\alpha+\theta)}$. Entonces,

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = Ve^{j\alpha}Ie^{-j(\alpha+\theta)} = VIe^{-j\theta} = VI\cos\theta - jVI\,\text{sen}\,\theta = P - jQ$$

El módulo de **S** es la potencia aparente $S = VI$. Un ángulo de fase en adelanto (**I** adelantada respecto de **V**) implica una potencia reactiva ($Q$) en adelanto, mientras que un ángulo de fase en retraso quiere decir una potencia reactiva $Q$ en retraso. Este hecho debe tenerse muy presente al construir el triángulo de potencias.

A continuación haremos un resumen de las ecuaciones a emplear para hallar las componentes del triángulo de potencias.

$$\text{Potencia activa } P = VI\cos\theta = RI^2 = V_R^2/R = \text{Re}[\mathbf{VI}^*]$$
$$\text{Potencia reactiva } Q = VI\,\text{sen}\,\theta = XI^2 = V_X^2/X = \text{Im}[\mathbf{VI}^*]$$
$$\text{Potencia aparente } S = VI = ZI^2 = V^2/Z = \text{módulo de } \mathbf{VI}^*$$
$$\text{Factor de potencia (f.p.)} = \cos\theta = R/Z = P/S$$

**Ejemplo 1.**

Trazar el triángulo de potencias de un circuito cuya impedancia es $\mathbf{Z} = 3 + j4$ ohmios y al que se le aplica un fasor tensión $\mathbf{V} = 100\underline{/30^\circ}$ voltios.

El fasor intensidad de corriente que resulta es $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (100\underline{/30^\circ})/(5\underline{/53{,}1^\circ}) = 20\underline{/-23{,}1^\circ}$ A.

*Método 1.*

$P = RI^2 = 3(20)^2 = 1200$ W
$Q = XI^2 = 1600$ VAR en retraso
$S = ZI^2 = 2000$ VA
f.p. $= \cos 53{,}1^\circ = 0{,}6$ en retraso

*Método 2.*

$S = VI = 100(20) = 2000$ VA
$P = VI\cos\theta = 2000\cos 53{,}1^\circ = 1200$ W
$Q = VI\,\text{sen}\,\theta = 2000\,\text{sen}\,53{,}1^\circ = 1600$ VAR en retraso
f.p. $= \cos\theta = \cos 53{,}1^\circ = 0{,}6$ en retraso

P = 1200 W
53,1
S = 2000 VA
Q = 1600 VAR en retraso

Fig. 7-8

*Método 3.*

$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = (100\underline{/30^\circ})(20\underline{/23{,}1^\circ}) = 2000\underline{/53{,}1^\circ} = 1200 + j1600$; por tanto,

$P = 1200$ W, $Q = 1600$ VAR en retraso, $S = 2000$ VA y f.p. $= \cos 53{,}1^\circ = 0{,}6$ en retraso

*Método 4.*

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} = 20\underline{/-23{,}1^\circ}\,(3) = 60\underline{/-23{,}1^\circ}, \quad \mathbf{V}_X = (20\underline{/-23{,}1^\circ})(4\underline{/90^\circ}) = 80\underline{/66{,}9^\circ}$$

Por tanto,

$P = V_R^2/R = 60^2/3 = 1200$ W
$Q = V_X^2/X = 80^2/4 = 1600$ VAR en retraso
$S = V^2/Z = 100^2/5 = 2000$ VA
f.p. $= P/S = 0{,}6$ en retraso

Debe tenerse un cuidado especial al sustituir valores en la ecuación $P = V_R^2/R$. El error que se comete con más frecuencia consiste en sustituir $V_R$, tensión en la resistencia únicamente, por la tensión total $V$ en la impedancia **Z**.

## CORRECCION DEL FACTOR DE POTENCIA

En las aplicaciones industriales se suele trabajar con cargas inductivas, por lo que la intensidad retrasa respecto de la tensión aplicada. La potencia activa $P$ entregada a la carga es una medida del trabajo útil por unidad de tiempo que puede realizar la carga. Esta potencia se transmite, normalmente, a través de líneas y transformadores.

Como un transformador trabaja, en general, a tensión constante, la potencia aparente en kVA da idea de la intensidad máxima permitida. Teóricamente, si se conectase una carga inductiva o capacitiva pura, el transformador podría estar trabajando a plena carga, mientras que la potencia activa (media) suministrada sería cero.

En el triángulo de potencias, la hipotenusa $S$ es una medida de la carga del sistema de distribución, y el cateto $P$ es una medida de la potencia útil suministrada. Evidentemente, interesa que $S$ se aproxime lo más posible a $P$, es decir, que el ángulo $\theta$ sea muy pequeño. Como el factor de potencia es f.p. $= \cos\theta$, valdría aproximadamente la unidad. En el caso normal de una carga inductiva es posible corregir el factor de potencia mediante condensadores en paralelo con la carga. Obsérvese que la tensión en la carga es la misma, con lo que la potencia útil $P$ tampoco varía. Al aumentar el factor de potencia la intensidad y la potencia aparente disminuyen y, por tanto, se consigue una utilización más eficiente de la potencia en el sistema o red de distribución.

**Ejemplo 2.**

En el circuito del Ejemplo 1 corregir el factor de potencia al valor 0,9, en retraso, utilizando condensadores en paralelo. Hallar el valor de la potencia aparente $S'$ después de introducir la corrección, y la potencia reactiva de los condensadores necesarios para obtener dicha corrección.

Representemos de nuevo el triángulo de potencias del Ejemplo 1. En este caso, $0{,}9 = \cos\theta'$, de donde $\theta' = 26°$ y

$$S' = P/\cos\theta' = 1200/\cos 26° = 1333$$

Ahora bien, $Q' = S' \operatorname{sen}\theta' = 1333 \operatorname{sen} 26° = 585$ VAR en retraso.

$$\text{Potencia reactiva del condensador} = Q - Q' = 1600 - 585 = 1015 \text{ VAR en adelanto}$$

Como $P$ no varía, la energía activa permanece constante después de la corrección. Sin embargo, el valor de $S$ se reduce de 2000 VA a 1333 VA.

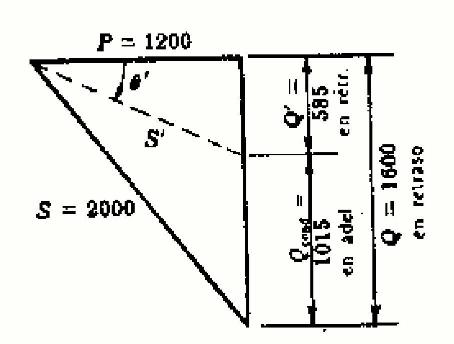



Fig. 7-9

## Problemas resueltos

**7-1** Trazar el triángulo de potencias de un circuito cuya tensión es $v = 150 \operatorname{sen}(\omega t + 10°)$ voltios y cuya intensidad viene dada por $i = 5 \operatorname{sen}(\omega t - 50°)$ amperios.

$\mathbf{V} = (150/\sqrt{2})\underline{/10°} = 106\underline{/10°}$ e $\mathbf{I} = (5/\sqrt{2})\underline{/-50°} = 3{,}54\underline{/-50°}$.

Entonces,

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = (106\underline{/10°})(3{,}54\underline{/50°}) = 375\underline{/60°} = 187{,}5 + j325$$

de donde

$$P = \operatorname{Re}[\mathbf{VI}^*] = 187{,}5 \text{ W}$$
$$Q = \operatorname{Im}[\mathbf{VI}^*] = 325 \text{ VAR en retraso}$$
$$S = |\mathbf{VI}^*| = 375 \text{ VA}$$
$$\text{f.p.} = \cos 60° = 0{,}5 \text{ en retraso}$$

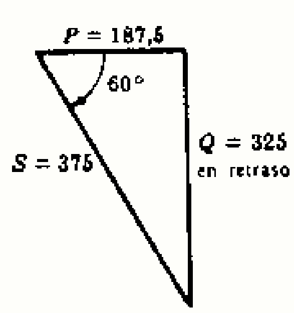



Fig. 7-10

**7-2** La potencia consumida por un circuito serie de dos elementos vale 940 vatios, siendo el factor de potencia igual a 0,707 en adelanto. Hallar las constantes del circuito sabiendo que la tensión aplicada es $v = 99 \operatorname{sen}(6000t + 30°)$ voltios.

El fasor tensión aplicado es $\mathbf{V} = (90/\sqrt{2})\underline{/30°} = 70\underline{/30°}$. De la expresión de la potencia $P = VI\cos\theta$ resulta $940 = 70I(0{,}707)$, de donde $I = 19$ A. Como el factor de potencia vale 0,707 en adelanto, el fasor intensidad de corriente está adelantado con respecto al de tensión un ángulo arc cos 0,707 = 45°. Por tanto, $\mathbf{I} = 19\underline{/75°}$ A. La impedancia del circuito es $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I} = (70\underline{/30°})/(19\underline{/75°}) = 3{,}68\underline{/-45°} = 2{,}6 - j2{,}6\ \Omega$. Ahora bien, como $\mathbf{Z} = R - jX_C$ y $X_C = 1/\omega C$, se deduce

$$R = 2{,}6\ \Omega \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{6000(2{,}6)} = 64{,}1\ \mu\text{F}$$

*Otro método.*

Sustituyendo $I = 19$ A en $P = RI^2$ resulta $940 = R(19)^2$, de donde $R = 2{,}6\ \Omega$.

Entonces, $\mathbf{Z} = Z\underline{/-45°} = 2{,}6 - jX_C$, con lo que $X_C = 2{,}6$. Por consiguiente, $C = 1/\omega X_C = 64{,}1\ \mu$F.

**7-3** Determinar el triángulo de potencias del circuito serie representado en la Figura 7-11.

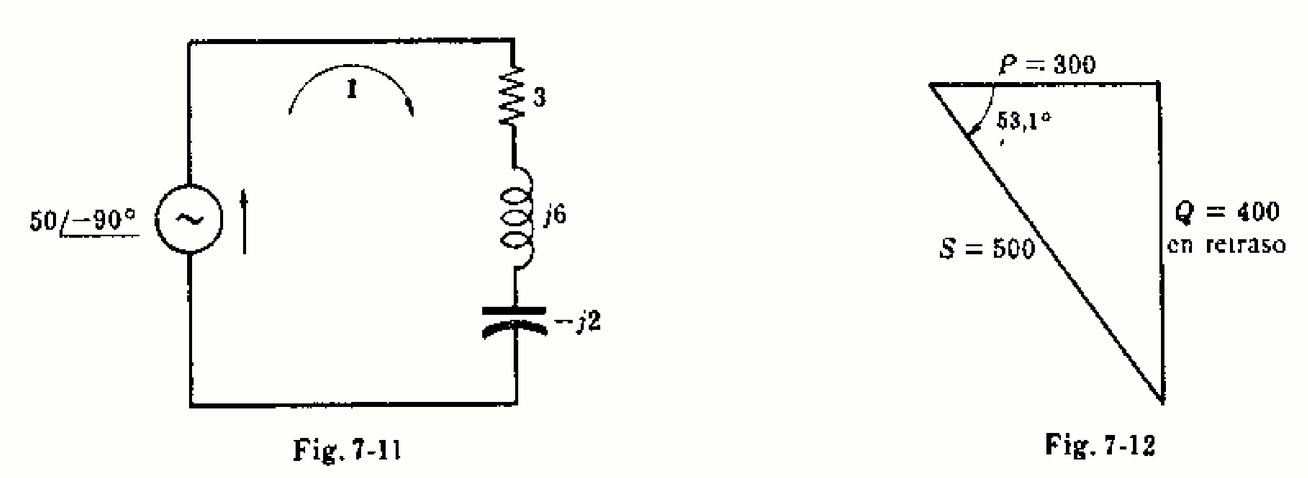



Fig. 7-11 Fig. 7-12

De la Fig. 7-11, $\mathbf{Z} = 3 + j6 - j2 = 5\underline{/53,1°}$ e $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (50\underline{/-90°})/(5\underline{/53,1°}) = 10\underline{/-143,1°}$. Entonces,

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = (50\underline{/-90°})(10\underline{/143,1°}) = 500\underline{/53,1°} = 300 + j400$$

Los lados del triángulo de potencias representado en la Fig. 7-12 son

$$P = 300 \text{ W}, \quad Q = 400 \text{ VAR en retraso}, \quad S = 500 \text{ VA, f.p.} = \cos 53,1° = 0,6 \text{ en retraso}$$

*Otro método.*

Sustituyendo el valor $I = 10$ A en las expresiones de la potencia disipada en cada elemento resulta

$P = RI^2 = 3(10)^2 = 300$ W, $Q_{j6} = 6(10)^2 = 600$ VAR en retraso, $Q_{-j2} = 2(10)^2 = 200$ VAR en adelanto y $Q = Q_{j6} + Q_{-j2} = 400$ VAR en retraso.

**7-4** En el circuito de la Fig. 7-13 el valor eficaz de la intensidad de corriente total es 30 amperios. Hallar las potencias.

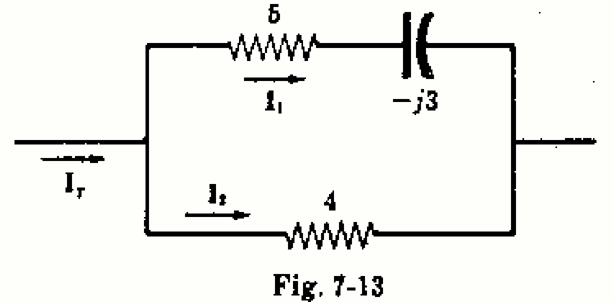



Fig. 7-13

Haciendo $\mathbf{I}_T = 30\underline{/0°}$, $\mathbf{I}_2 = 30\underline{/0°}\left(\dfrac{5 - j3}{9 - j3}\right) = 18,45\underline{/-12,55°}$ e $\mathbf{I}_1 = 30\underline{/0°}\left(\dfrac{4}{9 - j3}\right) = 12,7\underline{/18,45°}$.

Entonces,

$$P = R_4 I_2^2 + R_5 I_1^2 = (4)(18,45)^2 + (5)(12,7)^2 = 2165 \text{ W}$$

$$Q = XI_1^2 = (3)(12,7)^2 = 483 \text{ VAR en adelanto}$$

$$\mathbf{S} = P - jQ = 2165 - j483 = 2210\underline{/-12,6°}, \quad S = 2210 \text{ VA}$$

$$\text{f.p.} = P/S = 2165/2210 = 0,98 \text{ en adelanto}$$

Podemos obtener los mismos resultados calculando la impedancia equivalente $\mathbf{Z}_{eq} = \dfrac{(5 - j3)4}{9 - j3} = 2,4 - j0,533\ \Omega$. Por tanto,

$$P = RI_T^2 = (2,4)(30)^2 = 2160 \text{ W} \quad \text{y} \quad Q = (0,533)(30)^2 = 479,7 \text{ VAR en adelanto}$$

**7-5** La potencia total disipada en el circuito de la Figura 7-14 es 1100 vatios. Hallar la potencia de cada elemento y la lectura del amperímetro.

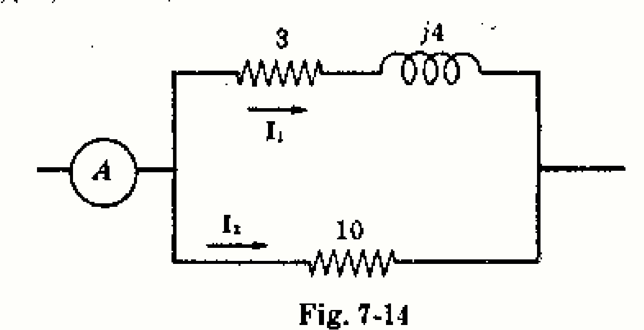



Fig. 7-14

De la Fig. 7-14 se deduce,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{V}}{3 + j4} = \frac{\mathbf{V}}{5\underline{/53,1°}}, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{V}}{10}$$

La relación de intensidades de corrientes es $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{V/5}{V/10} = \dfrac{2}{1}$. Ahora bien, como $P = RI^2$, la relación entre las potencias disipadas en las resistencias de 3 Ω y 10 Ω es

$$\frac{P_3}{P_{10}} = \frac{R_1 I_1^2}{R_2 I_2^2} = \frac{3}{10}\left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{6}{5}$$

Por otra parte, como $P_T = P_3 + P_{10}$, dividiendo ambos miembros por $P_{10}$ resulta $P_T/P_{10} = P_3/P_{10} + 1$, con lo cual,

$$P_{10} = 1100(5/11) = 500 \text{ W}, \qquad P_3 = 1100 - 500 = 600 \text{ W}$$

De la expresión $P = RI^2$ se deduce $3I_1^2 = 600$, de donde $I_1 = 14{,}14$. Tomemos $\mathbf{V} = V\underline{/0°}$; entonces

$$\mathbf{I}_1 = 14{,}14\underline{/-53{,}1°} = 8{,}48 - j11{,}31$$
$$\mathbf{I}_2 = 7{,}07\underline{/0°} = 7{,}07$$

e

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 15{,}55 - j11{,}31 = 19{,}25\underline{/-36°}$$

La lectura del amperímetro es 19,25 A.

**7-6** Determinar el triángulo de potencias de cada rama del circuito paralelo de la Fig. 7-15; obtener luego el correspondiente al circuito completo.

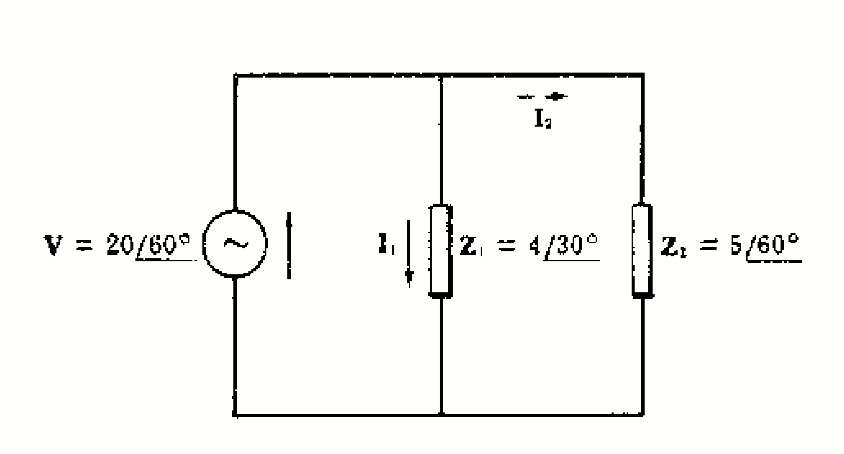



Fig. 7-15

$P_1 = 86{,}6$; 43,4; 30; $S_1$; $Q_1 = 50$ en retraso; $P_2 = 40$; 60; $S_T = 174$; $S_2$; $Q_2 = 69{,}2$ en retraso

Fig. 7-16

*Rama 1.*

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_1 = (20\underline{/60°})/(4\underline{/30°}) = 5\underline{/30°}$$
$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{VI}_1^* = (20\underline{/60°})(5\underline{/-30°}) = 100\underline{/30°} = 86{,}6 + j50$$

Entonces,

$P_1 = \text{Re}[\mathbf{VI}_1^*] = 86{,}6$ W

$Q_1 = \text{Im}[\mathbf{VI}_1^*] = 50$ VAR en retraso

$S_1 = |\mathbf{VI}_1^*| = 100$ VA

$\text{f.p.}_1 = P_1/S_1 = 0{,}866$ en retraso

*Rama 2.*

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2 = (20\underline{/60°})/(5\underline{/60°}) = 4\underline{/0°}$$
$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{VI}_2^* = (20\underline{/60°})(4\underline{/0°}) = 80\underline{/60°} = 40 + j69{,}2$$

Entonces,

$P_2 = 40$ W

$Q_2 = 69{,}2$ VAR en retraso

$S_2 = 80$ VA

$\text{f.p.}_2 = 0{,}5$ en adelante

De los resultados anteriores se deduce inmediatamente el triángulo de potencias total que se representa en la Figura 7-16.

$$P_T = P_1 + P_2 = 86{,}6 + 40 = 126{,}6 \text{ W}; \quad Q_T = Q_1 + Q_2 = 50 + 69{,}2 = 119{,}2 \text{ VAR en retraso}$$

Por tanto, $\mathbf{S}_T = P_T + jQ_T = 126{,}6 + j119{,}2 = 174\underline{/43{,}4°}$.

$$S_T = |\mathbf{S}_T| = 174 \text{ VA} \quad \text{y} \quad \text{f.p.}_T = P_T/S_T = 126{,}6/174 = 0{,}727 \text{ en retraso}$$

**7-7** El rendimiento de un motor de inducción de 2 caballos de vapor (CV) de potencia de alimentación es del 85 %. El factor de potencia de la carga vale 0,8 en retraso. Hallar las potencias eléctricas de entrada.

Como 1 CV = 736 W, $P_{\text{entrada}} = 2(736)/0{,}85 = 1732$ W. Por tanto,

$$S = 1732/0{,}8 = 2165 \text{ VA}, \quad \theta = \text{arc cos } (0{,}8) = 36{,}9°, \quad Q = 2165 \text{ sen } 36{,}9° = 1299 \text{ VAR en retraso}$$

**7-8** Determinar el triángulo de potencias total del circuito paralelo de la Fig. 7-17 sabiendo que la potencia disipada en la resistencia de 2 ohmios es 20 vatios.

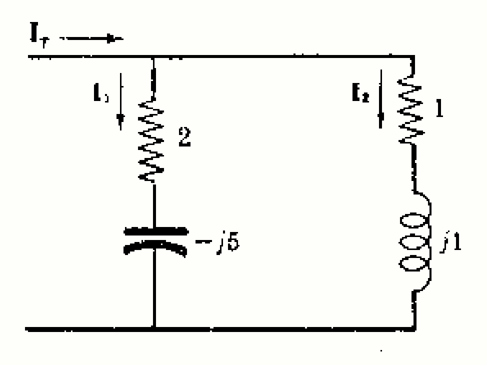



Fig. 7-17

Como $P = RI^2$, $2I_1^2 = 20$, de donde $I_1 = 3{,}16$ A. Por otro lado, $\mathbf{Z}_1 = 2 - j5 = 5{,}38\angle{-68{,}2^\circ}\ \Omega$, con lo que $V = ZI_1 = 3{,}16(5{,}38) = 17$ V. Tomando $\mathbf{V} = 17\angle 0^\circ$,

$$\mathbf{I}_1 = 3{,}16\angle 68{,}2^\circ, \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2 = (17\angle 0^\circ)/(\sqrt{2}\angle 45^\circ)$$

e $$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 11{,}1\angle{-29{,}8^\circ}$$

Para determinar las componentes del triángulo de potencias se ha de conocer el valor de $S_T$.

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{V}\mathbf{I}_T^* = 17\angle 0^\circ\,(11{,}1\angle 29{,}8^\circ) = 189\angle 29{,}8^\circ = 164 + j94$$

de donde

$$P_T = 164 \text{ W}, \quad Q_T = 94 \text{ VAR en retraso}, \quad S_T = 189 \text{ VA}, \quad \text{f.p.} = 164/189 = 0{,}868 \text{ en retraso}$$

**7-9** Determinar las componentes del triángulo de potencias de la asociación de tres cargas definidas de la forma siguiente. Carga 1: 250 voltios-amperios con factor de potencia 0,5 en retraso; carga 2: 180 vatios con factor de potencia 0,8 en adelanto; carga 3: 300 voltios-amperios, 100 voltios-amperios reactivos en retraso.

Vamos a calcular las potencias media y reactiva desconocida para cada carga.

*Carga 1.* Datos $S = 250$ VA, f.p. $= 0{,}5$ en retraso.

$P = S$ (f.p.) $= 250(0{,}5) = 125$ W, $\theta = \arccos 0{,}5 = 60^\circ$, $Q = S \operatorname{sen} \theta = 250 \operatorname{sen} 60^\circ = 216$ VAR en retraso

*Carga 2.* Datos $P = 180$ W, f.p. $= 0{,}8$ en adelanto.

$S = P/\text{f.p.} = 180/0{,}8 = 225$ VA, $\theta = \arccos 0{,}8 = 36{,}9^\circ$, $Q = 225 \operatorname{sen} 36{,}9^\circ = 135$ VAR en adelanto

*Carga 3.* Datos $S = 300$ VA, $Q = 100$ VAR en retraso.

$$\theta = \text{arc sen } (Q/S) = \text{arc sen } (100/300) = 19{,}5^\circ, \quad P = S \cos\theta = 300 \cos 19{,}5^\circ = 283 \text{ W}$$

Por tanto, $P_T = 125 + 180 + 283 = 588$ W, $Q_T = 216 - 135 + 100 = 181$ VAR en retraso

Como $\mathbf{S}_T = P_T + jQ_T = 588 + j181 = 616\angle 17{,}1^\circ$,

$$S_T = 616 \text{ VA} \quad \text{y} \quad \text{f.p.} = P/S = 588/616 = 0{,}955 \text{ en retraso}$$

La Fig. 7-18 muestra los triángulos de potencia de las cargas individuales y del conjunto.

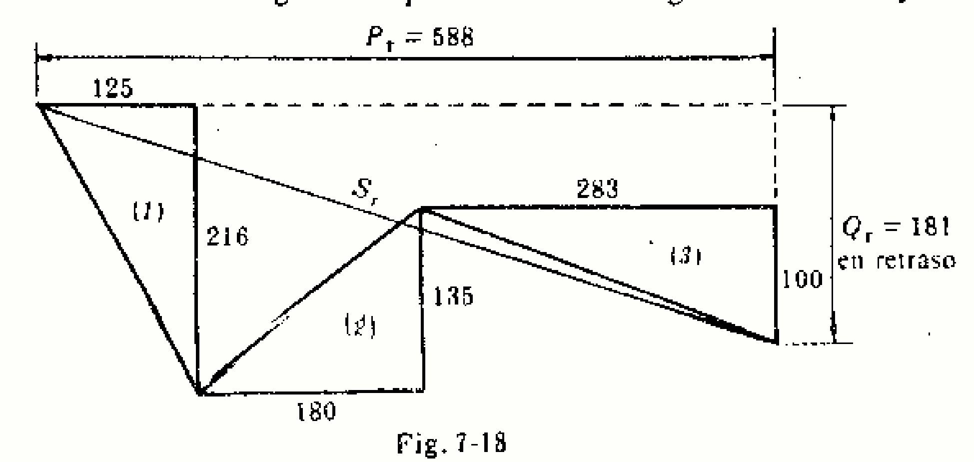



Fig. 7-18

**7-10** Un transformador de 25 kilovoltios-amperios alimenta una carga de 12 kilovatios con un factor de potencia 0,6 en retraso. Hallar el tanto por ciento respecto de plena carga que soporta el transformador. ¿Cuántos kilovatios en cargas adicionales con factores de potencia la unidad se pueden añadir a dicho transformador sin que trabaje a plena carga?

Para la carga de 12 kW, $S = P/\text{f.p.} = 12/0{,}6 = 20$ kVA. Por tanto,

$$\% \text{ plena carga} = (20/25)100 = 80\,\%$$

Como $\theta$ = arc cos 0,6 = 53,1°, $Q = S_1 \operatorname{sen} \theta$ = 20 sen 53,1° = 16 kVAR en retraso. Al ser el factor de potencia de las cargas adicionales la unidad, la potencia reactiva $Q$ será la misma. Por tanto, a plena carga, el ángulo $\theta'$ = arc sen (16/25) = 39,8° y la potencia total $P_T = S' \cos \theta'$ = 25 cos 39,8° = 19,2 kW. Luego,

$$\text{Carga adicional} = P_T - P = 19{,}2 - 12 = 7{,}2\ \text{kW}$$

Se podían haber obtenido estos mismos resultados mediante una representación gráfica, como se puede ver en la Figura 7-19.

Obsérvese que con la adición de estas cargas con factor de potencia unidad ha aumentado el factor de potencia total, f.p. = cos 39,8° = 0,768 en retraso.

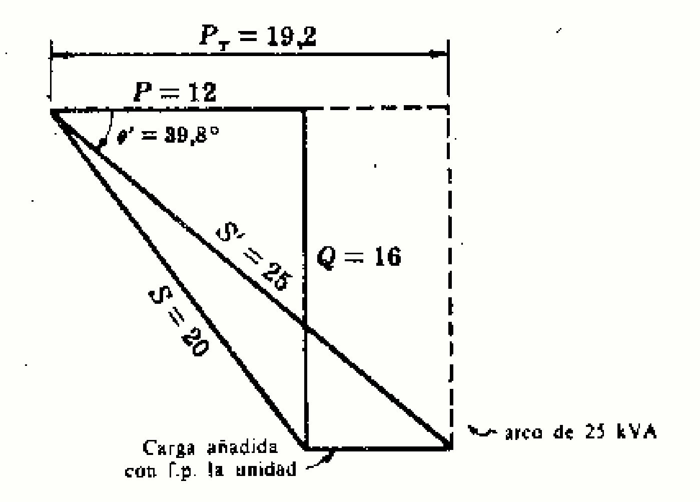


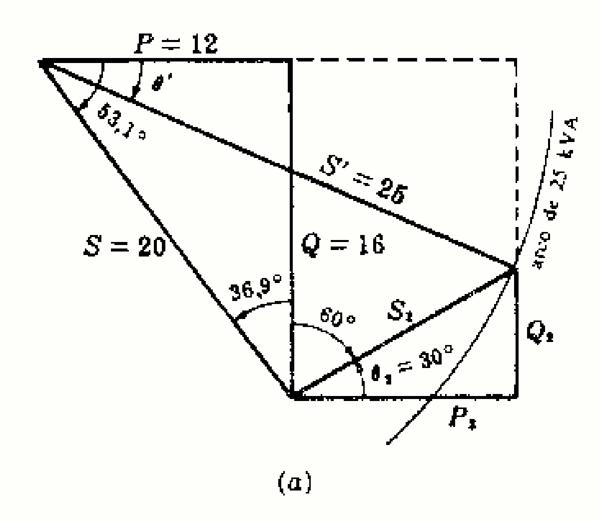

Fig. 7-19

**7-11** En el transformador del Problema 7-10, supóngase que el factor de potencia de las cargas adicionales es 0,866 en adelanto. ¿Cuántos kilovoltios-amperios de esas cargas se le pueden añadir hasta que el transformador trabaje a plena carga?

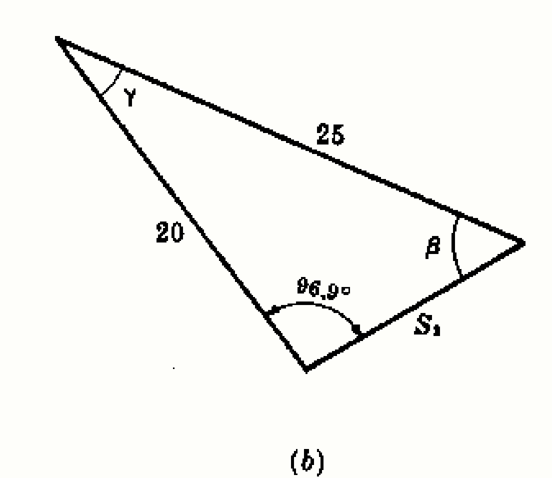
Del Problema 7-10, $S$ = 20 kVA, $\theta$ = 53,1°, $Q$ = 16 kVAR en retraso. En la Fig. 7-20(*a*) tenemos el triángulo correspondiente de potencias. Con la potencia $S_2$ de las nuevas cargas se añade un ángulo $\theta_2$ = arc cos 0,866 = 30°, y el ángulo $\theta'$ es innecesario. En la Figura 7-20(*b*),

$$25/\text{sen } 96{,}9° = 20/\text{sen } \beta, \quad \text{sen } \beta = 0{,}795, \quad \beta = 52{,}6°$$

Entonces, $\gamma = 180° - (96{,}9° + 52{,}6°) = 30{,}5°$ y $\theta' = 53{,}1° - 30{,}5° = 22{,}6°$.




(*a*)




(*b*)

Fig. 7-20

La potencia activa y reactiva a plena carga son $P_T$ = 25 cos 22,6° = 23,1 kW y $Q_T$ = 25 sen 22,6° = 9,6 kVAR en retraso. Para las nuevas cargas, $P_2$ = 23,1 − 12 = 11,1 kW, $Q_2$ = 16 − 9,6 = 6,4 kVAR en adelanto, con lo cual, $\mathbf{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 11{,}1 - j6{,}4 = 12{,}8\underline{/-30°}$

$$S_2 = 12{,}8\ \text{kVA}$$

Estos 12,8 kVA de las nuevas cargas con un factor de potencia 0,866 en adelanto, más los 12 kW con un factor de potencia 0,6 en retraso, completan la potencia aparente de 25 kVA del transformador.

*Otro método.* En la Fig. 7-20(*a*), para un ángulo $\theta_2$ = 30°,

$$P_2 = S_2 \cos 30° = (\sqrt{3}/2)S_2, \qquad Q_2 = S_2 \operatorname{sen} 30° = \tfrac{1}{2}S_2$$

Ahora bien, $$(S')^2 = (P + P_2)^2 + (Q - Q_2)^2$$

Sustituyendo $$25^2 = (12 + \sqrt{3}/2\, S_2)^2 + (16 - \tfrac{1}{2}S_2)^2 \quad \text{de donde} \quad S_2 = 12{,}8\ \text{kVA}$$

**7-12** Un transformador de 500 kilovoltios-amperios funciona a plena carga con un factor de potencia 0,6 en retraso. Añadiendo unos condensadores a la carga se modifica dicho factor pasando a valer 0,9 en retraso. Hallar la potencia reactiva de los condensadores precisos. Después de la corrección del factor de potencia, ¿qué tanto por ciento respecto de plena carga soporta el transformador?

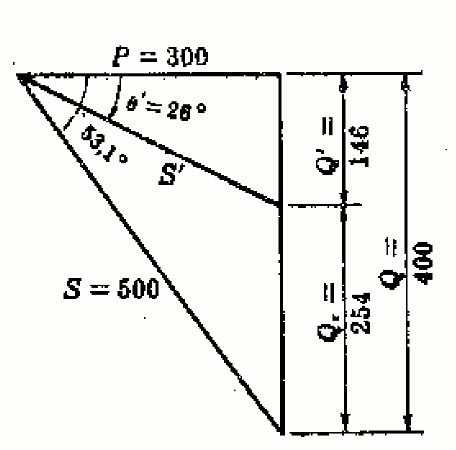


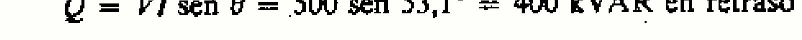
Fig. 7-21

Cuando el transformador funciona a plena carga (véase Fig. 7-21),

$$P = VI \cos\theta = 500(0,6) = 300 \text{ kW}$$

$$\theta = \text{arc cos } 0,6 = 53,1°$$

$$Q = VI \text{ sen } \theta = 500 \text{ sen } 53,1° = 400 \text{ kVAR en retraso}$$



Cuando f.p. = 0,9 en retraso,

$$\theta' = \text{arc cos } 0,9 = 26°, \quad S' = 300/0,9 = 333 \text{ kVA}, \quad Q' = 333 \text{ sen } 26° = 146 \text{ en retraso}$$

Por tanto, la potencia reactiva de los condensadores es $Q - Q' = 400 - 146 = 254$ kVAR en adelanto

y $$\% \text{ plena carga} = (333/500)100 = 66,7\,\%$$

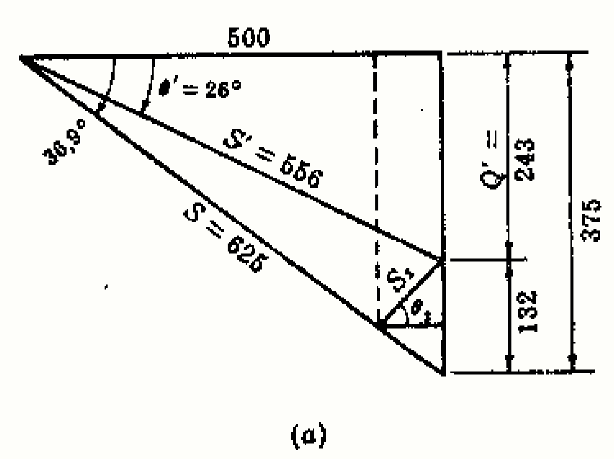
**7-13** Un grupo de motores de inducción con una potencia activa total de 500 kilovatios y un factor de potencia 0,8 en retraso es sustituido parciálmente por motores sincronos con el mismo rendimiento, pero con un factor de potencia 0,707 en adelanto. Se siguen haciendo sustituciones, con lo cual el factor de potencia varía continuamente. ¿Qué tanto por ciento de la carga habrá sido sustituida cuando el factor de potencia del sistema valga 0,9 en retraso?

Como los motores sincronos tienen el mismo rendimiento que los motores de inducción, la potencia activa total permanece constante e igual a 500 kW. Antes de la sustitución de los motores,

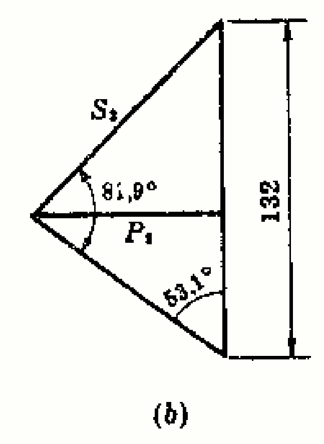
$$S = 500/0,8 = 625 \text{ kVA}, \quad \theta = \text{arc cos } 0,8 = 36,9°, \quad Q = 625 \text{ sen } 36,9° = 375 \text{ kVAR en retraso}$$

Cuando el factor de potencia del sistema sea 0,9 en retraso,

$$\theta' = \text{arc cos } 0,9 = 26°, \quad S' = 500/0,9 = 556 \text{ kVA}, \quad Q' = 556 \text{ sen } 26° = 243 \text{ kVAR en retraso}$$



(a)



(b)

Fig. 7-22

Cuando el factor de potencia sea 0,707 en adelanto, $\theta_2 = \text{arc cos } 0,707 = 45°$. En la Fig. 7-22(*b*), aplicando el teorema de los senos,

$$S_2/\text{sen } 53,1° = 132/\text{sen } 81,9°, \quad S_2 = 106,5 \text{ kVA}$$

Por tanto, $P_2 = 106,5 \cos 45° = 75,3$ kW y

$$\% \text{ carga sustituida} = (75,3/500)100 = 15\,\%$$

# Problemas propuestos

**7-14** Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica la tensión $v = 200$ sen $(\omega t + 110°)$ voltios y circula la intensidad $i = 5$ sen $(\omega t + 20°)$ amperios. *Sol.* $P = 0$; $Q = 500$ VAR en retraso.

**7-15** Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica la tensión $v = 14{,}14 \cos \omega t$ voltios y circula la intensidad $i = 17{,}1 \cos (\omega t - 14{,}05°)$ miliamperios.
*Sol.* $P = 117{,}5$ mW; $Q = 29{,}6$ mVAR en retraso; f.p. = 0,97 en retraso.

**7-16** Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica una tensión $v = 340$ sen $(\omega t - 60°)$ voltios y circula una intensidad $i = 13{,}3$ sen $(\omega t - 48{,}7°)$ amperios.
*Sol.* $P = 2215$ W; $Q = 442$ VAR en adelanto; f.p. = 0,98 en adelanto.

**7-17** La tensión eficaz aplicada a un circuito serie de $R = 10$ ohmios y $X_C = 5$ ohmios es 120 voltios. Determinar el triángulo de potencias. *Sol.* $\mathbf{S} = 1154 - j577$ VA; f.p. = 0,894 en adelanto.

**7-18** La tensión eficaz en la resistencia de un circuito serie de $R = 5$ ohmios y $X_L = 15$ ohmios vale 31,6 voltios. Determinar el triángulo de potencias. *Sol.* $\mathbf{S} = 200 + j600$ VA; f.p. = 0,316 en retraso.

**7-19** El fasor de la tensión aplicada a un circuito serie de $R = 8$ ohmios y $X_C = 6$ ohmios es $\mathbf{V} = 50\underline{/-90°}$ voltios. Determinar el triángulo de potencias. *Sol.* $\mathbf{S} = 200 - j150$ VA; f.p. = 0,8 en adelanto.

**7-20** Hallar la impedancia de un circuito que consume 5040 voltios-amperios con un factor de potencia 0,894 en adelanto respecto de un fasor tensión $\mathbf{V} = 150\underline{/45°}$ voltios. *Sol.* $4 - j2\ \Omega$.

**7-21** Una impedancia por la que circula una corriente eficaz de 18 amperios consume 3500 voltios-amperios con un factor de potencia 0,76 en retraso. Calcular dicha impedancia. *Sol.* $8{,}21 + j7{,}0\ \Omega$.

**7-22** Hallar las constantes de un circuito serie de dos elementos por el que circula una intensidad de corriente $i = 4{,}24$ sen $(5000t + 45°)$ amperios y consume 180 vatios con un factor de potencia 0,8 en retraso.
*Sol.* $R = 20\ \Omega$; $L = 3$ mH.

**7-23** Determinar el triángulo de potencias del circuito constituido por las impedancias $\mathbf{Z}_1 = 5{,}83\underline{/-59°}$ ohmios y $\mathbf{Z}_2 = 8{,}95\underline{/63{,}4°}$ ohmios en serie por las que circula una intensidad de corriente eficaz de 5 amperios.
*Sol.* $\mathbf{S}_T = 175 + j75$ VA; f.p. = 0,918 en retraso.

**7-24** La potencia reactiva consumida por dos impedancias $\mathbf{Z}_1 = 5\underline{/45°}$ ohmios y $\mathbf{Z}_2 = 10\underline{/30°}$ ohmios en serie es 1920 voltios-amperios reactivos en retraso. Hallar la potencia activa $P$ y la potencia aparente $S$.
*Sol.* $P = 2745$ W; $S = 3350$ VA.

**7-25** El circuito de la Fig. 7-23 consume 36,4 voltios-amperios con un factor de potencia 0,856 en retraso. Hallar el valor de $\mathbf{Z}$.
*Sol.* $\mathbf{Z} = 1\underline{/90°}\ \Omega$.

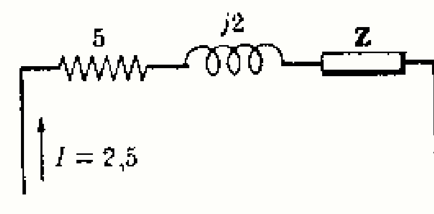




Fig. 7-23

**7-26** El circuito serie de la Fig. 7-24 consume 300 vatios con un factor de potencia 0,6 en retraso. Hallar la impedancia desconocida y determinar el triángulo de potencias.
*Sol.* $\mathbf{Z} = 4\underline{/90°}\ \Omega$; $\mathbf{S} = 300 + j400$ VA.

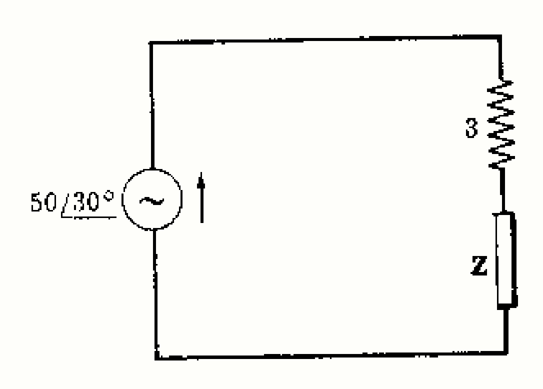



Fig. 7-24

**7-27** El fasor de tensión aplicado a dos impedancias $\mathbf{Z}_1 = 4\underline{/-30°}$ ohmios y $\mathbf{Z}_2 = 5\underline{/60°}$ ohmios en paralelo es $\mathbf{V} = 20\underline{/0°}$ voltios. Determinar el triángulo de potencias de cada rama así como el triángulo de potencias total mediante combinación de los anteriores.
*Sol.* $P = 126{,}6$ W, $Q = 19{,}3$ VAR en retraso; f.p. = 0,99 en retraso.

**7-28** El valor de la tensión eficaz aplicada a un circuito formado por $R = 10$ ohmios y $\mathbf{Z} = 8\underline{/-30°}$ ohmios en paralelo es de 5 amperios. Determinar el triángulo de potencias total.
*Sol.* $P = 110$ W; $Q = 33$ VAR en adelanto; f.p. = 0,957 en adelanto.

**7-29** Hallar la potencia activa total y el factor de potencia del circuito paralelo de la Fig. 7-25 sabiendo que la potencia reactiva de la rama 1 es 8 kilovoltios-amperios reactivos. *Sol.* 8 kW; f.p. = 0,555 en retraso.

**7-30** ¿Qué lectura indicará el amperímetro del circuito de la Fig. 7-26 si el consumo de la rama 2 es 1490 voltios-amperios? Determinar el triángulo de potencias.
*Sol.* 42,4 A; $\mathbf{S} = 2210 + j3630$ VA; f.p. = 0,521 en retraso.

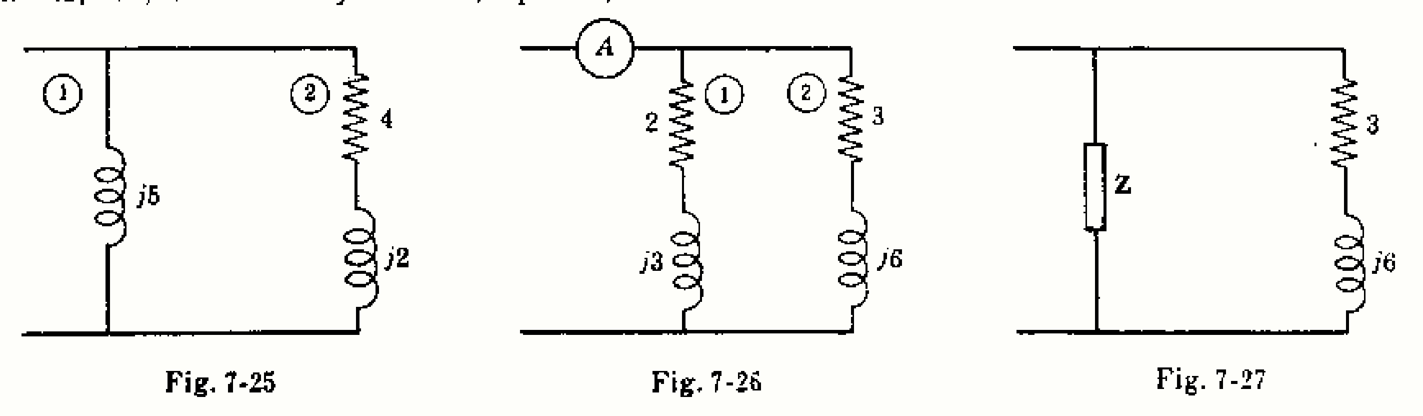



Fig. 7-25 Fig. 7-26 Fig. 7-27

**7-31** En el circuito paralelo de la Fig. 7-27 la resistencia de 3 ohmios consume 666 vatios y el circuito total 3370 voltios-amperios con un factor de potencia 0,937 en adelanto. Hallar el valor de **Z**.
*Sol.* $\mathbf{Z} = 2 - j2\ \Omega$.

**7-32** La potencia total consumida por el circuito de la Fig. 7-28 es 1500 vatios. Determinar el triángulo de potencias.
*Sol.* $\mathbf{S} = 1500 + j2480$ VA; f.p. = 0,518 en retraso.

**7-33** Hallar la potencia disipada en cada una de las resistencias del circuito de la Fig. 7-29 sabiendo que la potencia total es de 2000 vatios. *Sol.* $P_{15} = 724$ W; $P_8 = 1276$ W.

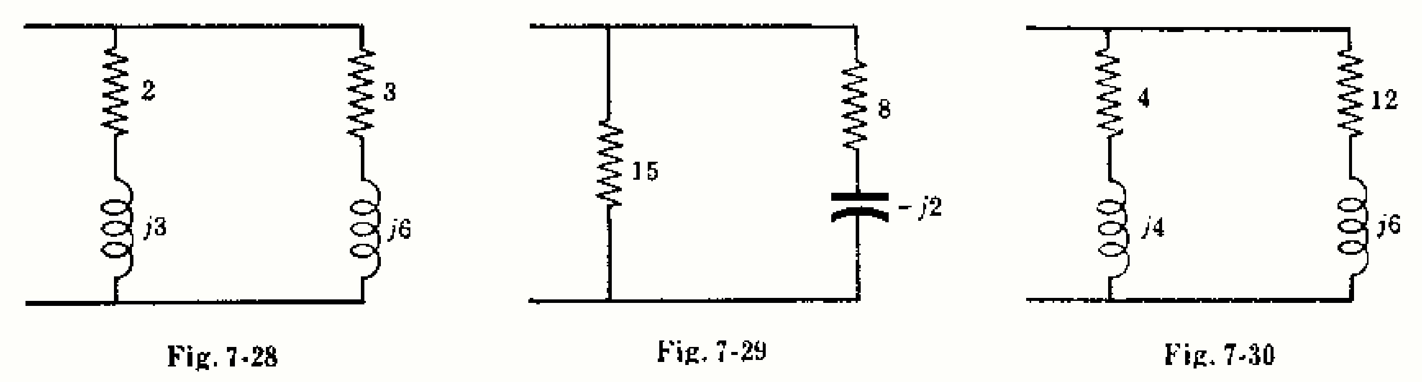



Fig. 7-28 Fig. 7-29 Fig. 7-30

**7-34** La potencia reactiva $Q$ del circuito de la Fig. 7-30 es de 2500 voltios-amperios reactivos en retraso. Determinar el triángulo de potencias completo. *Sol.* $S = 3920$ VA; $P = 3020$ W; f.p. = 0,771 en retraso.

**7-35** Hallar el factor de potencia del circuito de la Fig. 7-31. Se sustituye la resistencia de 6 ohmios por otra de manera que el factor de potencia total sea 0,9 en retraso; ¿cuál será este nuevo valor óhmico?
*Sol.* f.p. = 0,8 en retraso; $R = 3{,}22\ \Omega$.

**7-36** En el circuito de la Fig. 7-32 el valor de la carga es $\mathbf{Z} = 5 + j8{,}66$ ohmios. Calcular el tanto por ciento de disminución de la intensidad total al añadir el condensador de $-j20$ ohmios de capacitancia en paralelo con la carga. *Sol.* 38 %.

**7-37** Hallar la capacidad $C$ del condensador necesario para que el factor de potencia del circuito paralelo de la Figura 7-33 sea 0,95 en retraso. *Sol.* $C = 28{,}9\ \mu$F.

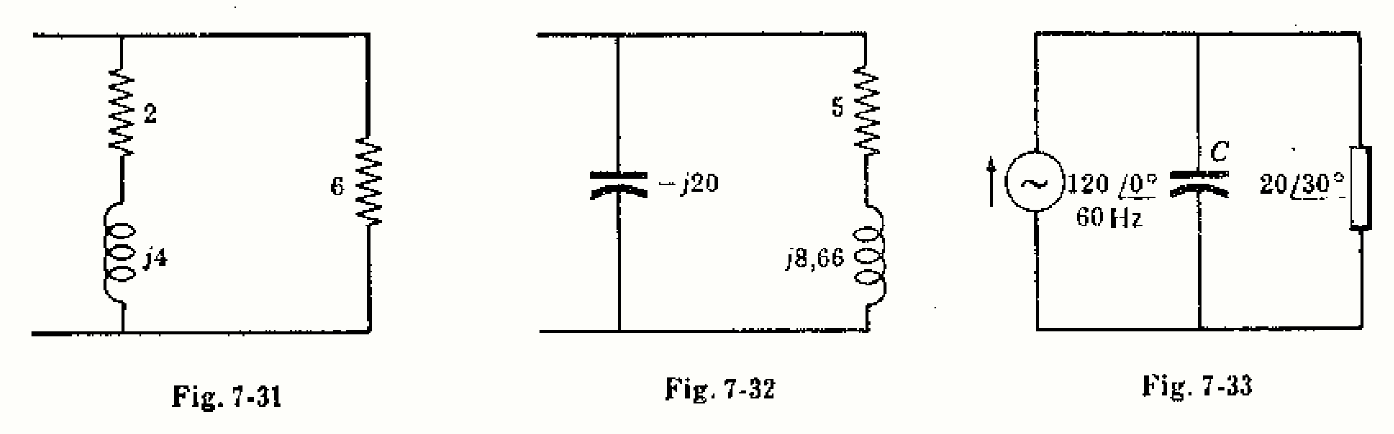



Fig. 7-31 Fig. 7-32 Fig. 7-33

**7-38** Una fuente a 60 hertzios y 240 voltios de tensión eficaz suministra 4500 voltios-amperios a una carga con un factor de potencia 0,75 en retraso. Hallar la capacidad del condensador que ha de colocarse en paralelo con la carga para que el factor de potencia sea (*a*) 0,9 en retraso, (*b*) 0,9 en adelanto. *Sol.* (*a*) 61,3 $\mu$F; (*b*) 212 $\mu$F.

**7-39** En el apartado (*a*) del Problema 7-38, ¿en qué tanto por ciento disminuye la intensidad de corriente? ¿Existe alguna reducción más en el apartado (*b*)? *Sol.* 16,7 %. No, la corriente es la misma.

**7-40** Tres impedancias $\mathbf{Z}_1 = 20/30°$ ohmios, $\mathbf{Z}_2 = 15/-45°$ ohmios y $\mathbf{Z}_3 = 10/0°$ ohmios están asociadas en paralelo con una fuente de tensión $\mathbf{V} = 100/-45°$ voltios. Determinar el triángulo de potencias de cada rama, así como la suma de los tres para obtener el triángulo de potencias total.
*Sol.* $P = 1904$ W; $Q = 221$ VAR en adelanto; $S = 1920$ VA; f.p. = 0,993 en adelanto.

**7-41** En el Problema 7-40 la fuente de 100 voltios suministra 1920 voltios-amperios, con un factor de potencia 0,993 en adelanto, a las tres ramas en paralelo del circuito. Hallar la intensidad de corriente total en el circuito.
*Sol.* 19,2 A; en adelanto 6,62° respecto de V.

**7-42** Una fuente de tensión $\mathbf{V} = 240/-30°$ voltios alimenta tres impedancias $\mathbf{Z}_1 = 25/15°$ ohmios, $\mathbf{Z}_2 = 15/-60°$ ohmios y $\mathbf{Z}_3 = 15/90°$ ohmios en paralelo. Determinar el triángulo de potencias para cada rama, así como el correspondiente a la combinación de los tres.
*Sol.* $P = 4140$ W; $Q = 1115$ VAR en retraso; $S = 4290$ VA; f.p. = 0,967 en retraso.

**7-43** Determinar el triángulo de potencias total para las siguientes cargas: carga 1, de 5 kilovatios con un factor de potencia 0,8 en retraso; carga 2, de 4 kilovoltios-amperios con una potencia $Q$ de 2 kilovoltios-amperios reactivos, y carga 3, de 6 kilovoltios-amperios con un factor de potencia 0,9 en retraso.
*Sol.* $P = 13{,}86$ kW; $Q = 4{,}38$ kVAR en retraso; $S = 14{,}55$ kVA; f.p. = 0,965 en retraso.

**7-44** Determinar el triángulo de potencias total para las siguientes cargas: carga 1, de 200 voltios-amperios con un factor de potencia 0,7 en retraso; carga 2, de 350 voltios-amperios con un factor de potencia 0,5 en retraso, y carga 3, de 275 voltios-amperios con un factor de potencia igual a la unidad.
*Sol.* $P = 590$ W; $Q = 446$ VAR en retraso; $S = 740$ VA; f.p. = 0,798 en retraso.

**7-45** Mediante la conexión de unos condensadores se modifica el factor de potencia de una carga de 300 kilovatios desde 0,65 en retraso a 0,90 en retraso. Calcular la potencia reactiva de los condensadores necesarios para obtener dicha modificación y el tanto por ciento en que disminuye la potencia aparente. *Sol.* 204 kVAR; 28 %.

**7-46** El factor de potencia de una carga industrial de 25 kilovoltios-amperios es 0,8 en retraso. En la planta se instala un grupo de resistencias de calefacción con lo cual se eleva el factor de potencia a 0,85 en retraso. Hallar la potencia activa instalada. *Sol.* 4,3 kW.

**7-47** Una carga de motores de inducción de 1500 vatios y factor de potencia 0,75 en retraso se combina con la de un grupo de motores síncronos de 500 voltios-amperios y factor de potencia 0,65 en adelanto. Calcular la potencia reactiva de los condensadores a instalar para que el factor de potencia de los dos grupos motores sea 0,95 en retraso. ¿En qué tanto por ciento disminuye la potencia aparente? *Sol.* 347 VAR; 6,3 %.

**7-48** El factor de potencia de una cierta carga se corrige mediante 20 kilovoltios-amperios reactivos de una asociación de condensadores al valor 0,9 en retraso. Si la potencia aparente que resulta es 185 kilovoltios-amperios, determinar el triángulo de potencias de la carga antes de la conexión.
*Sol.* $P = 166{,}5$ kW; $Q = 101{,}0$ kVAR en retraso; f.p. = 0,856 en retraso.

**7-49** Una carga de motores de inducción con una potencia aparente de 2000 voltios-amperios y un factor de potencia 0,80 en retraso se combina con otra carga de 500 voltios-amperios de motores síncronos. Hallar el factor de potencia de estos motores síncronos sabiendo que el factor de potencia total es 0,90 en retraso.
*Sol.* 0,92 en adelanto.

**7-50** Una carga de potencia aparente de 65 kilovoltios-amperios con un factor de potencia en retraso se conecta a un grupo de motores síncronos de 25 kilovoltios-amperios con un factor de potencia 0,6 en adelanto. Hallar el factor de potencia de la carga de 65 kilovoltios-amperios sabiendo que el factor de potencia total es 0,85 en retraso. *Sol.* 0,585.

**7-51** Un transformador de 100 kilovoltios-amperios trabaja al 80 % de plena carga con un factor de potencia 0,85 en retraso. ¿Qué potencia aparente de carga con 0,6 de factor en retraso se le puede añadir sin sobrepasar la plena carga del transformador? *Sol.* 21,3 kVA.

**7-52** Un transformador de 250 kilovoltios-amperios trabaja a plena carga con un factor de potencia 0,8 en retraso. Mediante una batería de condensadores en paralelo se corrige el factor de potencia al valor 0,9 en retraso. (*a*) Hallar la potencia reactiva de los condensadores necesarios. (*b*) ¿Qué potencia activa de una nueva carga se le puede añadir sin exceder el límite de la potencia aparente del transformador?
*Sol.* 52,5 kVAR; 30 kW.

**7-53** Después de instalar la batería de condensadores del Problema 7-5, se añade otra carga con un factor de potencia 0,5 en retraso. Hallar la potencia aparente de esta nueva carga sin sobrepasar el límite de la potencia aparente del transformador *Sol.* 32 kVA.

# Capítulo 8

# Resonancia serie y paralelo

## INTRODUCCION

Un circuito está, o entra, en resonancia cuando la tensión aplicada y la intensidad de corriente que circula están en fase. En resonancia, pues, la impedancia compleja del circuito se reduce exclusivamente a una resistencia pura $R$.

Como $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$ están en fase, el factor de potencia de un circuito resonante es la unidad.

## RESONANCIA DE UN CIRCUITO SERIE *RLC*

La impedancia compleja del circuito serie de la Fig. 8-1 es $\mathbf{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX$. Dicho circuito entra en resonancia cuando $X = 0$, es decir, cuando $\omega L = 1/\omega C$ o bien $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Ahora bien, $\omega = 2\pi f$, con lo que la frecuencia de resonancia viene dada por

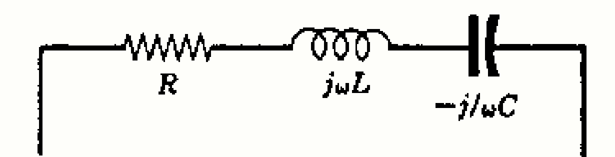



Fig. 8-1

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz (o c.p.s.)}$$

En la Fig. 8-2($a$) se representa el valor de $\mathbf{Z}$ y el de sus tres componentes $R$, $X_L$ y $X_C$ en función de la pulsación $\omega$. Para $\omega = \omega_0$, las reactancias inductiva y capacitiva son iguales, y como $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ se deduce que $\mathbf{Z} = R$. Es decir, la impedancia de un circuito serie en resonancia es mínima. En consecuencia, la intensidad de corriente, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$, es máxima en dichas condiciones.

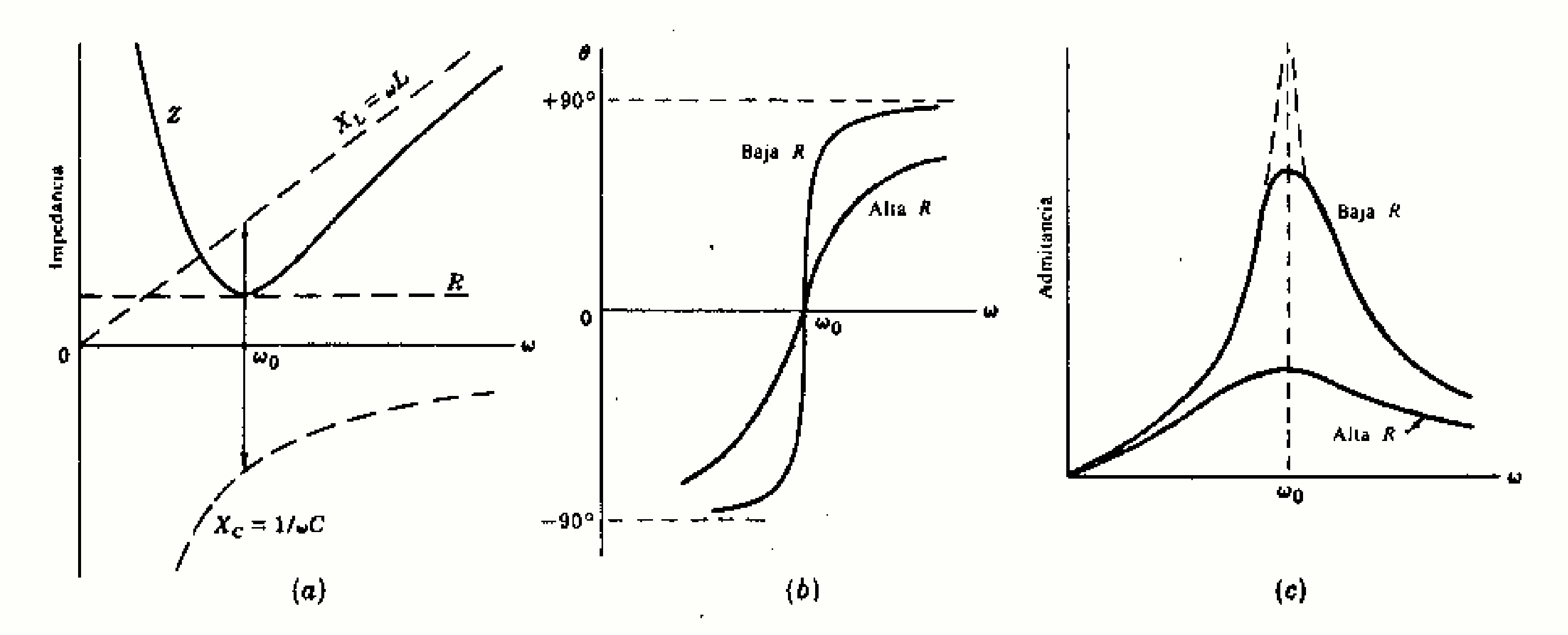



Fig. 8-2. Circuito serie: Valores de $Z$, $\theta$ e $Y$ en función de $\omega$

Para frecuencias inferiores a la correspondiente a $\omega_0$ la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva, con lo que el ángulo de la impedancia es negativo. Si la resistencia es pequeña, la variación del ángulo con la pulsación es mucho más rápida, como indica la Fig. 8-2($b$). Cuando $\omega$ tiende hacia cero, el ángulo de $\mathbf{Z}$ se aproxima a $-90°$.

Para frecuencias superiores a la correspondiente a $\omega_0$, la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva, con lo que el ángulo de **Z** es positivo, aproximándose a $+90°$ cuando $\omega \gg \omega_0$.

En la Fig. 8-2(*c*) se representa la admitancia del circuito serie $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$ en función de $\omega$. Como $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$, este diagrama muestra, asimismo, la variación de la intensidad de corriente con $\omega$. Puede observarse que para la pulsación $\omega_0$ la corriente es máxima y que en resistencias pequeñas la intensidad de corriente es mayor. La curva de puntos representa el caso límite en que $R = 0$. No se representa el ángulo de la admitancia, ya que es el opuesto (igual y de signo contrario) del ángulo de la impedancia que muestra la Figura 8-2(*b*).

## RESONANCIA DE UN CIRCUITO PARALELO *RLC*

El circuito paralelo de la Fig. 8-3 es un circuito ideal formado por tres ramas con elementos simples *R*, *L* y *C*. Sin embargo, el análisis de este circuito presenta un enorme interés en el estudio general de la resonancia. Este circuito paralelo ideal se puede reducir al circuito serie que acabamos de ver sin más que establecer la dualidad completa existente entre ambos.

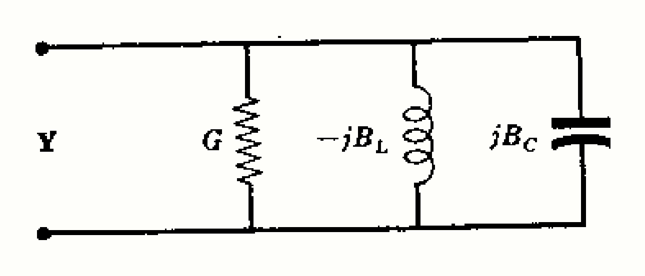



Fig. 8-3

La admitancia compleja del circuito paralelo de la Fig. 8-3 es $\mathbf{Y} = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jB$, siendo $B = B_C - B_L$, $B_C = \omega C$ y $B_L = 1/\omega L$. Dicho circuito entra en resonancia cuando $B = 0$, es decir, cuando $\omega C = 1/\omega L$ o bien $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Al igual que en el circuito serie *RLC*, la frecuencia de resonancia viene dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz (o c.p.s.)}$$

En la Fig. 8-4(*a*) se representa el valor de **Y** y el de sus tres componentes $G$, $B_C$ y $B_L$ en función de $\omega$. Para $\omega = \omega_0$, las susceptancias inductiva y capacitiva son iguales, con lo que $\mathbf{Y} = G$. Es decir, la admitancia de un circuito paralelo en resonancia es mínima. En consecuencia, la intensidad de corriente, $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$, también es mínima en estas condiciones.

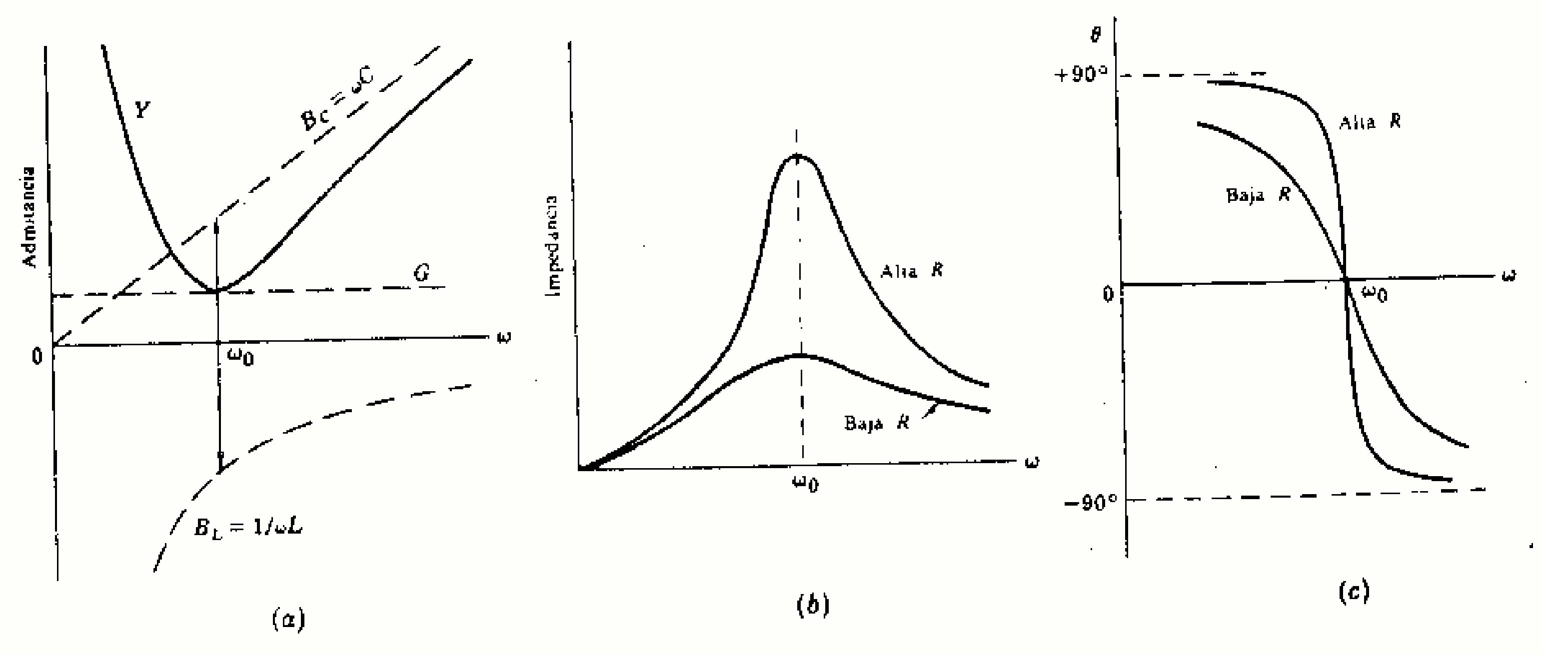



**Fig. 8-4. Circuito paralelo: Valores de *Y*, *Z* y *θ* en función de *ω***

Para frecuencias inferiores a la correspondiente a $\omega_0$ la susceptancia inductiva es mayor que la capacitiva, con lo que el ángulo de **Y** es negativo. En este caso, el ángulo de la impedancia es positivo y se aproxima a $+90°$ cuando $\omega$ tiende a cero [véase Figura 8-4(*c*)].

Para frecuencias superiores a la correspondiente a $\omega_0$ el ángulo de **Z** es negativo y su variación con $\omega$ es más rápida para resistencias elevadas.

## RESONANCIA DE UN CIRCUITO PARALELO DE DOS RAMAS

La admitancia Y del circuito paralelo de dos ramas de la Figura 8-5 es la suma de las admitancias individuales de cada una de ellas.

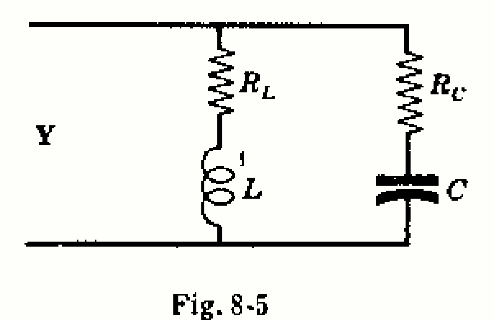



Fig. 8-5

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C}$$

$$= \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right)$$

El circuito entra en resonancia cuando la admitancia compleja sea un número real. Es decir, $X_C/(R_C^2 + X_C^2) = X_L/(R_L^2 + X_L^2)$, y

$$\frac{1}{\omega_0 C}(R_L^2 + \omega_0^2 L^2) = \omega_0 L(R_C^2 + 1/\omega_0^2 C^2) \qquad (1)$$

Para conseguir la resonancia se puede actuar sobre cualquiera de las cinco magnitudes que aparecen en (1).

Despejando $\omega_0$ de la Ecuación (1) resulta,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \qquad (2)$$

Por tanto, la pulsación $\omega_0$ de un circuito resonante paralelo de dos ramas difiere de la correspondiente al circuito simple formado por los tres elementos $R$, $L$ y $C$ en paralelo en el factor $\sqrt{\dfrac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$.

La frecuencia es un número real y positivo; por consiguiente, el circuito tendrá una frecuencia de resonancia correspondiente a $\omega_0$ para $R_L^2 > L/C$ y $R_C^2 > L/C$ o bien $R_L^2 < L/C$ y $R_C^2 < L/C$. Cuando $R_L^2 = R_C^2 = L/C$ el circuito entra en resonancia a todas las frecuencias. En el Problema 8-12 se aclara este importante caso especial.

Despejando $L$ de la Ecuación (1) resulta,

$$L = \tfrac{1}{2}C\left[(R_C^2 + X_C^2) \pm \sqrt{(R_C^2 + X_C^2)^2 - 4R_L^2 X_C^2}\right]$$

o bien como $Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2}$,

$$L = \tfrac{1}{2}C\left[Z_C^2 \pm \sqrt{Z_C^4 - 4R_L^2 X_C^2}\right] \qquad (3)$$

Ahora bien, si en esta Ecuación (3) $Z_C^4 > 4R_L^2 X_C^2$, se obtienen dos valores de $L$ para los que el circuito entra en resonancia. Si $Z_C^4 = 4R_L^2 X_C^2$ el circuito entrará en resonancia para $L = \frac{1}{2}CZ_C^2$. Si $Z_C^4 < 4R_L^2 X_C^2$ no existe valor alguno de $L$ para el cual se presente la resonancia del circuito dado.

Despejando $C$ en la Ecuación (1) resulta,

$$C = 2L\left[\frac{1}{Z_L^2 \pm \sqrt{Z_L^4 - 4R_C^2 X_L^2}}\right] \qquad (4)$$

En este caso, si $Z_L^4 > 4R_C^2 X_L^2$ habrá dos valores de $C$ para los que el circuito entra en resonancia.

Despejando $R_L$ en la Ecuación (1) resulta,

$$R_L = \sqrt{\omega^2 LC R_C^2 - \omega^2 L^2 + L/C} \qquad (5)$$

y si despejamos $R_C$

$$R_C = \sqrt{R_L^2/(\omega^2 LC) - 1/\omega^2 C^2 + L/C} \qquad (6)$$

Si el subradical de (5), o de (6), es positivo, existe un solo valor de $R_L$, o de $R_C$, para el cual el circuito entra en resonancia.

## FACTOR DE CALIDAD $Q$

El factor de calidad de una bobina, de un condensador, o de un circuito en general se define por

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía disipada por periodo}}$$

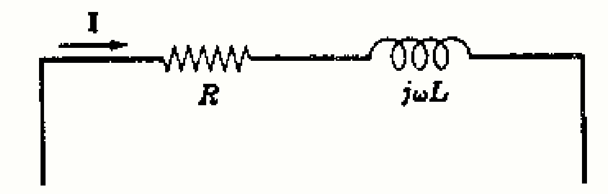



Fig. 8-6

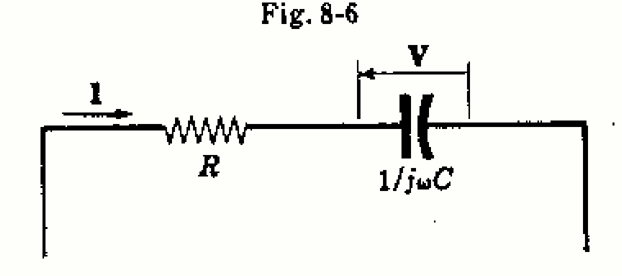



Fig. 8-7

En los circuitos de la Fig. 8-6 y 8-7, la energía disipada por periodo es el producto de la potencia media disipada en la resistencia $R(I_{max}/\sqrt{2})^2$ multiplicada por el periodo $T$ o $1/f$.

En el circuito serie $RL$ de la Fig. 8-6 la energía máxima almacenada es $\frac{1}{2}LI_{max}^2$. Por tanto,

$$Q \;=\; 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI_{max}^2}{(I_{max}^2/2)R(1/f)} \;=\; \frac{2\pi f L}{R} \;=\; \frac{\omega L}{R}$$

En el circuito serie $RC$ de la Fig. 8-7 la energía máxima almacenada es $\frac{1}{2}CV_{max}^2$ o bien $\frac{1}{2}I_{max}^2/\omega^2 C$. Por consiguiente,

$$Q \;=\; 2\pi \frac{\frac{1}{2}I_{max}^2/\omega^2 C}{(I_{max}^2/2)R(1/f)} \;=\; \frac{1}{\omega CR}$$

En un circuito serie $RLC$ en resonancia la energía almacenada es constante. Teniendo en cuenta que cuando la tensión en el condensador es máxima la intensidad de corriente por la bobina es nula, y viceversa, $\frac{1}{2}CV_{max}^2 = \frac{1}{2}LI_{max}^2$. Es decir,

$$Q_0 \;=\; \frac{\omega_0 L}{R} \;=\; \frac{1}{\omega_0 CR}$$

La representación gráfica de la intensidad de corriente en un circuito serie $RLC$ en función de la pulsación, o de la frecuencia, es análoga a la correspondiente de la admitancia de la Fig. 8-2($c$). En la Fig. 8-8 se representa la intensidad que circula por un circuito $RLC$ en función de $\omega$ o bien mediante un cambio de escala apropiado, en función de $f$. En el valor $\omega_0$ la intensidad de corriente $\mathbf{I}_0$ es máxima. Se han señalado los puntos en los que la intensidad toma el valor 0,707 del máximo. Las pulsaciones correspondientes son $\omega_1$ y $\omega_2$.

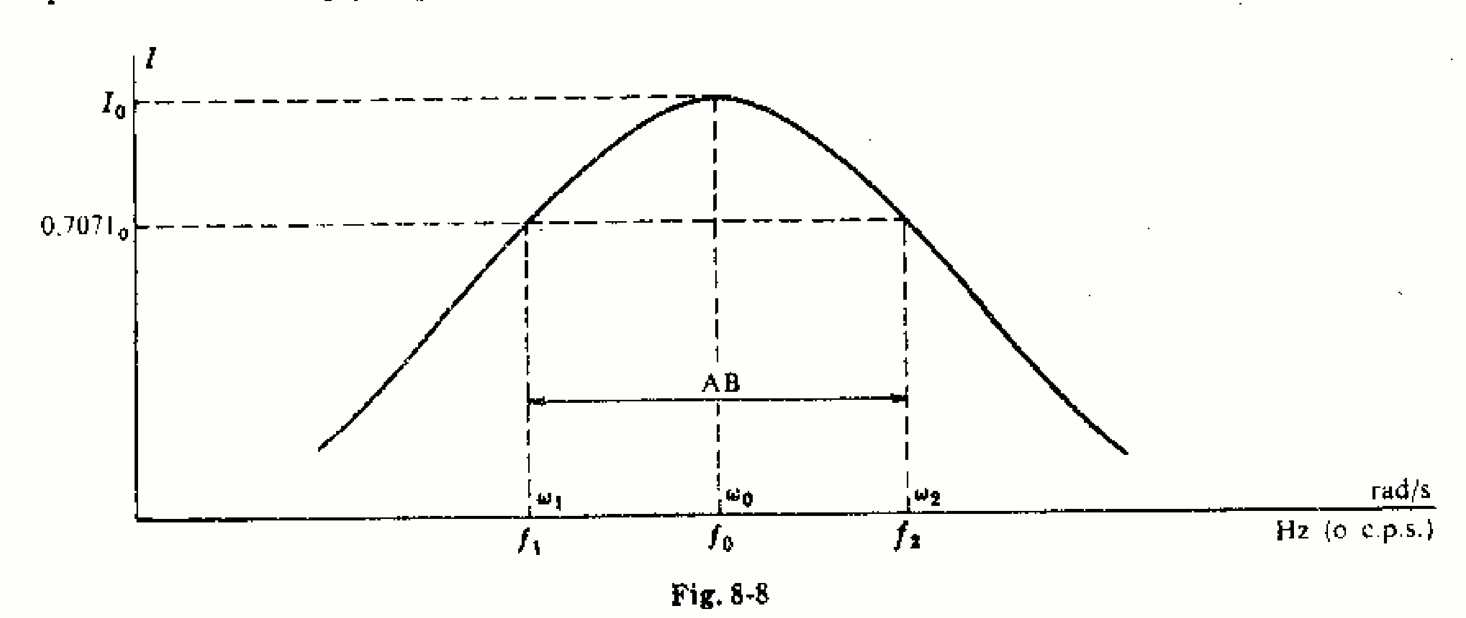



Fig. 8-8

Como la potencia consumida por el circuito es $RI^2$, para $I = 0{,}707 I_0$ la potencia es la mitad de la que corresponde al valor máximo que tiene lugar en $\omega_0$. Los puntos asociados a $\omega_1$ y $\omega_2$ se llaman puntos de potencia mitad. La distancia entre ambos puntos se mide en hertzios o ciclos por segundo (c.p.s.) y se llama ancho de banda $AB$.

En estas condiciones, podremos expresar el factor de calidad por la relación entre la frecuencia de resonancia y el ancho de banda; es decir (véase Problema 8-13),

$$Q_0 \;=\; \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \;=\; \frac{f_0}{f_2 - f_1} \;=\; \frac{f_0}{\text{AB}}$$

La pulsación de resonancia $\omega_0$ es la media geométrica de $\omega_1$ y $\omega_2$ (véase Problema 8-6):

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\omega_1 \omega_2} \qquad \text{y} \qquad f_0 \;=\; \sqrt{f_1 f_2}$$

En resonancia, las tres ramas del circuito paralelo de la Fig. 8-9 almacenan una energía constante. Teniendo en cuenta que cuando la intensidad de corriente por la bobina es máxima la tensión en el condensador es nula, y viceversa, podremos escribir $\frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}CV_{max}^2$. Es decir,

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$$

Fig. 8-9

## LUGARES GEOMETRICOS DE IMPEDANCIAS

El estudio de los circuitos que tienen un elemento variable se simplifica mucho mediante el análisis de los lugares geométricos de impedancias. Como $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$ y, normalmente, $\mathbf{V}$ es constante, el lugar geométrico de $\mathbf{Y}$ proporciona la variación de la intensidad $\mathbf{I}$ con el elemento variable del circuito.

El circuito serie de la Fig. 8-10(*a*) tiene una resistencia fija y una reactancia variable que podemos suponer toma valores cualesquiera, positivos o negativos. Si consideramos el plano $\mathbf{Z}$ con los ejes cartesianos $R$ y $X$, el lugar geométrico de la impedancia $\mathbf{Z}$, para el circuito dado, es una recta paralela al eje $X$ que corta al eje $R$ en $R_1$, como indica la Figura 8-10(*b*).

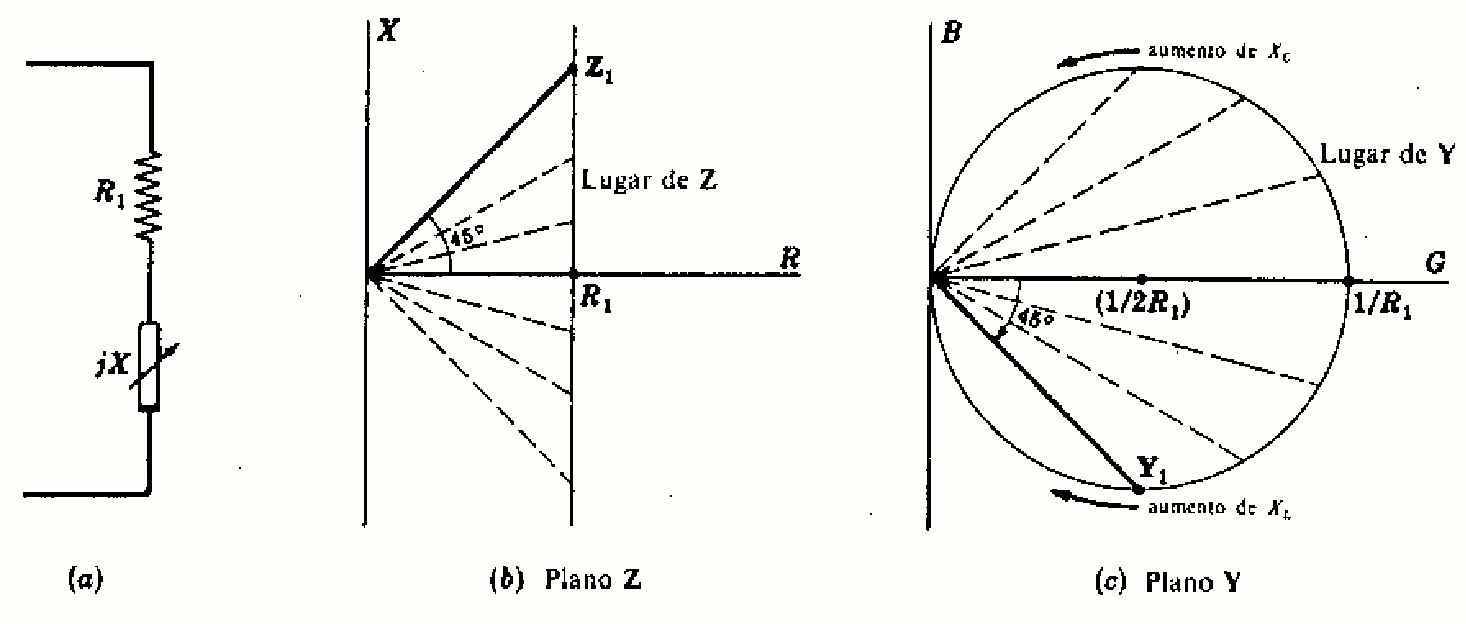



Fig. 8-10

En el plano $\mathbf{Y}$, formado por los ejes cartesianos $G$ y $B$, podemos determinar el lugar geométrico de la admitancia.

Como $\mathbf{Z} = 1/\mathbf{Y}$

$$R_1 + jX = \frac{1}{G + jB} \qquad (1)$$

Racionalizando e igualando las partes reales de (*1*),

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

o bien

$$G^2 - G/R_1 + B^2 = 0 \qquad (2)$$

Sumando $1/4R_1^2$ a ambos miembros de (*2*) y simplificando resulta,

$$\left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2 \qquad (3)$$

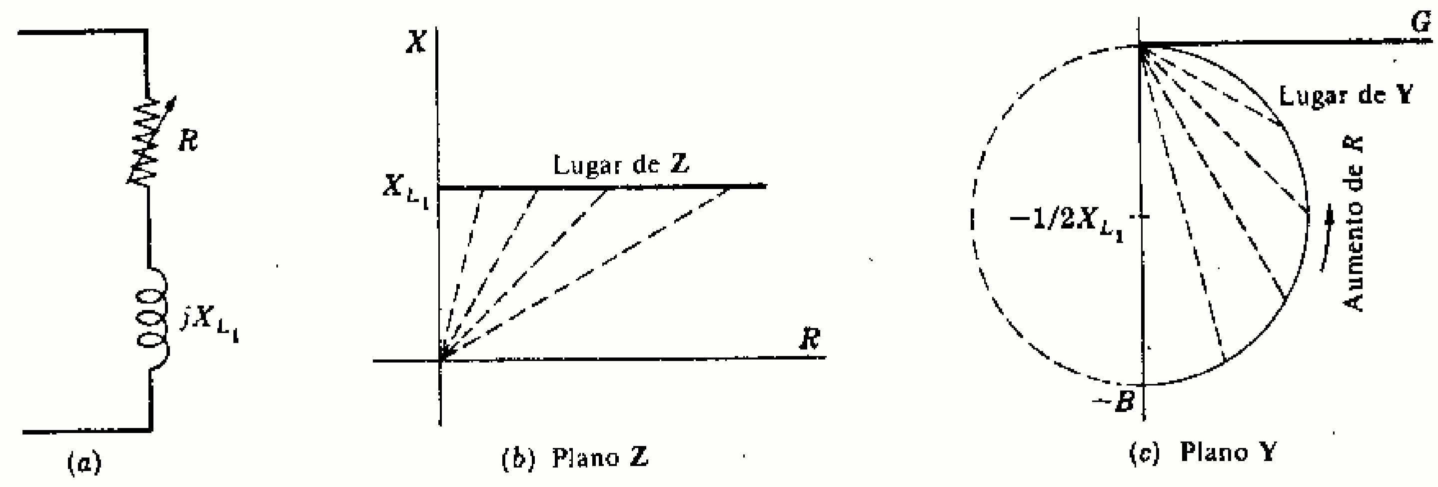
Esta Ecuación (*3*) representa una circunferencia, es decir, el lugar geométrico de $\mathbf{Y}$ es una circunferencia con centro el punto $(1/2R_1, 0)$ y radio $1/2R_1$. [Véase Figura 8-10(*c*).]

A cada punto del lugar geométrico de **Z** le corresponde un punto del lugar geométrico de **Y**. Los puntos del lugar de **Z** por encima del eje $R$ se corresponden con los puntos de la semicircunferencia por debajo del eje $G$ en el plano **Y**. Al punto $+\infty$ del lugar de **Z** le corresponde el origen del plano **Y**. Análogamente, los puntos del lugar geométrico de **Z** por debajo del eje $R$ se corresponden con los puntos de la semicircunferencia por encima del eje $G$ en el plano **Y**. Al punto $-\infty$ del lugar de **Z** le corresponde el origen en el plano **Y**. Conviene observar las posiciones relativas de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Y}_1$. Las distancias de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Y}_1$ a los orígenes respectivos son distintas, mientras que los ángulos que forman con el eje horizontal son iguales y de signo contrario.

En el caso de una reactancia inductiva fija y una resistencia variable, como indica la Fig. 8-11($a$), el lugar geométrico de **Z** es una semirrecta horizontal situada en el primer cuadrante del plano **Z** a una distancia $X = X_{L_1}$ del origen. Por el mismo procedimiento que antes se obtiene la ecuación del lugar geométrico de **Y**:

$$G^2 + (B + 1/2X_{L_1})^2 = (1/2X_{L_1})^2 \tag{4}$$

El lugar geométrico de **Y** es, pues, una circunferencia de centro $(0, -1/2X_{L_1})$ y radio $1/2X_{L_1}$ en el plano **Y**. [Véase Fig. 8-11($c$).] Sin embargo, como el lugar geométrico de **Z**, en la Fig. 8-11($b$), es una semirrecta del primer cuadrante del plano **Z** el transformado del lugar geométrico de **Z**, para este circuito, es únicamente la semicircunferencia del cuarto cuadrante del plano **Y**.



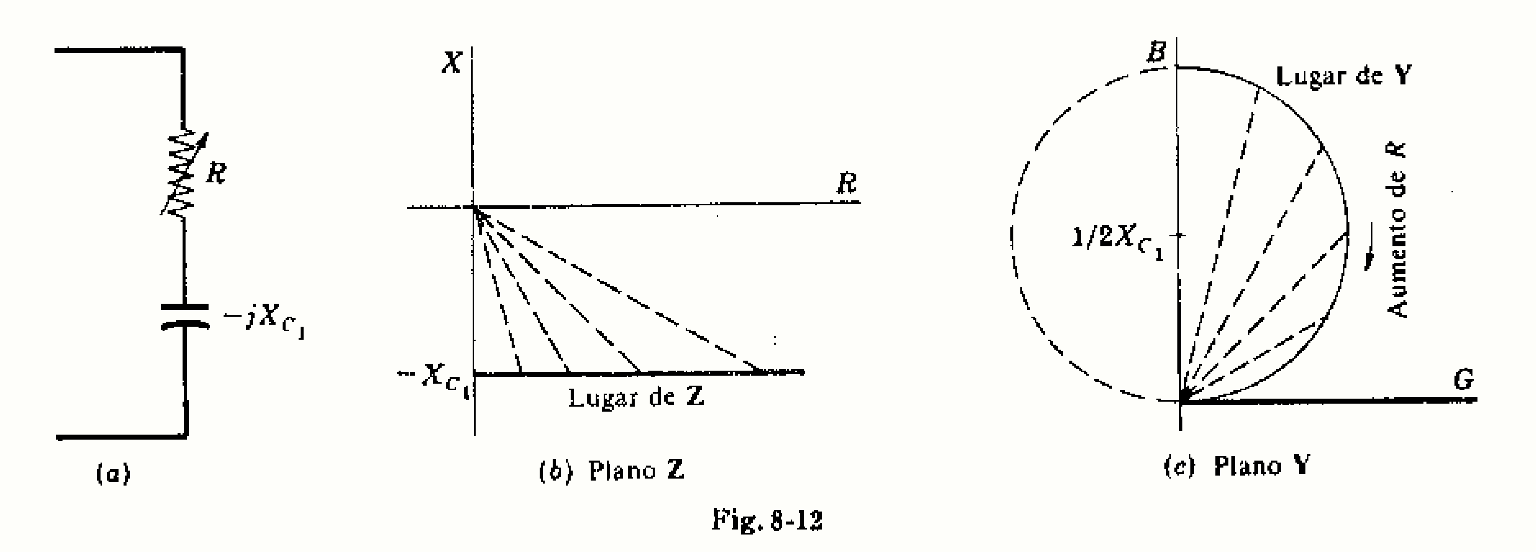

($a$) ($b$) Plano Z ($c$) Plano Y

Fig. 8-11

En el caso de una reactancia capacitiva fija en serie con una resistencia variable, como indica la Fig. 8-12($a$), el lugar geométrico de **Z** es una semirrecta horizontal situada en el cuarto cuadrante del plano $Z$ a una distancia $X = -X_{C_1}$ del origen. [Véase Fig. 8-12($b$).] Por el mismo procedimiento que antes se obtiene la ecuación del lugar geométrico de **Y**:

$$G^2 + (B - 1/2X_{C_1})^2 = (1/2X_{C_1})^2 \tag{5}$$

El lugar geométrico de **Y** es, pues, una semicircunferencia de centro $(0, 1/2X_{C_1})$ y radio $1/2X_{C_1}$, situada en el primer cuadrante del plano **Y**. [Véase Figura 8-12($c$).]




($a$) ($b$) Plano Z ($c$) Plano Y

Fig. 8-12

**LUGARES GEOMETRICOS DE INTENSIDADES DE CORRIENTE**

Consideremos el circuito paralelo de la Fig. 8-13($a$) con una rama constituida por la resistencia $R_1$ y reactancia $jX_L$ fijas, y una resistencia $R_2$ fija y reactancia $-jX_C$ variable en la otra. La admitancia total de las dos ramas en paralelo es

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$

Sumando el lugar de $\mathbf{Y}_2$ de la segunda rama al punto fijo $\mathbf{Y}_1$ se obtiene el lugar de $\mathbf{Y}_T$, como muestra la Figura 8-13($b$).

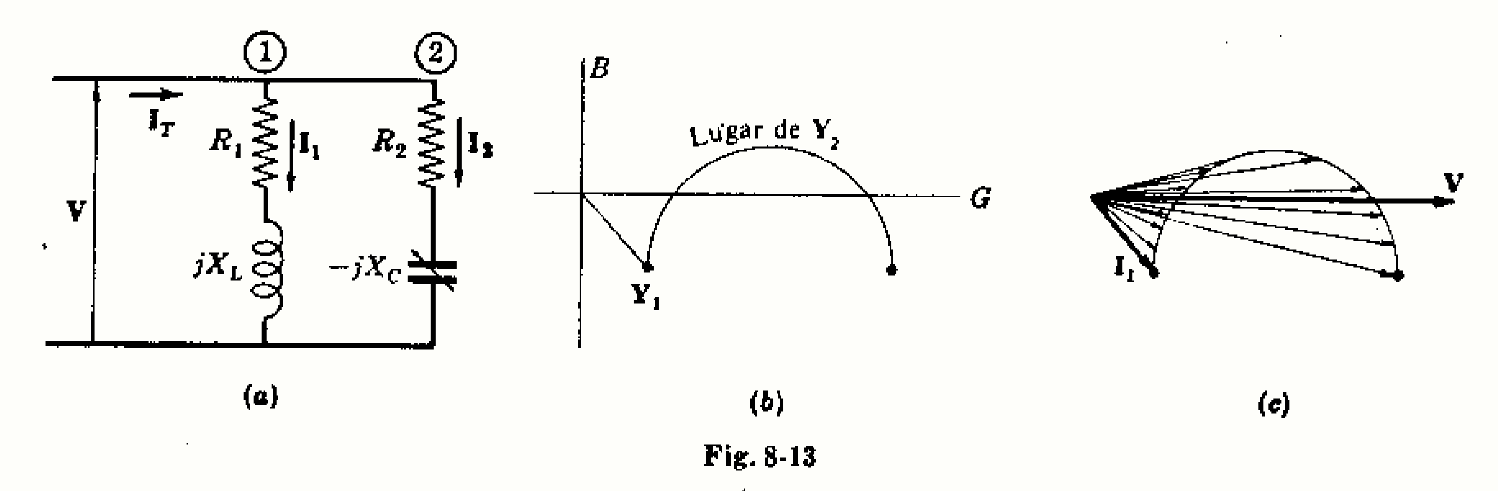



Fig. 8-13

La intensidad de corriente viene dada por $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$ y, en la Fig. 8-13($c$), puede observarse cómo al sumar la intensidad fija $\mathbf{I}_1$ a la corriente variable $\mathbf{I}_2$ se obtiene el lugar geométrico de la intensidad total. Este diagrama muestra que existen dos valores de $C$ para los cuales la intensidad de corriente total está en fase con la tensión $\mathbf{V}$.

Examinando la Fig. 8-13($c$) se desprende cómo se puede dar el caso de que no exista ningún valor de $C$ para el que el circuito entre en resonancia. Si el radio, $1/2R_2$, de la semicircunferencia del lugar es tal que la curva no corta al eje $\mathbf{V}$, no existirá ningún valor de $C$ que produzca resonancia. En los problemas que siguen veremos más aplicaciones de estos diagramas de lugares geométricos.

# Problemas resueltos

**8-1** En un circuito serie $RLC$, $R = 10$ ohmios, $L = 5$ milihenrios y $C = 12{,}5$ microfaradios. Deducir la variación del módulo y del argumento de la impedancia del circuito en función de $\omega$ en el intervalo $0{,}8\omega_0$ a $1{,}2\omega_0$.

En resonancia,

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{(5\times10^{-3})(12{,}5\times10^{-6})} = 4000 \text{ rad/s}$$

$$X_{L_0} = \omega_0 L = 4000(5\times10^{-3}) = 20\ \Omega$$

$$X_{C_0} = 1/\omega_0 C = 1/(4000\times12{,}5\times10^{-6}) = 20\ \Omega$$

Entonces,

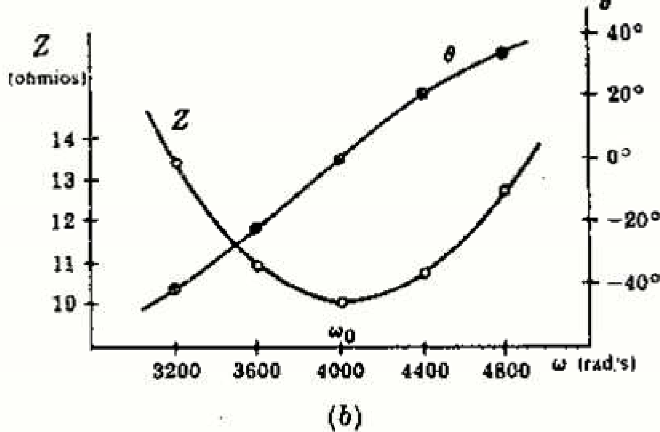
$$\mathbf{Z}_0 = R + j(X_{L_0} - X_{C_0}) = 10 + j(20-20) = 10\underline{/0^\circ}$$

Ahora bien, $X_L = \omega L$ y $X_C = 1/\omega C$, con lo que $X_L/X_{L_0} = \omega/\omega_0$ y $X_C/X_{C_0} = \omega_0/\omega$. Por consiguiente, podremos calcular los valores de $X_L$, $X_C$ y $\mathbf{Z}$ para otras frecuencias.

En la Fig. 8-14($a$) se da una tabla de reactancias e impedancias, y en la Fig. 8-14($b$) se encuentra el diagrama pedido.

| ω | $X_L$ | $X_C$ | **Z** | |
|---|---|---|---|---|
| 3200 | 16 | 25 | $10 - j9$ | $13,4\underline{/-42°}$ |
| 3600 | 18 | 22,2 | $10 - j4,2$ | $10,8\underline{/-22,8°}$ |
| 4000 | 20 | 20 | 10 | $10\underline{/0°}$ |
| 4400 | 22 | 18,2 | $10 + j3,8$ | $10,7\underline{/20,8°}$ |
| 4800 | 24 | 16,7 | $10 + j7,3$ | $12,4\underline{/36,2°}$ |

(a)




(b)

Fig. 8-14

**8-2** Al circuito serie del Problema 8-1 se le aplica una tensión $\mathbf{V} = 100\underline{/0°}$ voltios. Hallar la caída de tensión en cada elemento para $\omega = 3600$, 4000 y 4400 radianes por segundo. Trazar los diagramas fasoriales de tensión para cada una de las frecuencias.

Para $\omega = 3600$ rad/s, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (100\underline{/0°})/(10,8\underline{/-22,8°}) = 9,26\underline{/22,8°}$. Entonces,

$$\mathbf{V}_R = 9,26\underline{/22,8°}\,(10) = 92,6\underline{/22,8°}, \quad \mathbf{V}_L = 9,26\underline{/22,8°}\,(18\underline{/90°}) = 167\underline{/112,8°},$$

$$\mathbf{V}_C = 206\underline{/-67,2°}$$

Para $\omega = 4000$ rad/s, $\mathbf{I} = (100\underline{/0°})/(10\underline{/0°}) = 10\underline{/0°}$. Entonces,

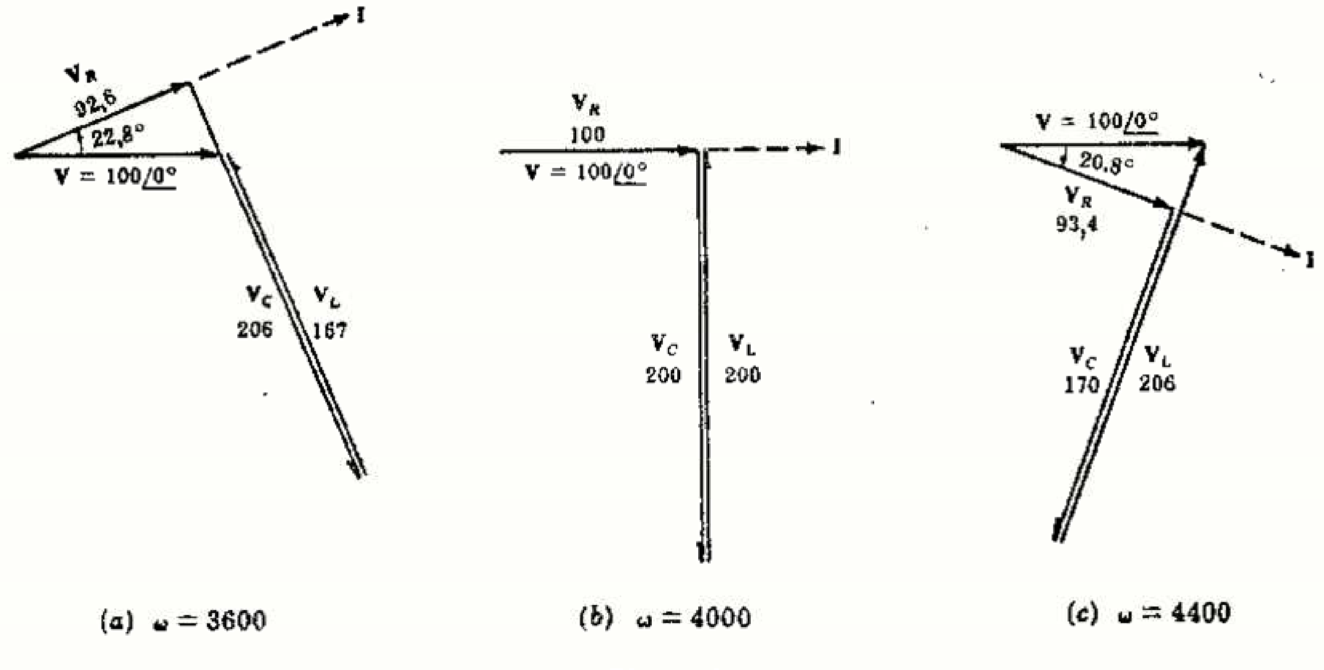
$$\mathbf{V}_R = 100\underline{/0°}, \quad \mathbf{V}_L = 10\underline{/0°}\,(20\underline{/90°}) = 200\underline{/90°}, \quad \mathbf{V}_C = 200\underline{/-90°}$$

Para $\omega = 4400$ rad/s, $\mathbf{I} = (100\underline{/0°})/(10,7\underline{/20,8°}) = 9,34\underline{/-20,8°}$. Entonces,

$$\mathbf{V}_R = 9,34\underline{/-20,8°}\,(10) = 93,4\underline{/-20,8°}, \quad \mathbf{V}_L = 9,34\underline{/-20,8°}\,(22\underline{/90°}) = 206\underline{/69,2°},$$

$$\mathbf{V}_C = 170\underline{/-110,8°}$$

En la Fig. 8-15 se representan los tres diagramas fasoriales de tensión. Obsérvese que el módulo de la tensión en cada elemento reactivo de un circuito serie próximo a la resonancia puede ser muchas veces superior al de la tensión aplicada.




(a) ω = 3600 (b) ω = 4000 (c) ω = 4400

Fig. 8-15

**8-3** La frecuencia de la tensión aplicada a un circuito serie de $R = 5$ ohmios, $L = 20$ milihenrios y una capacidad variable $C$ es $f = 1000$ hertzios. Hallar el valor de $C$ para la resonancia serie.

En resonancia, las reactancias inductiva y capacitiva son iguales, $2\pi fL = 1/2\pi fC$. Por tanto,

$$C = \frac{1}{L(2\pi f)^2} = \frac{1}{(20 \times 10^{-3})(2\pi \times 1000)^2} = 1,27\ \mu\text{F}$$

**8-4** A un circuito serie de $R = 5$ ohmios, $C = 20$ microfaradios y una bobina de autoinducción variable $L$ se le aplica una tensión $\mathbf{V} = 10\underline{/0^\circ}$ voltios con una pulsación igual a 1000 radianes por segundo. Se ajusta el valor de $L$ hasta que la caída de tensión en la resistencia sea máxima. Hallar las caídas de tensión en cada elemento.

Como $\mathbf{V}_R = R\mathbf{I}$, la caída de tensión máxima en la résistencia tendrá lugar en resonancia, esto es, cuando la intensidad de corriente es máxima. En estas condiciones, las reactancias han de ser iguales; por consiguiente,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000(20 \times 10^{-6})} = 50\ \Omega \qquad X_L = 50\ \Omega$$

y $\mathbf{Z} = R = 5\underline{/0^\circ}$. Ahora bien, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (10\underline{/0^\circ})/(5\underline{/0^\circ}) = 2\underline{/0^\circ}$ con lo que

$$\mathbf{V}_R = 2\underline{/0^\circ}(5) = 10\underline{/0^\circ}, \quad \mathbf{V}_L = (2\underline{/0^\circ})(50\underline{/90^\circ}) = 100\underline{/90^\circ} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_C = 100\underline{/-90^\circ}$$

**8-5** Hallar la frecuencia de resonancia, así como los valores de las frecuencias de media potencia de un circuito serie $RLC$ en el que $R = 100$ ohmios, $L = 0{,}5$ henrios y $C = 40$ microfaradios.

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0{,}5(40 \times 10^{-6})} = 224$ rad/s, con lo que $f_0 = \omega_0/2\pi = 35{,}7$ Hz (o c.p.s.).

A la frecuencia inferior de media potencia, $\omega_1$, la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva, la intensidad de corriente es 0,707 de su valor máximo, y como $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$, $|\mathbf{Z}|$ será 1,414 veces su valor para $\omega = \omega_0$. Ahora bien, $\mathbf{Z} = 100$ para $\omega = \omega_0$, con lo que $|\mathbf{Z}| = 141{,}4\ \Omega$ para $\omega = \omega_1$. Por consiguiente, $\mathbf{Z} = 100 - j(X_C - X_L) = 141{,}4\underline{/\theta}$, de donde $\cos\theta = R/Z = 100/141{,}4 = 0{,}707$, $\theta = -45^\circ$. Por otro lado,

$$X_C - X_L = R \quad \text{o bien} \quad 1/\omega_1 C - \omega_1 L = R \qquad (1)$$

Sustituyendo en (*1*) los valores dados y despejando $\omega_1$ resulta $\omega_1 = 145$ rad/s y $f_1 = 145/2\pi = 23{,}1$ Hz (o c.p.s.).

A la frecuencia superior de media potencia, $\omega_2$, la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva, $|\mathbf{Z}|$ sigue valiendo $141{,}4\ \Omega$ y $\theta = +45^\circ$. En estas condiciones,

$$X_L - X_C = R \quad \text{o bien} \quad \omega_2 L - 1/\omega_2 C = R \qquad (2)$$

Sustituyendo valores en (*2*) y despejando $\omega_2$, resulta $\omega_2 = 345$ rad/s y $f_2 = 55$ Hz (o c.p.s.). Ahora bien, como $\omega_0$ es la media geométrica de $\omega_1$ y $\omega_2$,

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \sqrt{145 \times 345} = 224 \text{ rad/s}$$

**8-6** Demostrar que la pulsación $\omega_0$ de la frecuencia de resonancia de un circuito serie $RLC$ es la media geométrica de las frecuencias inferior y superior de media potencia, $\omega_1$ y $\omega_2$, respectivamente.

Como hemos visto en el Problema 8-5, $1/\omega_1 C - \omega_1 L = R$ para $\omega_1$, y $\omega_2 L - 1/\omega_2 C = R$ para $\omega_2$. Por tanto,

$$1/\omega_1 C - \omega_1 L = \omega_2 L - 1/\omega_2 C \qquad (1)$$

Multiplicando por $C$ y sustituyendo $\omega_0^2 = 1/LC$ en (*1*) se obtiene

$$1/\omega_1 - \omega_1/\omega_0^2 = \omega_2/\omega_0^2 - 1/\omega_2 \quad \text{o bien} \quad 1/\omega_1 + 1/\omega_2 = (\omega_1 + \omega_2)/\omega_0^2$$

de donde $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

**8-7** La tensión aplicada a un circuito serie con $R = 50$ ohmios, $L = 0{,}05$ henrios y $C = 20$ microfaradios es $\mathbf{V} = 100\underline{/0^\circ}$ voltios a una frecuencia variable. Hallar la tensión máxima en la bobina al variar la frecuencia.

El módulo de la impedancia en función de $\omega$ es $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$. Por tanto, el módulo de la intensidad de corriente es $I = V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$.

El módulo de la tensión en $L$ es

$$V_L = \omega L I = \omega L V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \qquad (1)$$

Hallando la derivada $dV_L/d\omega$ en la ecuación (*1*), igualándola a cero y despejando el valor de $\omega$, se deduce dicho $\omega$ para el que $V_L$ es máximo.

$$\frac{dV_L}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\,\omega L V(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} L V - \omega L V \frac{1}{2}(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}(2\omega L^2 - 2/\omega^3 C^2)}{R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2} \qquad (2)$$

Sacando factor común $LV(R^2 + \omega^2L^2 - 2L/C + 1/\omega^2C^2)^{-1/2}$ en (2), e igualando a cero el numerador resulta la ecuación

$$R^2 - 2L/C + 2/\omega^2C^2 = 0$$

de donde $$\omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} = 1/\sqrt{LC}\sqrt{\frac{2}{2 - R^2C/L}} \qquad (3)$$

Ahora bien, como $Q_0 = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR$, $Q_0^2 = L/R^2C$; sustituyendo en (3)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}} \qquad (4)$$

Sustituyendo los valores dados en la ecuación (3),

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2(0{,}05)(20 \times 10^{-6}) - (50 \times 20 \times 10^{-6})^2}} = 1414 \text{ rad/s}$$

Es decir, $X_L = \omega L = 1414(0{,}05) = 70{,}7\,\Omega$, $X_C = 1/\omega C = 1/(1414 \times 20 \times 10^{-6}) = 35{,}4\,\Omega$ y $\mathbf{Z} = 50 + j(70{,}7 - 35{,}4) = 50 + j35{,}4 = 61{,}2\underline{/35{,}3^\circ}\,\Omega$. Entonces, $I = V/Z = 100/61{,}2 = 1{,}635$ A y

$$V_{L(\max)} = 1{,}635(70{,}7) = 115{,}5 \text{ V}$$

La ecuación (4) indica que para $Q$ grande, la tensión máxima en $L$ ocurre cuando $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$. Para valores grandes de $Q$ las tensiones máximas en $R$ y $C$ se obtienen para $\omega = \omega_0$. Para valores pequeños de $Q$, $V_C$ es máxima por debajo de $\omega_0$ y $V_L$ lo es por encima. (Véase Problema 8-28.)

**8-8** El circuito de la Fig. 8-16 representa la conexión en paralelo de un condensador y una bobina, siendo $R_L$ la resistencia óhmica de esta última. Hallar la frecuencia de resonancia del circuito.

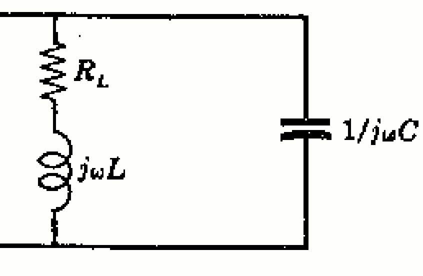


Fig. 8-16

La admitancia total del circuito es

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2L^2}\right)$$

En resonancia, la parte imaginaria es cero; por tanto,

$$\frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2L^2} = \omega_0 C \qquad \text{de donde} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R_L^2C}{L}}$$

Si la resistencia de la bobina es pequeña comparada con $\omega_0 L$, la frecuencia de resonancia viene dada por $1/\sqrt{LC}$.

**8-9** Hallar la pulsación $\omega_0$ de la frecuencia de resonancia del circuito de dos ramas en paralelo representado en la Fig. 8-17. Si se aumenta el valor de la resistencia de la rama $RC$, ¿cuál será el valor máximo para el que puede existir resonancia?

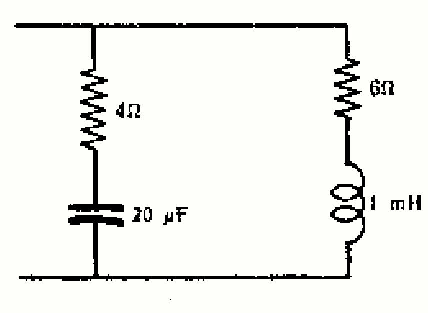


Fig. 8-17

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 20 \times 10^{-6}}}\sqrt{\frac{6^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}{4^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}} = 4540 \text{ rad/s}$$

El valor del numerador del subradical es $36 - 50 = -14$. Por tanto, dicho subradical tiene una raíz real si el denominador es negativo, es decir, si $R_C^2 < L/C$ o bien $R_C < 7{,}07\,\Omega$. Cuando $R_C$ tienda a $7{,}07\,\Omega$, la pulsación $\omega_0$ tiende a infinito.

Si lo que se aumenta es el valor de $R_L$, la pulsación $\omega_0$ tiende hacia cero cuando $R_L$ se aproxima a $7{,}07\,\Omega$.

**8-10** Hallar los valores de $L$ para los que la pulsación de la frecuencia de resonancia del circuito de la Fig. 8-18 es $\omega = 5000$ radianes por segundo.

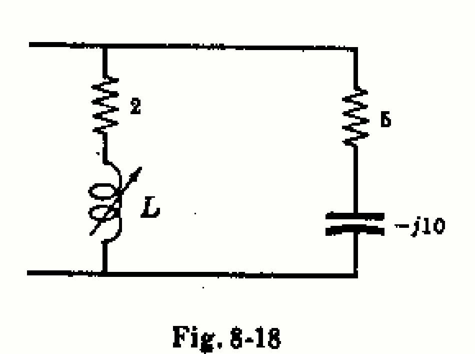



Fig. 8-18

La admitancia total es

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2+jX_L} + \frac{1}{5-j10}$$

$$= \left(\frac{2}{4+X_L^2} + \frac{5}{125}\right) + j\left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4+X_L^2}\right)$$

Igualando a cero la parte imaginaria,

$$10/125 = X_L/(4+X_L^2) \quad \text{o bien} \quad X_L^2 - 12{,}5X_L + 4 = 0 \qquad (1)$$

Las raíces de (1) son $X_L = 12{,}17$ y $X_L = 0{,}33$. Sustituyendo estos valores en la expresión $X_L = \omega L$, se obtienen las condiciones de resonancia del circuito, $L = 2{,}43$ mH y $L = 0{,}066$ mH.

**8-11** Hallar el valor de $C$ para el que entra en resonancia el circuito de la Fig. 8-19 con $\omega = 5000$ radianes por segundo.

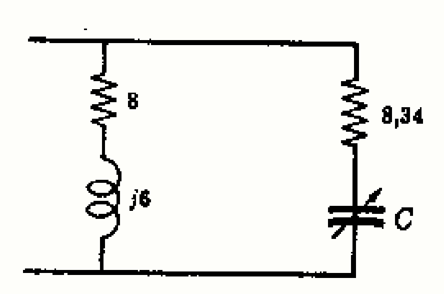



Fig. 8-19

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{8+j6} + \frac{1}{8{,}34-jX_C}$$

$$= \left(\frac{8}{100} + \frac{8{,}34}{69{,}5+X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{69{,}5+X_C^2} - \frac{6}{100}\right)$$


En resonancia, la admitancia compleja es un número real. Por tanto,

$$X_C/(69{,}5 + X_C^2) = 6/100 \qquad \text{y} \qquad X_C^2 - 16{,}7X_C + 69{,}5 = 0$$

de donde $X_C = 8{,}35\ \Omega$. Sustituyendo este valor en $X_C = 1/\omega C$ y despejando $C$ resulta $C = 24\ \mu$F.

**8-12** Hallar el valor de $R_L$ y $R_C$ que hacen entrar en resonancia al circuito de la Fig. 8-20 cualquiera que sea la frecuencia.

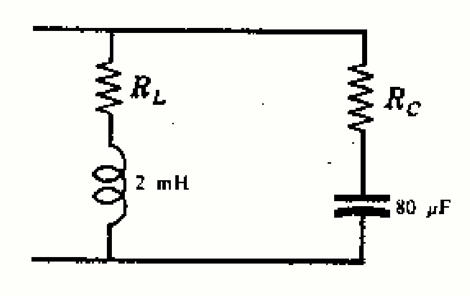



Fig. 8-20

La pulsación de la frecuencia de resonancia del circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

en donde $\omega_0$ puede tomar cualquier valor siempre $R_L^2 = R_C^2 = L/C$. Como $L/C = (2 \times 10^{-3})/(80 \times 10^{-6}) = 25$,

$$R_L = R_C = \sqrt{25} = 5\ \Omega$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado para valores de $\omega$ comprendidos entre 2500 y 5000 rad/s.

**8-13** Demostrar que en un circuito serie $RLC$ el factor de calidad $Q_0 = \omega_0 L/R = f_0/AB$.

A las frecuencias de media potencia la reactancia es igual a la resistencia.
A la frecuencia inferior de media potencia la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva. Por tanto,

$$1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R \qquad \text{de donde} \qquad f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L}$$

A la frecuencia superior de media potencia la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva. Por tanto,

$$2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R \qquad \text{de donde} \qquad f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L}$$

Como $AB = f_2 - f_1$, el ancho de banda es $AB = R/2\pi L$. En resumen,

$$Q_0 = f_0/\text{AB} = 2\pi f_0 L/R = \omega_0 L/R$$

**8-14** Hallar el valor del factor de calidad $Q_0$ de un circuito serie con $R = 20$ ohmios, $L = 0{,}05$ henrios y $C = 1$ microfaradio utilizando cada una de las siguientes expresiones para $Q_0$: $\omega_0 L/R$, $1/\omega_0 CR$ y $f_0/AB$.

La pulsación de la frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0{,}05 \times 10^{-6}} = 4470$ rad/s, con lo que $f_0 = \omega_0/2\pi = 712$ Hz. Por tanto,

$$Q_0 = \omega_0 L/R = 4470(0{,}05)/20 = 11{,}2$$

o bien
$$Q_0 = 1/\omega_0 CR = 1/(4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11{,}2$$

En el Problema 8-13, para la frecuencia inferior de media potencia, $1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R$. Sustituyendo,

$$1/(2\pi f_1 \times 10^{-6}) - 2\pi f_1(0{,}05) = 20 \quad \text{y} \quad f_1 = 681 \text{ Hz}$$

Para la frecuencia superior de media potencia, $2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R$. Sustituyendo, $f_2 = 745$ Hz.

Por consiguiente, AB = (745 − 681) y, entonces,

$$Q_0 = f_0/\text{AB} = 712/(745 - 681) = 11{,}1$$

**8-15** Obtener el lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por el circuito de la Figura 8-21($a$) que tiene una reactancia inductiva variable $X_L$.

El lugar geométrico de **Y** es una semicircunferencia de radio $r = 1/2R = 0{,}1$, como indica la Figura 8-21($b$).

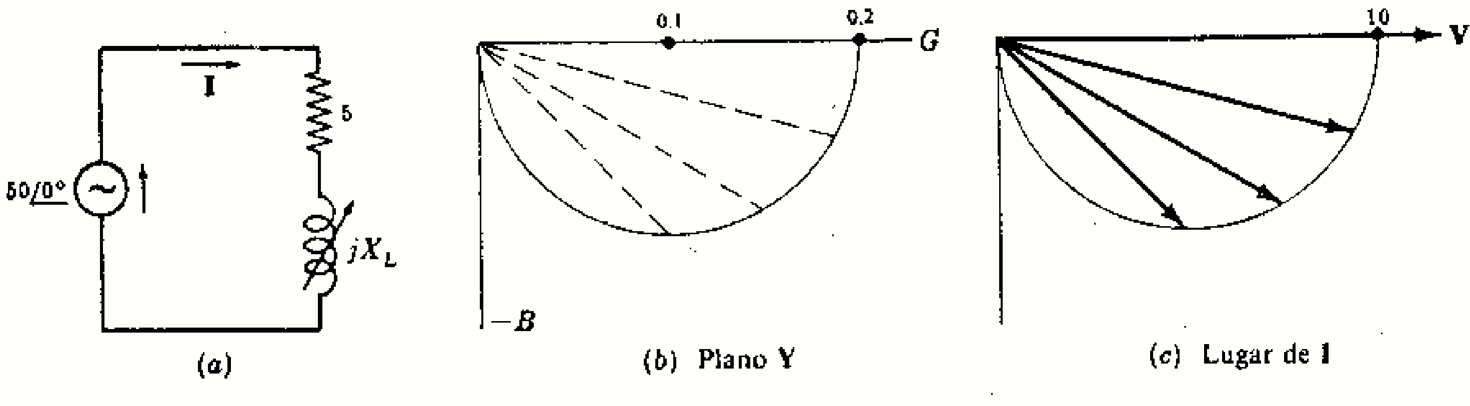



Fig. 8-21

En estas condiciones, el lugar geométrico de la intensidad de corriente se obtiene de la expresión **I** = **VY**, en donde **V** = 50/0° voltios. El lugar geométrico de la intensidad es análogo al correspondiente de **Y** y tiene un valor máximo de 10 A cuando $X_L = 0$. [Véase Figura 8-21($c$).]

**8-16** Obtener el lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por el circuito de la Figura 8-22($a$) que tiene una resistencia variable $R$ y una reactancia capacitiva fija.

El lugar geométrico de **Y** es una semicircunferencia de radio $r = 1/2X_C = 0{,}1$, como indica la Figura 8-22($b$).

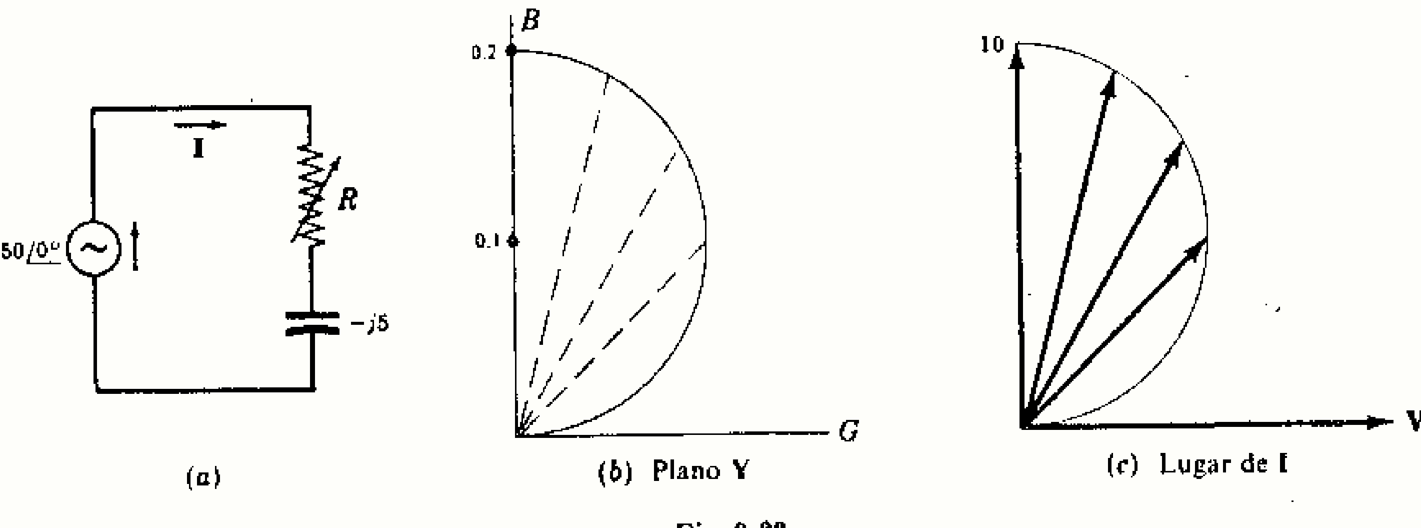



Fig. 8-22

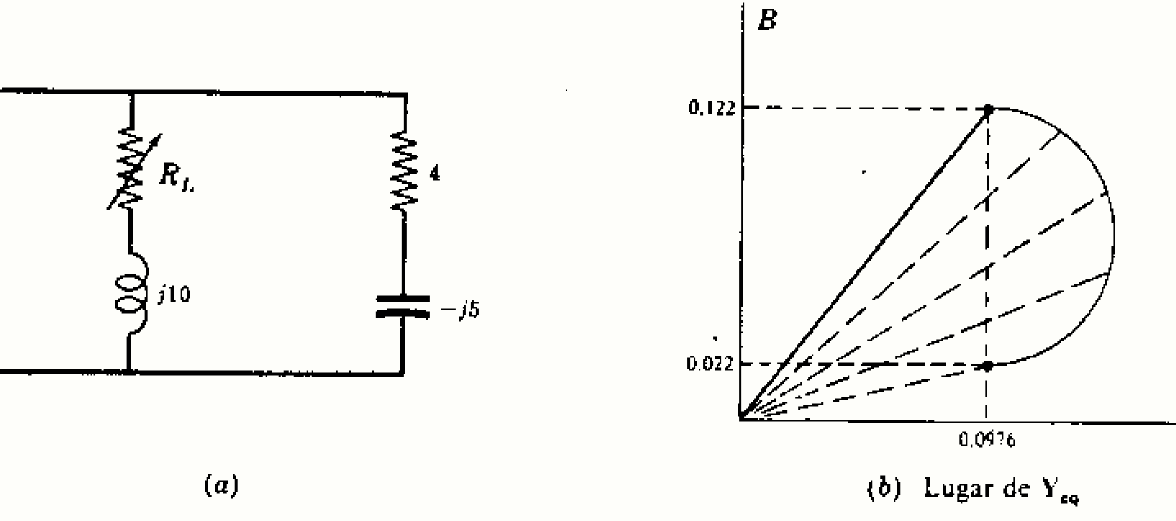
El lugar geométrico de la intensidad de corriente se obtiene de la expresión **I** = **VY**, en donde **V** = 50/0° voltios. La intensidad tiene un valor máximo de 10 A para $R = 0$. [Véase Figura 8-22($c$).]

**8-17** Hallar el valor de $R_L$ para el que existe resonancia en el circuito de la Fig. 8-23($a$). Trazar el lugar geométrico de **Y** y explicar los resultados obtenidos.

La admitancia total es

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R_L + j10} + \frac{1}{4 - j5} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + 100} + \frac{4}{41}\right) + j\left(\frac{5}{41} - \frac{10}{R_L^2 + 100}\right)$$

En resonancia, la parte imaginaria de **Y** debe ser nula, es decir, $5/41 = 10/(R_L^2 + 100)$, de donde $R_L^2 = -18$. Por tanto, no existe ningún valor de $R_L$ que dé lugar a resonancia.



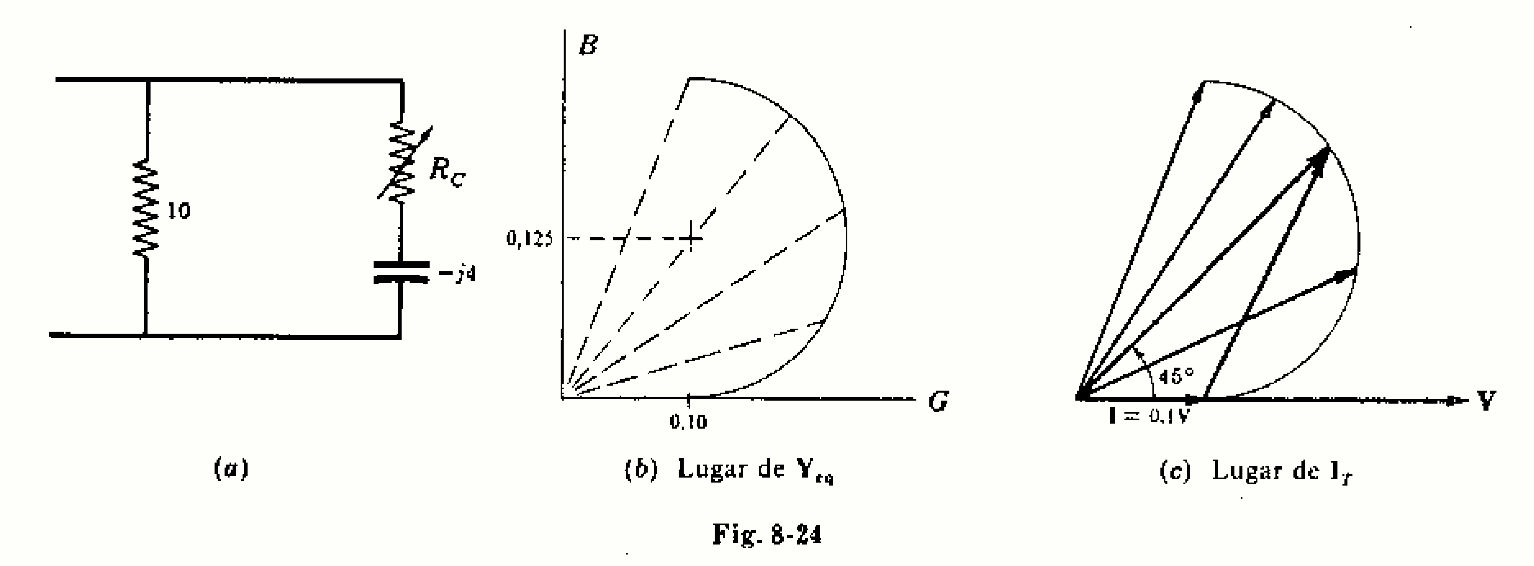

($a$) ($b$) Lugar de $\mathbf{Y}_{eq}$

**Fig. 8-23**

La admitancia de la rama fija es $1/(4 - j5) = 0{,}0976 + j0{,}122$. El radio de la semicircunferencia correspondiente al lugar geométrico de esta rama variable es $r = 1/2X_L = 1/20 = 0{,}05$, con lo que su diámetro es 0,10. Como la susceptancia capacitiva de la rama fija es 0,122, el lugar geométrico de la rama variable no corta al eje real y, en consecuencia, no es posible el fenómeno de la resonancia.

**8-18** Trazar el lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por el circuito de la Fig. 8-24($a$) y hallar el valor de $R_C$ para el que la diferencia de fase entre **V** e **I** sea de 45°.

La admitancia de la rama fija es $1/R = 0{,}1$ ℧. El radio de la semicircunferencia del lugar geométrico de la rama $RC$ es $r = 1/2X_C = 1/8 = 0{,}125$. [Véase Figura 8-24($b$).]




($a$) ($b$) Lugar de $\mathbf{Y}_{eq}$ ($c$) Lugar de $\mathbf{I}_T$

**Fig. 8-24**

En la Fig. 8-24($c$) se observa que la intensidad está adelantada respecto de la tensión un ángulo de 45° en el punto indicado. Las partes real e imaginaria de $\mathbf{Y}_T$ deben ser iguales. Como

$$\mathbf{Y}_T = \left(0{,}1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16}\right) + j\left(\frac{4}{R_C^2 + 16}\right),$$

$$0{,}1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16} = \frac{4}{R_C^2 + 16} \quad \text{de donde } R_C = 2\ \Omega$$

**8-19** En el Problema 6-18 se ha estudiado el circuito de la Fig. 8-25. Se obtuvo que el valor absoluto de $\mathbf{V}_{AB}$ es constante e igual a $V_{AB} = \frac{1}{2}V$, y que el fasor $\mathbf{V}_{AB}$ está retrasado respecto de la tensión aplicada $\mathbf{V}$ un ángulo $2\theta$, siendo $\theta = \text{arc tg } \omega L/R$. Representar gráficamente estos resultados.

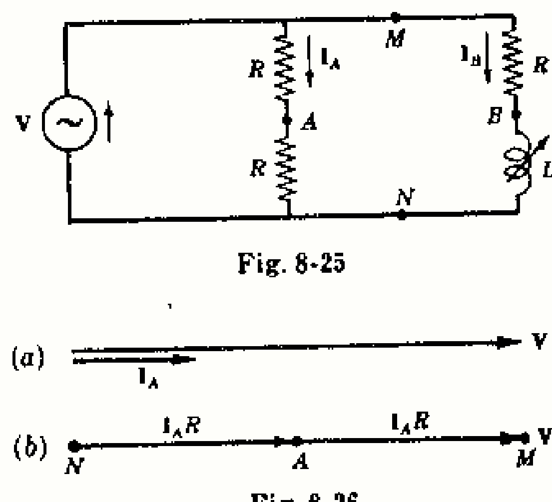



Fig. 8-25

En la primera rama, $\mathbf{Z} = 2R$, $\mathbf{Y} = 1/2R$ y la intensidad de corriente es $\mathbf{I}_A = \mathbf{V}/2R$. La caída de tensión en la resistencia es

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}R = \mathbf{V}/2$$

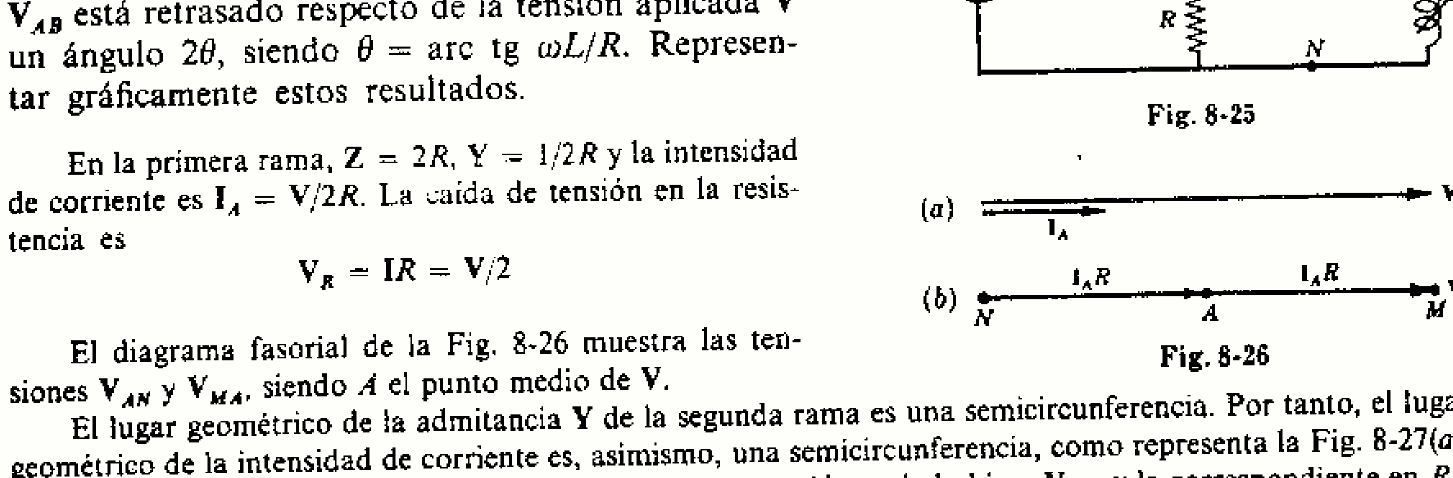



Fig. 8-26

El diagrama fasorial de la Fig. 8-26 muestra las tensiones $\mathbf{V}_{AN}$ y $\mathbf{V}_{MA}$, siendo $A$ el punto medio de $\mathbf{V}$.

El lugar geométrico de la admitancia $\mathbf{Y}$ de la segunda rama es una semicircunferencia. Por tanto, el lugar geométrico de la intensidad de corriente es, asimismo, una semicircunferencia, como representa la Fig. 8-27($a$). En el diagrama fasorial de tensiones aparece la caída de tensión en la bobina, $\mathbf{V}_{BN}$, y la correspondiente en $R_1$, $\mathbf{V}_{MB}$. La tensión $\mathbf{V}$ es la suma de ambas caídas de tensión. Obsérvese que $\mathbf{I}_B$ está retrasada 90° respecto de $\mathbf{V}_{BN}$.

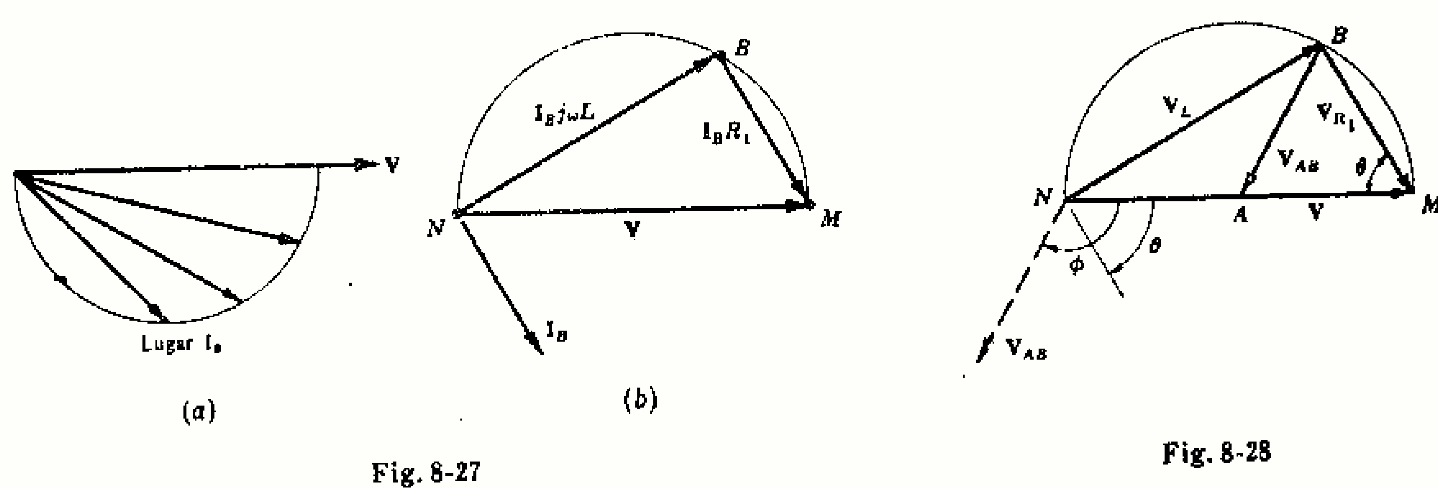



Fig. 8-27

Fig. 8-28

Las tensiones $\mathbf{V}_{BN}$ y $\mathbf{V}_{MB}$ son siempre perpendiculares, cualquiera que sea el valor de $L$. Al variar $L$ desde 0 hasta $\infty$, el punto $B$ se traslada de $M$ a $N$ por la semicircunferencia del lugar.

En la Fig. 8-28 se han superpuesto los dos diagramas fasoriales de las Figs. 8-26($b$) y 8-27($b$). Se puede apreciar que el radio de la semicircunferencia es $\mathbf{V}_{AB}$, que vale $\frac{1}{2}V$ y que permanece constante en módulo. Además, el ángulo $\phi$ de retraso de $\mathbf{V}_{AB}$ respecto de $\mathbf{V}$ es igual a $2\theta$, en donde $\theta = \text{arc tg } \omega L/R$.

**8-20** El lugar geométrico de la intensidad de corriente total que circula por un circuito paralelo de dos ramas se ha representado en la Fig. 8-29. Determinar los elementos de cada rama especificando qué elemento es variable.

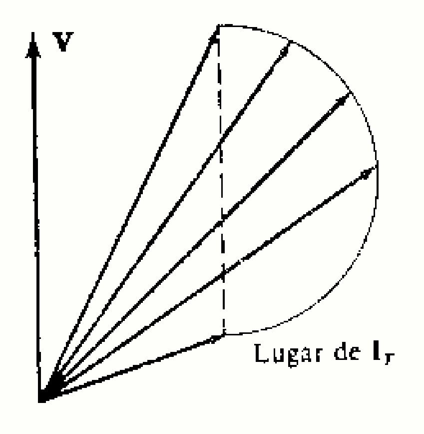



Fig. 8-29

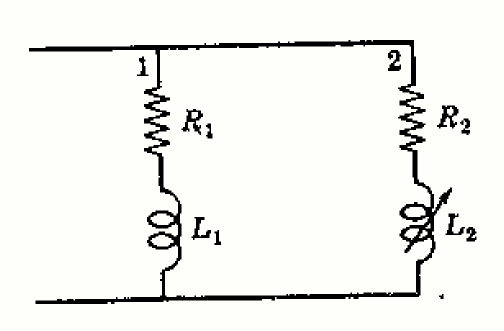



Fig. 8-30

En el punto inferior de la semicircunferencia la intensidad de corriente que circula por la rama variable es nula. Por tanto, en este punto la corriente total circularía enteramente por la rama 1 cuyos elementos son fijos. Ahora bien, esta corriente está retrasada respecto de la tensión, con lo que la rama fija deberá contener una resistencia $R_1$ y una bobina $L_1$.

La semicircunferencia del lugar geométrico de la intensidad que circula por la rama 2 indica que la corriente está en fase con la tensión en su valor máximo. En los otros puntos del lugar, $I_2$ está retrasada respecto de V. Por tanto, la rama 2 contiene una resistencia $R_2$ y una bobina de autoinducción variable $L_2$, como se indica en la Figura 8-30.

# Problemas propuestos

**8-21** La tensión aplicada al circuito serie *RLC* de la Fig. 8-31 es $v = 70{,}7$ sen $(500t + 30°)$ voltios y la intensidad de la corriente que circula vale $i = 2{,}83$ sen $(500t + 30°)$ amperios. Hallar los valores de $R$ y de $C$.
*Sol.* $R = 25\ \Omega$; $C = 8\ \mu F$.

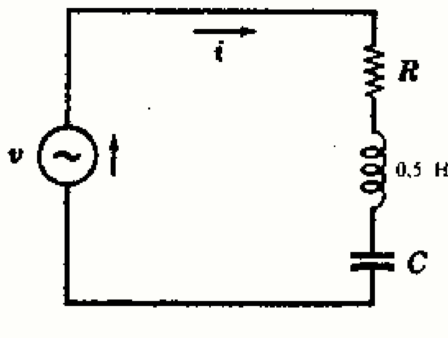


Fig. 8-31

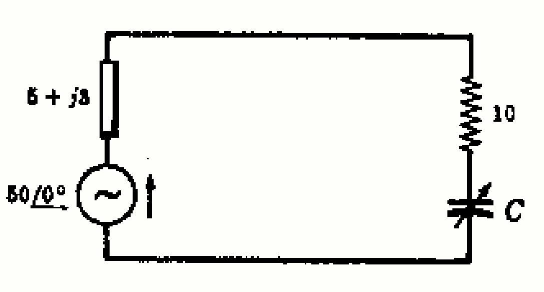


Fig. 8-32

**8-22** En el circuito de la Fig. 8-32 la impedancia de la fuente es $5 + j3$ ohmios y su frecuencia 2000 hertzios. ¿Para qué valor de $C$ la potencia disipada en la resistencia de 10 ohmios es máxima?
*Sol.* $C = 26{,}6\ \mu F$; $P = 111$ W.

**8-23** El ángulo de fase de un circuito serie *RLC* con $L = 25$ milihenrios y $C = 75$ microfaradios a la pulsación $\omega = 2000$ radianes por segundo es de 25° en retraso. ¿A qué pulsación el ángulo de fase es de 25° en adelanto? Hallar $\omega_0$. *Sol.* $\omega = 267$ rad/s; $\omega_0 = 730$ rad/s.

**8-24** La tensión aplicada a un circuito serie *RLC* con $L = 0{,}5$ henrios es $v = 70{,}7$ sen $(500 + 30°)$ voltios y la intensidad de la corriente que circula vale $i = 1{,}5$ sen $(500t)$ amperios. Hallar los valores de $R$ y de $C$. ¿Cuál será la pulsación $\omega_0$ de resonancia del circuito? *Sol.* $R = 40{,}8\ \Omega$; $C = 8{,}83\ \mu F$; $\omega_0 = 476$ rad/s.

**8-25** A un circuito serie con $R = 10$ ohmios, $L = 0{,}2$ henrios y $C = 40$ microfaradios se le aplica una tensión de frecuencia variable. Calcular las frecuencias $f_1$, $f_0$ y $f_2$ a las que la corriente está, respecto de la tensión, adelantada y retrasada 30°, en fase, respectivamente. *Sol.* $f_1 = 54{,}0$ Hz; $f_0 = 56{,}3$ Hz; $f_2 = 58{,}6$ Hz (o c.p.s.).

**8-26** El ángulo de fase de un circuito serie *RLC* con $R = 25$ ohmios y $L = 0{,}6$ henrios a una frecuencia de 40 hertzios es de 60° en adelanto. Hallar la frecuencia de resonancia del circuito. *Sol.* $f_0 = 45{,}4$ Hz (o c.p.s.).

**8-27** En el circuito serie de la Fig. 8-33 se varía la frecuencia hasta que la tensión en el condensador sea máxima. Si la tensión eficaz aplicada es de 100 voltios, calcular la tensión máxima en el condensador y la pulsación a la que tiene lugar.
*Sol.* $V_C = 115{,}5$ V; $\omega = 707$ rad/s.

**8-28** El factor de calidad del circuito serie del Problema 8-27 es, como se ha visto, $Q_0 = \omega_0 L/R = 1$. Tomando el valor $R = 10$ ohmios, con lo que $Q_0 = 5$, hallar la pulsación a la cual la tensión en el condensador es máxima. Repetir el problema para $R = 5$ ohmios.
*Sol.* $\omega = 990$; $998$ rad/s. *Nota.* Para $Q_0 \geq 10$ se puede suponer que las tensiones máximas en $R$, $L$ y $C$ ocurren todas a la frecuencia de resonancia $f_0$ o pulsación $\omega_0$.

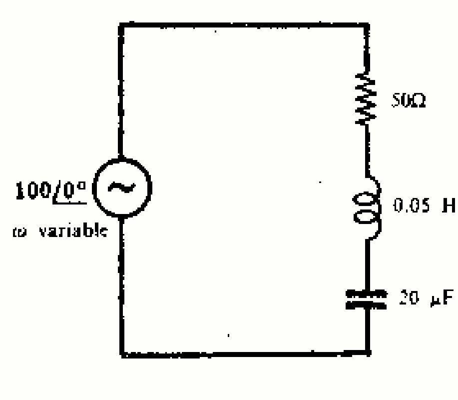


Fig. 8-33

**8-29** Para poner de manifiesto el efecto del factor de calidad $Q$ sobre el módulo de la intensidad de corriente a frecuencias próximas a la de resonancia trazar las gráficas de variación de $\mathbf{Y}$ con respecto a $\omega$ para los siguientes circuitos: Circuito 1: $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}05$ henrios y $C = 20$ microfaradios. Circuito 2: $R = 10$ ohmios, $L = 0{,}05$ henrios y $C = 20$ microfaradios.

**8-30** En el circuito paralelo de la Fig. 8-34, $L = 0{,}2$ henrios y $C = 30$ microfaradios. Hallar la pulsación de resonancia si $R_L = 0$ y compararla con la que resulta para $R = 50$ ohmios. *Sol.* $\omega_0 = 408$; $\omega_0 = 323$ rad/s.

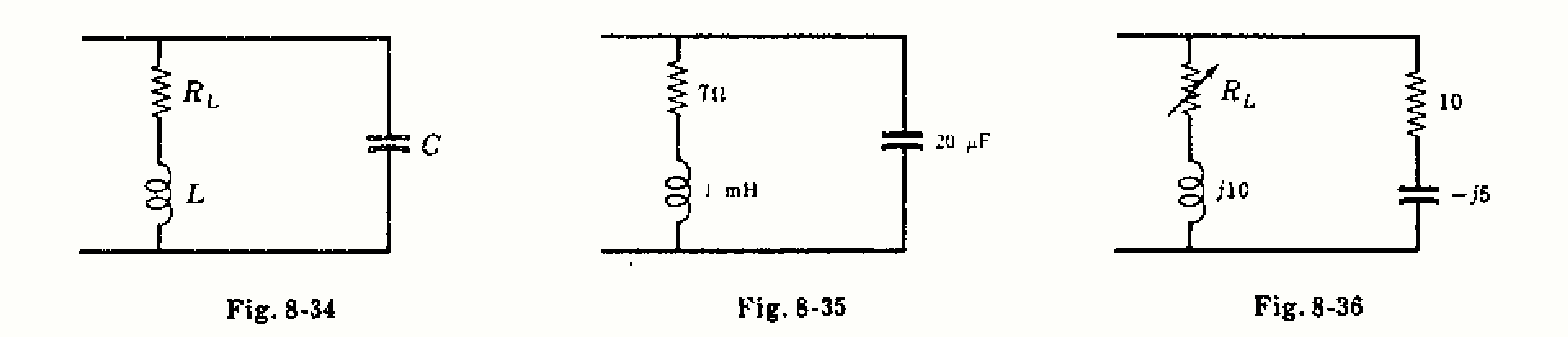



Fig. 8-34 Fig. 8-35 Fig. 8-36

**8-31** Hallar la frecuencia de resonancia $f_0$ del circuito paralelo de la Figura 8-35.
*Sol.* $f_0 = 159$ Hz (o c.p.s.).

**8-32** En el Problema 8-31, ¿para qué valor de una resistencia que se colocara en serie con el condensador resultaría una frecuencia de resonancia de 300 hertzios? *Sol.* $R_C = 6\ \Omega$.

**8-33** Hallar el valor de $R_L$ para el que el circuito paralelo de la Fig. 8-36 entra en resonancia.
*Sol.* $R_L = 12{,}25\ \Omega$.

**8-34** ¿Para qué valor de $X_L$ entra en resonancia el circuito paralelo de la Fig. 8-37? Trazar el lugar geométrico de $\mathbf{Y}$ y explicar el resultado.

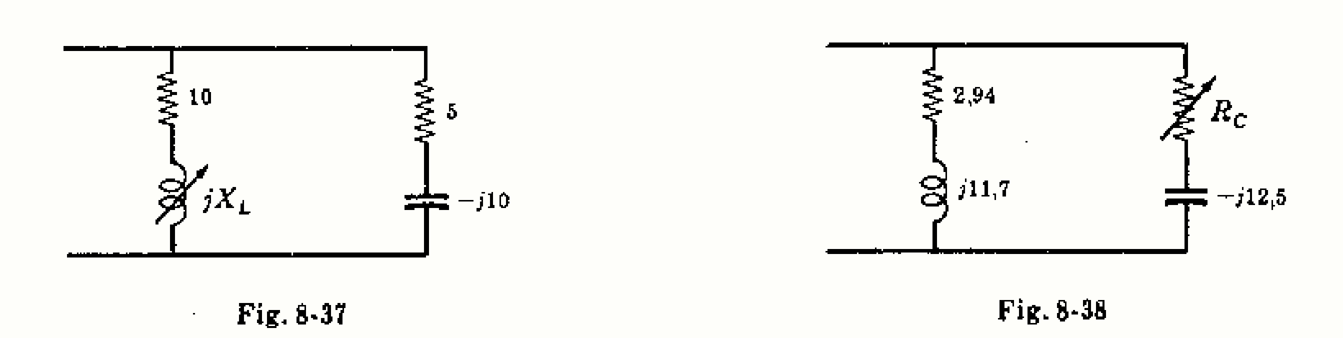



Fig. 8-37 Fig. 8-38

**8-35** Hallar el valor de $R_C$ para el que el circuito paralelo de la Fig. 8-38 entra en resonancia. Trazar el lugar geométrico de $\mathbf{Y}$ y explicar el resultado. *Sol.* $R_C = 0$.

**8-36** El circuito paralelo de la Fig. 8-39 entra en resonancia para $X_C = 9{,}68$ ohmios y $X_C = 1{,}65$ ohmios. Determinar el fasor intensidad de corriente total para cada valor de la reactancia capacitiva.
*Sol.* $1{,}83\angle 0°$ A; $3{,}61\angle 0°$ A.

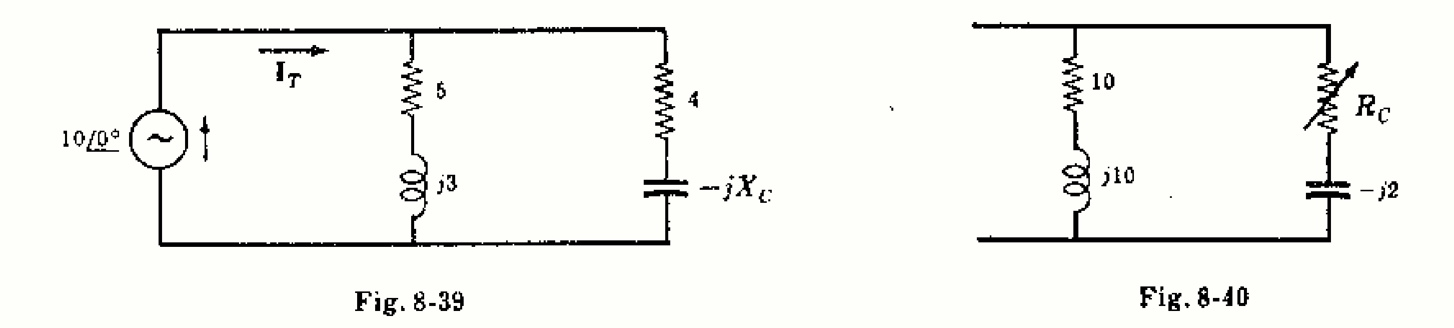



Fig. 8-39 Fig. 8-40

**8-37** ¿A qué valor de $R_C$ entra en resonancia el circuito paralelo de la Figura 8-40? *Sol.* $R_C = 6\ \Omega$.

**8-38** La tensión aplicada a un circuito serie formado por una reactancia inductiva fija $X_L = 5$ ohmios y una resistencia variable $R$ es $\mathbf{V} = 50\underline{/0^\circ}$ voltios. Trazar los lugares geométricos de la admitancia y de la intensidad de corriente.

**8-39** A un circuito serie formado por una resistencia fija $R = 5$ ohmios y una capacidad variable $C$ se le aplica la tensión $\mathbf{V} = 50\underline{/0^\circ}$ voltios. Trazar los lugares geométricos de la admitancia y de la intensidad de corriente.

**8-40** En el circuito paralelo de la Fig. 8-41 la autoinducción de la bobina puede variar sin límites. Trazar el lugar geométrico de la admitancia y demostrar que no es posible la resonancia.

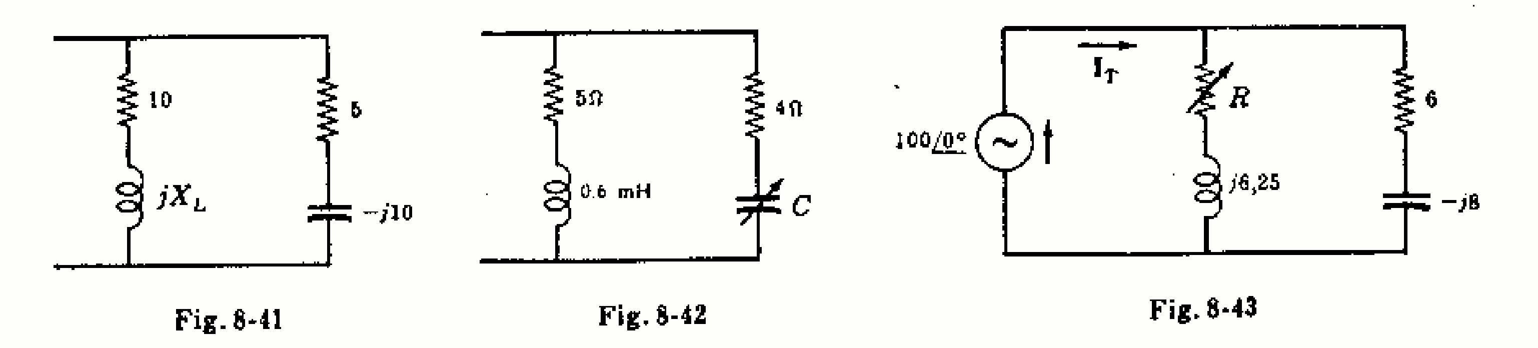



Fig. 8-41 Fig. 8-42 Fig. 8-43

**8-41** El circuito de la Fig. 8-42 entra en resonancia para dos valores de la capacidad del condensador $C$ a la pulsación $\omega = 5000$ radianes por segundo. Calcular ambos valores de $C$ y trazar el lugar geométrico de la admitancia. *Sol.* 20,6 μF; 121 μF.

**8-42** En el circuito paralelo de la Fig. 8-43 la intensidad de corriente $\mathbf{I}_T$ está retrasada respecto de la tensión aplicada un ángulo de 53,1° cuando $R = 0$. Si $R = \infty$ (circuito abierto), $\mathbf{I}_T$ adelanta el mismo ángulo respecto de la tensión. Trazar el lugar geométrico de la admitancia y explicar el resultado. ¿A qué valor de $R$ entraría en resonancia el circuito? *Sol.* $R = 6{,}25\ \Omega$.

**8-43** Hallar el valor de $R$ para que entre en resonancia el circuito paralelo de la Fig. 8-44 y trazar el lugar geométrico de la admitancia explicando el resultado.

**8-44** En el Problema 8-43, ¿qué cambio en la reactancia inductiva hace posible la entrada en resonancia para algún valor de la resistencia variable $R$? *Sol.* $X_L \leqq 8{,}2\ \Omega$.

**8-45** Hallar el valor de $R$ para el que entra en resonancia el circuito paralelo de la Fig. 8-45 y trazar el diagrama de su lugar geométrico. *Sol.* $R = 5{,}34\ \Omega$.

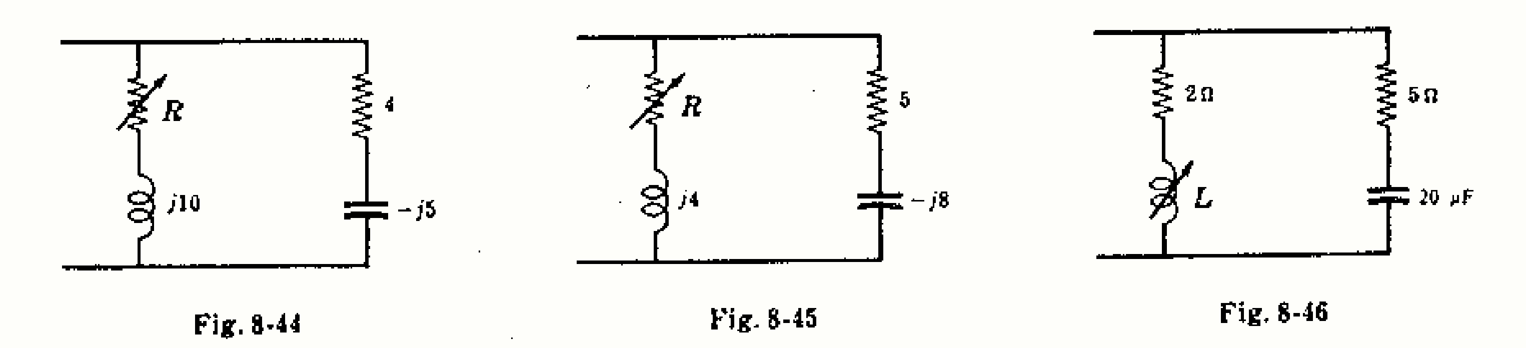



Fig. 8-44 Fig. 8-45 Fig. 8-46

**8-46** En el circuito paralelo del Problema 8-11 se conseguía la resonancia variando la capacidad de $C$. Mediante el diagrama del lugar geométrico de la admitancia explicar por qué se obtuvo un solo valor de $C$ en lugar de dos para la resonancia.

**8-47** El circuito paralelo de la Fig. 8-46 se consigue entre en resonancia variando el valor la autoinducción $L$ de la bobina. Construir el diagrama del lugar geométrico de la admitancia y determinar los valores de $L$ para la resonancia si $\omega = 5000$ radianes por segundo. *Sol.* $L = 2{,}43$; 0,066 mH.

**8-48** En el diagrama del lugar geométrico de la admitancia del Problema 8-47 hallar el valor de $L$ para el cual la intensidad de corriente total es mínima. ¿Cuál será el módulo de esta intensidad si el valor eficaz de la tensión aplicada es 100 voltios? *Sol.* $L = 2{,}95$ mH; $I_T = 5{,}1$ A.

**8-49** En el Problema 8-47 aplicar una tensión $V = 150\underline{/75^\circ}$ voltios y obtener $I_T$ para cada valor de $L$ que origine la entrada en resonancia del circuito.
*Sol.* $I_T = 7{,}98\underline{/75^\circ}$ ; $78{,}9\underline{/75^\circ}$ A.

**8-50** En el circuito de fase variable de la Fig. 8-47 la fase de la tensión $V_{AB}$ puede variar desde 10° hasta 170° en retraso. A la frecuencia de 60 hertzios, ¿cuál será el margen de variación de $R_1$ que produce la citada variación de fase?
*Sol.* 46,4 a 6080 Ω.

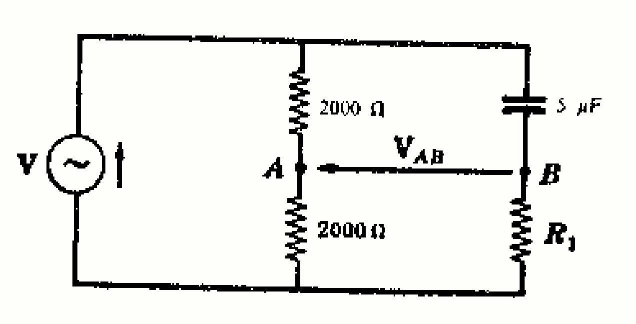



Fig. 8-47

**8-51** En cada una de las Figs. 8-48(*a*), (*b*) y (*c*) se encuentran los diagramas de los lugares geométricos de las intensidades de corriente total de tres circuitos que contienen un elemento variable cada uno. Obtener el circuito a que corresponde cada uno de ellos.

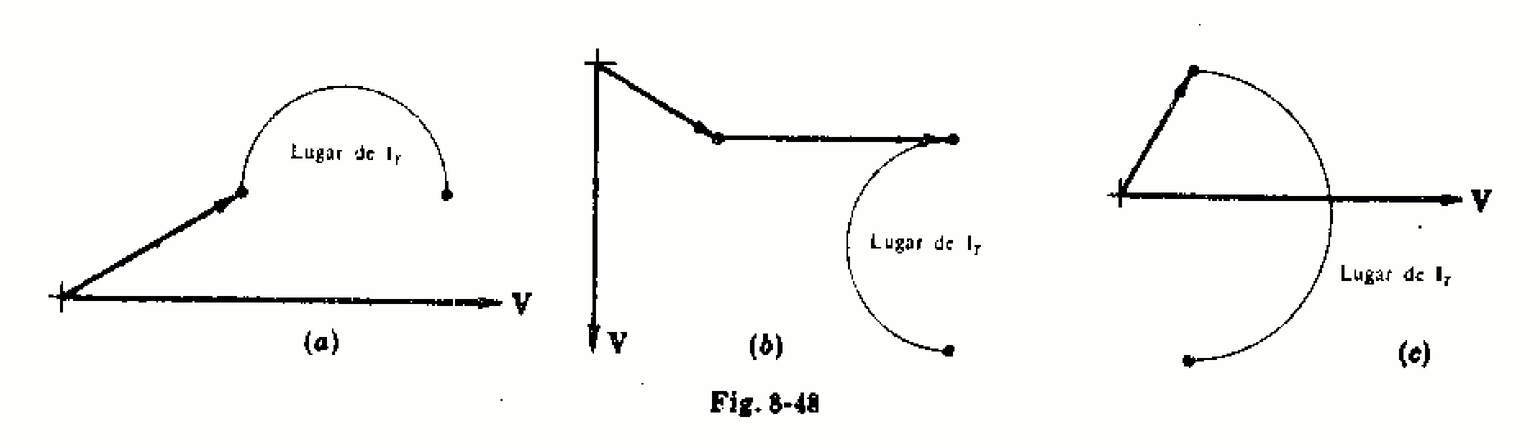



Fig. 8-48

*Sol.* (*a*) Un circuito paralelo de dos ramas. Rama 1: $R$ y $X_C$ fijas; rama 2: $R$ fija y $X_C$ variable.
(*b*) Un circuito paralelo de tres ramas. Rama 1: $R$ y $X_C$ fijas; rama 2: $X_C$ fija; rama 3: $R$ fija y $X_L$ variable.
(*c*) Un circuito paralelo de dos ramas. Rama 1: $R$ y $X_C$ fijas; rama 2: $X_L$ fija y $R$ variable.

**8-52** Determinar el circuito correspondiente al lugar geométrico de intensidad de corriente representado en la Fig. 8-49 sabiendo que $\omega = 2000$ radianes por segundo.
*Sol.* Rama 1: $R = 7{,}07$ Ω; $L = 3{,}54$ mH.
Rama 2: $R = 7{,}07$ Ω; $C$ = variable.




Fig. 8-49

**8-53** En la Fig. 8-50 se encuentra el diagrama del lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por un circuito paralelo de dos ramas. ¿Qué cambio en la rama $RL$ hace que el punto $A$ se encuentre sobre el fasor tensión? *Sol.* $X_L = 5{,}78$ Ω.

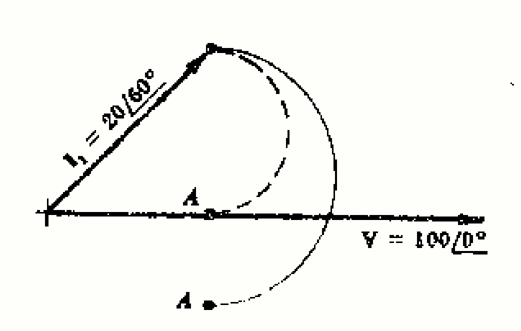



Fig. 8-50

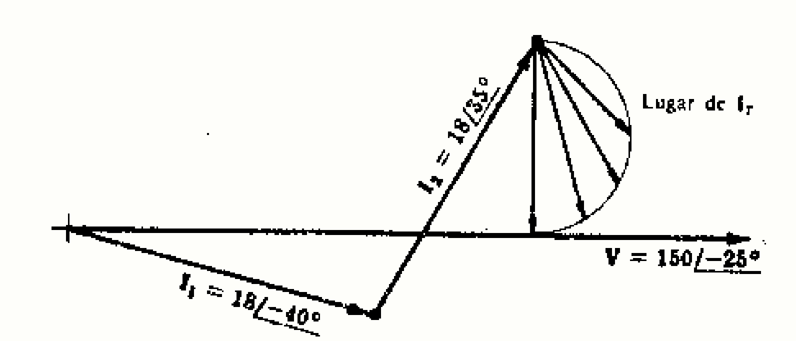



Fig. 8-51

**8-54** En la Fig. 8-51 se encuentra el diagrama del lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por un circuito paralelo de tres ramas. Determinar todas las constantes del circuito sabiendo que $\omega = 5000$ radianes por segundo.
*Sol.* Rama 1: $R = 8{,}05$ Ω; $L = 0{,}423$ mH. Rama 2: $R = 4{,}16$ Ω; $C = 27{,}7$ μF. Rama 3: $L = 2{,}74$ mH y $R$ variable.

# Capítulo 9

## Análisis de un circuito por el método de las corrientes de malla

### INTRODUCCION

Las fuentes de tensión en un circuito eléctrico originan unas corrientes en las ramas que, a su vez, dan lugar a unas caídas de tensión en los componentes de las mismas. Resolver un circuito consiste en hallar las intensidades, con su sentido de circulación, en cada una de aquellas ramas o bien determinar las caídas de tensión en cada uno de dichos componentes.

### METODO DE RESOLUCION POR LAS CORRIENTES DE MALLA

Para aplicar este método se eligen, en primer lugar, lazos cerrados o mallas, asignándoles una corriente eléctrica. Estos lazos o mallas se llaman *corrientes cíclicas de Maxwell* o simplemente, *corrientes de malla*, como se representa en la Fig. 9-1. Acto seguido, se escriben las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff para cada malla tomando las intensidades de aquellas corrientes como variables desconocidas, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$, en el ejemplo, y se resuelve el sistema de ecuaciones así formado. La corriente en cada rama se halla mediante la primera ley de Kirchhoff y es o bien una corriente de malla (caso en que la rama solo pertenezca a una malla) o bien una combinación algebraica de dos corrientes de malla (caso en que la rama sea común a dos mallas).

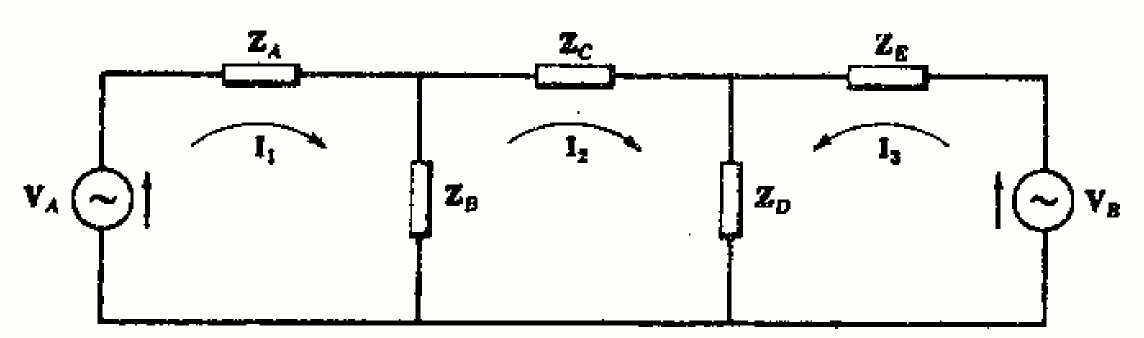



**Fig. 9-1. Corrientes de malla en un circuito**

Por ejemplo, la corriente en el elemento $\mathbf{Z}_A$ es $\mathbf{I}_1$, y la corriente en $\mathbf{Z}_B$ es $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$ si $\mathbf{I}_1$ es mayor que $\mathbf{I}_2$ o bien $\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1$ en caso contrario (el sentido de circulación es el correspondiente a la mayor intensidad de las dos mallas contiguas). La caída de tensión en un elemento cualquiera del circuito es el producto de la impedancia compleja del mismo por el fasor intensidad de corriente que lo atraviesa (el borne del elemento por donde entra la flecha del sentido de la intensidad está a más tensión que por donde sale).

Vamos a obtener el sistema de ecuaciones del circuito de tres mallas independientes de la Fig. 9-1 aplicando a cada malla la segunda ley de Kirchhoff. En la Fig. 9-2 aparece la primera malla aislada y se ha de verificar que la suma de las fuerzas electromotrices o subidas de tensión es igual a la suma de las caídas de tensión.

$$\mathbf{Z}_A\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_B(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = \mathbf{V}_A \qquad (1)$$

La segunda malla no contiene fuente de tensión alguna; por tanto, la suma de las caídas de tensión a lo largo de ella es cero.

$$\mathbf{Z}_C\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_D(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) + \mathbf{Z}_B(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0 \qquad (2)$$

Para la tercera malla tendremos,

$$\mathbf{Z}_E\mathbf{I}_3 + \mathbf{Z}_D(\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_2) = \mathbf{V}_B \qquad (3)$$

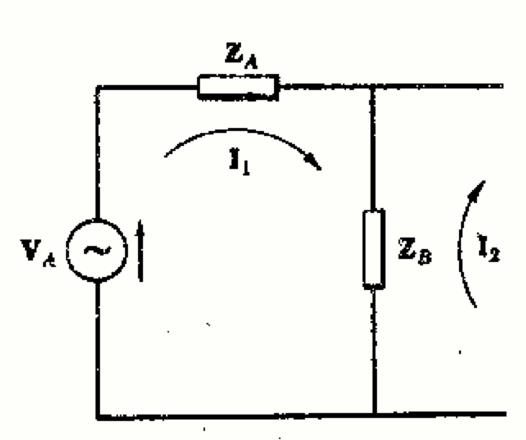



**Fig. 9-2**

Es decir,

$$(\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B)\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_B\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_A \qquad (1')$$

$$-\mathbf{Z}_B\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_D)\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_D\mathbf{I}_3 = 0 \qquad (2')$$

$$\mathbf{Z}_D\mathbf{I}_2 + (\mathbf{Z}_D + \mathbf{Z}_E)\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_B \qquad (3')$$

Este sistema de ecuaciones se puede obtener directamente. Para ello, consideremos la primera malla, que aparece en la Fig. 9-2. La corriente $\mathbf{I}_1$ tiene el sentido de las agujas del reloj y las caídas de tensión en todos los elementos de esta malla son todas positivas. Ahora bien, por $\mathbf{Z}_B$ también circula la corriente $\mathbf{I}_2$ de la segunda malla, pero con sentido opuesto a $\mathbf{I}_1$. Por tanto, la caída de tensión en $\mathbf{Z}_B$ debida a $\mathbf{I}_2$ es $-\mathbf{Z}_B\mathbf{I}_2$. La caída de tensión $\mathbf{V}_A$ es positiva por tener el mismo sentido que $\mathbf{I}_1$. En estas condiciones, aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla se obtiene la ecuación *(1')*. Análogamente, resultan las Ecuaciones *(2')* y *(3')*.

Los términos *caída* y *subida* de tensión o potencial son más propios de los circuitos de corriente continua (c.c.) en los que su significado es más claro que en los de corriente alterna (c.a.), en donde los valores instantáneos de tensión y de intensidad de corriente son unas veces positivos y otras negativos. La segunda ley de Kirchhoff en régimen permanente senoidal aplicada a una malla o lazo cerrado dice: *La suma geométrica de los fasores de tensión de las fuentes activas de la malla es igual a la suma geométrica de los fasores de caídas de tensión en las impedancias de la malla.*

## ELECCION DE LAS MALLAS

La solución de un circuito por el método de las corrientes de mallas se simplifica extraordinariamente eligiendo bien las mallas a considerar. Por ejemplo, supongamos que en el circuito de la Fig. 9-1 solo es necesario conocer la corriente que circula por la impedancia $\mathbf{Z}_B$; lo más cómodo será resolver el problema de forma que por $\mathbf{Z}_B$ no circule más que una corriente de malla, es decir, que dicha impedancia no pertenezca más que a una malla. En estas condiciones, solo habrá que determinar el valor de la corriente de malla $\mathbf{I}_1$. En la Fig. 9-3 se pueden observar las nuevas mallas elegidas.

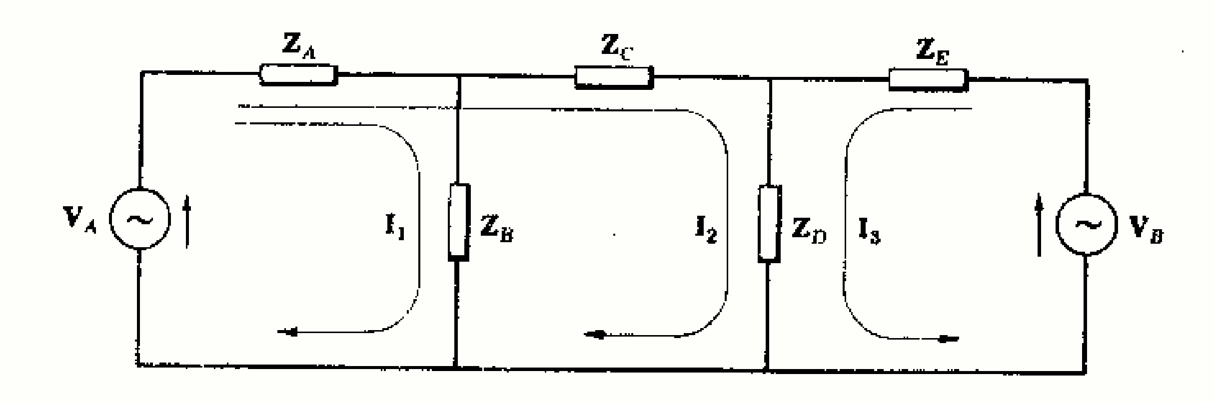



**Fig. 9-3**

El sistema de ecuaciones correspondiente a tal elección de mallas es

$$(\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B)\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_A\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_A$$

$$\mathbf{Z}_A\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_D)\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_D\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_A$$

$$\mathbf{Z}_D\mathbf{I}_2 + (\mathbf{Z}_D + \mathbf{Z}_E)\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_B$$

En cualquier caso, por cada elemento del circuito debe circular al menos una corriente de malla y no tiene por qué haber dos ramas con la misma corriente o igual combinación algebraica de corrientes. En el párrafo siguiente vamos a ver el criterio que permite saber el número mínimo de mallas independientes para resolver un circuito. Si el número de mallas que se adoptan es menor que el necesario, el sistema de ecuaciones no es válido.

## NUMERO MINIMO DE MALLAS INDEPENDIENTES

Si el circuito es plano y sencillo, el número de mallas necesario se deduce fácilmente a simple vista. Para circuitos más complejos es preciso tener algún criterio que proporcione el número de ecuaciones linealmente independiente, necesario para resolver el circuito en cuestión.

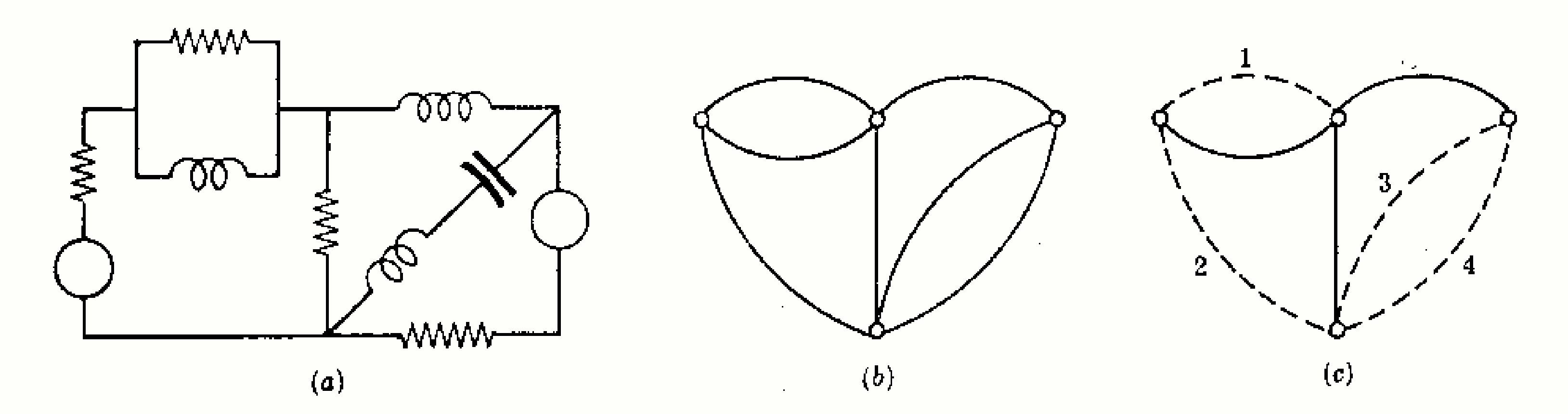



**Fig. 9-4. Un circuito, su grafo y su árbol**

En la Fig. 9-4(*b*) se representa el grafo del circuito que figura a su izquierda, (*a*); los nudos se han sustituido por círculos pequeños y las ramas por líneas. La Fig. 9-4(*c*) muestra un posible árbol del grafo que solo contiene ramas que no forman malla o lazo cerrado. Sin embargo, este árbol no es único. Las líneas de trazo continuo se llaman ramas del árbol y las de trazos, ramas de enlace. Cada una de las ramas de enlace forma una malla única con las ramas del árbol. El número de mallas necesario de un circuito es igual al número de ramas de enlace; en el ejemplo que consideramos, este número es cuatro.

Se llega al mismo resultado anterior haciendo unos cortes en las ramas del circuito de manera que cada uno de ellos abra una malla. Cuando no quede ninguna malla sin abrir, el número de cortes efectuados es el número de mallas independientes a considerar.

Otro criterio consiste en contar el número de ramas y el de nudos del circuito. El número de mallas o lo que es igual, el de ecuaciones del sistema es:

$$\text{número de ecuaciones} = \text{número de ramas} - (\text{número de nudos} - 1)$$

Por ejemplo, en el circuito de la Fig. 9-4(*a*) hay siete ramas y cuatro nudos. El número de mallas independientes es $7 - (4 - 1) = 4$, como ya hemos visto.

## PLANTEAMIENTO DIRECTO DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE MALLAS

Las ecuaciones correspondientes a un circuito de tres mallas son, en notación general,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_1 \\ \pm \mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_2 \\ \pm \mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_3 \end{aligned}$$

El coeficiente $\mathbf{Z}_{11}$ se llama impedancia propia de la malla uno y es la suma de todas las impedancias del lazo por las que circula la corriente de intensidad $\mathbf{I}_1$. Los coeficientes $\mathbf{Z}_{22}$ y $\mathbf{Z}_{33}$ son las impedancias de las mallas dos y tres, respectivamente.

El coeficiente $\mathbf{Z}_{12}$ se llama copedancia de las mallas uno y dos y es la suma de las impedancias comunes a los dos lazos, uno y dos, por los que circulan las corrientes de intensidades $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, respectivamente. Es evidente que $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$. Los coeficientes $\mathbf{Z}_{13} = \mathbf{Z}_{31}$, $\mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{32}$ son, análoga y respectivamente, las copedancias de las mallas uno y tres, y dos y tres. El signo de las copedancias es positivo o negativo, según que las dos corrientes de malla sean del mismo sentido o de sentidos contrarios.

El término independiente $V_1$ es la suma algebraica de las tensiones de las fuentes de la malla uno. Cada tensión de fuente se considera con un signo que es positivo si el sentido de la corriente que produce, del polo negativo al positivo, coincide con el de la corriente de malla, y negativo en caso contrario. Los términos independientes $V_2$ y $V_3$ son las sumas algebraicas de las tensiones de las fuentes de las mallas dos y tres, respectivamente.

**Ejemplo 1.**

Escribir el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla del circuito representado en la Figura 9-5.

En el esquema del propio circuito se han señalado las corrientes de malla a considerar. Como en la malla uno no existen fuentes de tensión, el término independiente de la primera ecuación del sistema es cero

$$I_1(-j8) + (I_1 - I_2)10 + (I_1 - I_3)5 = 0$$

La fuente $5/30°$ de la malla dos hace circular una corriente de sentido contrario a la cíclica de su malla, razón por la cual se ha de considerar con signo menos.

$$I_2(j4) + (I_2 - I_3)8 + (I_2 - I_1)10 = -(5/30°)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la tercera malla se deduce

$$I_3(3 + j4) + (I_3 - I_1)5 + (I_3 - I_2)8 = -(10/0°)$$

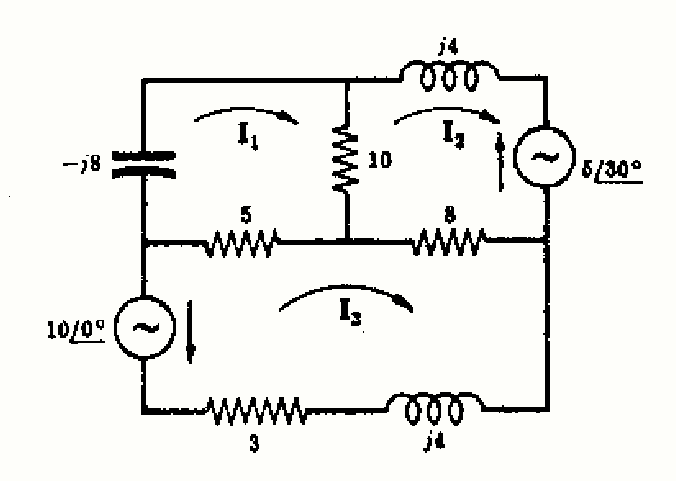



Fig. 9-5

Agrupando términos resulta el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} (15 - j8)I_1 - 10I_2 - 5I_3 &= 0 \\ -10I_1 + (18 + j4)I_2 - 8I_3 &= -(5/30°) \\ -5I_1 - 8I_2 + (16 + j4)I_3 &= -(10/0°) \end{aligned}$$

Comparemos este sistema de ecuaciones del circuito dado con el del circuito de tres mallas general. La impedancia de la malla uno es $Z_{11} = (5 + 10 - j8) = 15 - j8$. La copedancia de las mallas uno y dos es $Z_{12} = Z_{21} = 10$; ahora bien, como $I_2$ e $I_1$ son de sentido contrario circulando por la misma impedancia, $Z_{12}$ lleva signo menos. Análogamente, la copedancia $Z_{13} = -5$. Obsérvese que $Z_{12} = Z_{21}$, $Z_{13} = Z_{31}$ y $Z_{23} = Z_{32}$.

La fuente de tensión de la malla dos es $5/30°$ y lleva un signo menos porque hace circular una corriente de sentido opuesto a la de malla correspondiente, como ya indicamos. Cada término del sistema de ecuaciones obtenido tiene su imagen en el sistema más general.

## MATRICES

Una matriz es una disposición ordenada de entes (números, funciones, etc.) en filas y columnas, encerrada entre corchetes, y que obedece a ciertas reglas o álgebra. En la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

los números $a_{ij}$ se llaman elementos de la misma. El elemento $a_{ij}$ pertenece a la fila $i$ y a la columna $j$. Esta matriz consta de $m$ filas y $n$ columnas y, por ello, es de orden «$m \times n$» y se llama «matriz $A$», o «matriz $A$ $m \times n$», o bien «matriz $m \times n$ $[a_{ij}]$».

La condición necesaria y suficiente para que dos matrices sean iguales es que tengan idénticos sus elementos correspondientes; es decir, una matriz ha de ser copia exacta de la otra para que sean iguales.

## SUMA ALGEBRAICA DE MATRICES

Dos matrices del mismo orden se pueden sumar o restar, es decir, son conformes respecto de la suma algebraica.

La suma (resta) de dos matrices $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ es otra matriz $C$ cuyos elementos son la suma (resta) de los correspondientes de $A$ y $B$. Por tanto, $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

**Ejemplo 2.** Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, la suma

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y la diferencia } A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

## MULTIPLICACION DE MATRICES

El producto $AB$, en este sentido, de una matriz $A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1m}]$ de orden $1 \times m$,

por otra matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ de orden $m \times 1$, es otra matriz $C$ de orden $1 \times 1$:

$$C = [a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}\, b_{k1}\right]$$

Obsérvese que cada elemento de la fila se ha multiplicado por el correspondiente de la columna sumando a continuación los productos obtenidos. El producto de matrices se hace siempre multiplicando filas por columnas.

**Ejemplo 3.** $[1\ 3\ 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1(2) + 3(4) + 5(-2)] = [4]$

El producto $AB$, en este sentido, de una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times s$, por otra matriz $B = [b_{ij}]$ de orden $s \times n$, es otra matriz $C = [c_{ij}]$ de orden $m \times n$, siendo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

**Ejemplo 4.** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$

**Ejemplo 5.** $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$

**Ejemplo 6.** $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores $A$ y $B$ se llaman conformes respecto del producto, es decir, para que exista el producto $AB$ es imprescindible que el número de filas de $B$ sea igual al de columnas de A. Por consiguiente, si $A$ es una matriz $3 \times 2$ y $B$ es una matriz $2 \times 5$ existe el producto $AB$, pero no existe $BA$. Análogamente, si $D$ es una matriz $3 \times 3$ y $E$ es $3 \times 3$ existen ambos productos, $AB$ y $BA$.

## INVERSION

En una ordenación cualquiera de números naturales existe una inversión cuando un número precede a otro menor que él.

Por ejemplo, en la ordenación 132, el 3 precede al 2; por tanto, existe una inversión. En 321, el 3 precede al 2 y al 1, y el 2 precede al 1; hay, pues tres inversiones. En 4213, el 4 precede al 2, al 1 y al 3, y el 2 precede al 1; la ordenación tiene 4 inversiones. En 3421, el 3 precede al 2 y al 1, el 4 precede al 2 y al 1 y el 2 precede al 1; la ordenación tiene 5 inversiones.

## DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Consideremos una matriz cuadrada de orden $n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y formemos todos los productos de la forma $a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$, de manera que solo exista en ellos un elemento de cada fila y otro de cada columna. Obsérvese que el orden del primer subíndice es, por conveniencia, $1, 2, \dots, n$, razón por la cual el orden $j_1, j_2, \dots, j_n$ del segundo subíndice será una de las $n!$ permutaciones de los números $1, 2, \dots, n$. Además, asociemos un signo, $+$ o $-$, a cada producto, según que el número de inversiones de la permutación de los segundos subíndices sea par o impar, respectivamente.

En estas condiciones, el determinante de una matriz cuadrada $A$ de orden $n$, que se escribe $|A|$, es el polinomio que resulta al sumar los $n!$ productos distintos, cada uno con su signo, que se pueden formar con los elementos de $A$.

El determinante de una matriz cuadrada de orden $n$ se llama determinante de orden $n$.

**Ejemplo 7.** $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Ejemplo 8.** $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

## MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO DE UN ELEMENTO

El menor complementario de un elemento $a_{ij}$ de un determinante de orden $n$ es el determinante de orden $(n-1)$, que se obtiene suprimiendo la fila y la columna a que pertenece dicho elemento. El menor complementario de un elemento $a_{ij}$ lo escribiremos en la forma $|M_{ij}|$.

El menor complementario con su signo, $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$, se llama adjunto de $a_{ij}$ y se escribe $\Delta_{ij}$.

**Ejemplo 9.**

En el determinante de tercer orden $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

## DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LINEA

El valor de un determinante $|A|$ de orden $n$ es la suma algebraica de los $n$ productos que se obtienen multiplicando cada elemento de una línea (fila o columna) cualquiera por su adjunto correspondiente. Es decir,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

es el desarrollo de $|A|$ por los elementos de la segunda columna.

**Ejemplo 10.** $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{4(-6) - 7(1)\} - 5\{1(-6) - 7(2)\} + 0 = 7$$

**Ejemplo 11.** $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5\{1(3) - 2(4)\} = 25$$

**Ejemplo 12.** $$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 5\{4(-3) - (-2)(8)\} = 20$$

## PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Si un determinante tiene dos líneas iguales es nulo. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. Multiplicando los elementos de una línea por un número $k$, el determinante queda multiplicado por $k$. Por ejemplo,

$$2\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

3. Permutando dos líneas de un determinante, éste cambia de signo. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Si cada elemento de una línea es suma de dos o más números, el determinante se puede expresar mediante la suma de dos u más determinantes. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9+2 & 5 \\ 2 & 4+0 & -5 \\ 1 & 8-2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

5. Si a los elementos de una línea se le añaden los de otra multiplicados por una constante $k$, el valor del determinante no varía. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

## SOLUCION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR DETERMINANTES: REGLA DE CRAMER

El sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas $x_1$, $x_2$, $x_3$,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos cada elemento de la primera columna por $x_1$, el valor numérico del determinante de los coeficientes $\Delta_a$ queda multiplicado por dicho $x_1$ (Propiedad 2).

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad x_1\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sumemos a cada elemento de la primera columna el elemento correspondiente de la segunda multiplicado por $x_2$, y el de la tercera multiplicado por $x_3$ (Propiedad 5). Entonces,

$$x_1\Delta_a = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

o bien

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

siempre que $\Delta_a \neq 0$. Análogamente.

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

Este método de resolución se llama *regla de Cramer* y se puede aplicar a cualquier sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas siempre que el determinante de los coeficientes sea distinto de cero.

## APLICACION DEL ALGEBRA MATRICIAL AL ANALISIS DE CIRCUITOS

El sistema de ecuaciones de un circuito de tres mallas

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_1 \\ \pm\mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_2 \\ \pm\mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_3 \end{aligned}$$

se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \pm\mathbf{Z}_{12} & \pm\mathbf{Z}_{13} \\ \pm\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \pm\mathbf{Z}_{23} \\ \pm\mathbf{Z}_{31} & \pm\mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Z}][\mathbf{I}] = [\mathbf{V}]$$

que constituye la expresión matricial de la ley de Ohm, siendo $[\mathbf{Z}]$ la matriz de impedancias, $[\mathbf{I}]$ la matriz de intensidades de corriente y $[\mathbf{V}]$ la matriz de tensiones.

Las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ vienen dadas por el cociente de dos determinantes:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \pm\mathbf{Z}_{12} & \pm\mathbf{Z}_{13} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{Z}_{22} & \pm\mathbf{Z}_{23} \\ \mathbf{V}_3 & \pm\mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{V}_1 & \pm\mathbf{Z}_{13} \\ \pm\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{V}_2 & \pm\mathbf{Z}_{23} \\ \pm\mathbf{Z}_{31} & \mathbf{V}_3 & \mathbf{Z}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \qquad \mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \pm\mathbf{Z}_{12} & \mathbf{V}_1 \\ \pm\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{V}_2 \\ \pm\mathbf{Z}_{31} & \pm\mathbf{Z}_{32} & \mathbf{V}_3 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

Si se desarrollan los determinantes de los numeradores por los elementos de la columna de tensiones, resulta el conjunto de ecuaciones siguiente:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z}\right) \qquad (1)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_2\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_3\left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_z}\right) \qquad (2)$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_2\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_3\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_z}\right) \qquad (3)$$

Los segundos miembros de (*1*), (*2*) y (*3*) son las componentes fasoriales de las distintas fuentes de tensión. Esto es, en la Ecuación (*1*), la intensidad de corriente $\mathbf{I}_1$ consta de tres términos: $\mathbf{V}_1(\Delta_{11}/\Delta_z)$ debido a la fuente $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2(\Delta_{21}/\Delta_z)$ debido a la fuente $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_3(\Delta_{31}/\Delta_z)$ debido a la fuente $\mathbf{V}_3$.

## IMPEDANCIA DE ENTRADA

Consideremos un circuito de elementos pasivos con dos terminales, como indica la Fig. 9-6. Sea $\mathbf{I}_1$ la intensidad de la corriente que resulta al aplicar una tensión $\mathbf{V}_1$. Como no existen otras fuentes en

el circuito, la ecuación de la corriente de malla $\mathbf{I}_1$ es

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z}\right) + \cdots = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right)$$

La *impedancia de entrada* es la relación entre la tensión aplicada $\mathbf{V}_1$ y la intensidad de corriente $\mathbf{I}_1$ a que da lugar. Es decir,

$$\mathbf{Z}_{\text{entrada }1} = \mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1 = \Delta_z/\Delta_{11}$$

La impedancia de entrada de un *circuito con elementos activos* se define como la impedancia que presenta en sus terminales de entrada cuando *todas sus fuentes de tensión están cortocircuitadas conservando, eso sí, su propia impedancia interna*. Por consiguiente, la relación $\Delta_z/\Delta_{11}$ representa la impedancia de entrada tanto de un circuito activo como de uno pasivo.

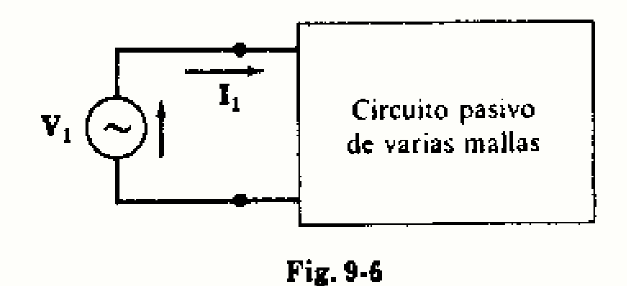



Fig. 9-6

## IMPEDANCIA DE TRANSFERENCIA

Una fuente de tensión en una malla de un circuito produce una corriente en cada una de las otras mallas del mismo. La impedancia de transferencia es la relación entre la tensión aplicada en una malla y la intensidad de la corriente que resulta en otra malla, anulando el resto de las fuentes.

Consideremos el circuito de la Fig. 9-7 con una fuente de tensión $\mathbf{V}_r$ en la malla $r$ y la intensidad $\mathbf{I}_s$ de la corriente a que da lugar en la malla $s$. Entonces,

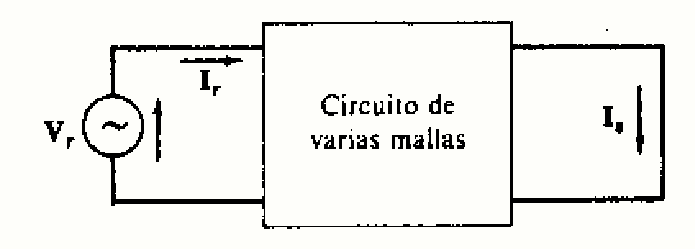



Fig. 9-7

$$\mathbf{I}_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_z}\right) + \cdots + \mathbf{V}_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right) + \cdots + (0)\left(\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_z}\right) = \mathbf{V}_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right)$$

con lo que $$\mathbf{Z}_{\text{transferencia } rs} = \mathbf{V}_r/\mathbf{I}_s = \Delta_z/\Delta_{rs}$$

El doble subíndice $rs$ de esta impedancia indica el sentido de la acción, es decir, la fuente está en la malla $r$ y la intensidad a considerar es la que aparece en la malla $s$. El determinante del denominador es el adjunto del elemento que ocupa el lugar $rs$, $\Delta rs$, con los mismos subíndices que la impedancia de transferencia.

# Problemas resueltos

**9-1** Dada la elección de corrientes de malla de la Fig. 9-8 escribir el sistema de ecuaciones correspondiente y expresarlo en forma matricial.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las mallas,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1(2-j2) + (\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2)(j5) + (\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_3)5 &= 10\underline{/0^\circ} \\
\mathbf{I}_2(10) + (\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)(2-j2) + (\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_1)(j5) &= -(5\underline{/30^\circ}) \\
\mathbf{I}_3(10) + (\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_1)(5) + (\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_2)(2-j2) &= -(10\underline{/90^\circ})
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes,

$$\begin{aligned}
(7+j3)\mathbf{I}_1 - (j5)\mathbf{I}_2 - (5)\mathbf{I}_3 &= 10\underline{/0^\circ} \\
-(j5)\mathbf{I}_1 + (12+j3)\mathbf{I}_2 - (2-j2)\mathbf{I}_3 &= -(5\underline{/30^\circ}) \\
-(5)\mathbf{I}_1 - (2-j2)\mathbf{I}_2 + (17-j2)\mathbf{I}_3 &= -(10\underline{/90^\circ})
\end{aligned}$$

que se puede expresar en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} 7+j3 & -j5 & -5 \\ -j5 & 12+j3 & -(2-j2) \\ -5 & -(2-j2) & 17-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ -(5\angle 30^\circ) \\ -(10\angle 90^\circ) \end{bmatrix}$$

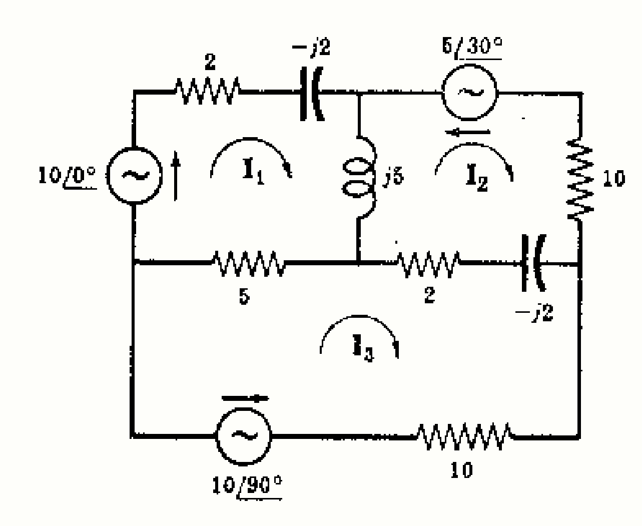



Fig. 9-8

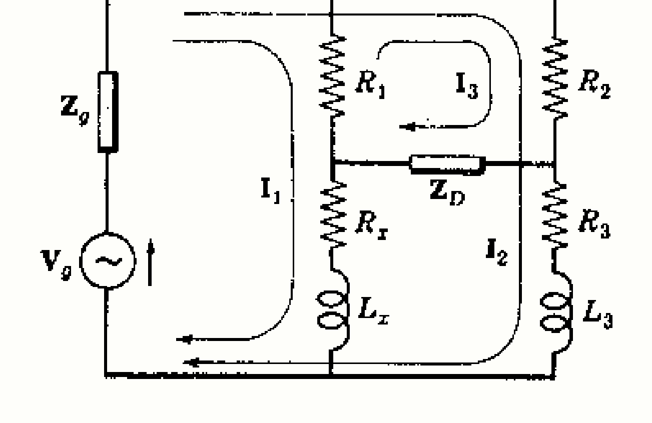



Fig. 9-9

**9-2** Escribir directamente el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla del circuito de la Fig. 9-9 y expresarlo en forma matricial.

Los elementos de la matriz de impedancias se deducen de sus definiciones. El elemento $\mathbf{Z}_{11}$ es la impedancia propia de la malla uno y es igual a la suma de todas las impedancias de dicha malla, $(R_1 + R_x + j\omega L_x + \mathbf{Z}_g)$. El elemento $\mathbf{Z}_{12}$ es la copedancia o impedancia común a las mallas uno y dos y es igual a $\mathbf{Z}_g$ con signo positivo, ya que las dos corrientes circulan en el mismo sentido. La matriz de intensidades de corriente consta de los elementos $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$. La matriz de tensiones está formada por las correspondientes a las fuentes en cada una de las mallas. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_x + j\omega L_x + \mathbf{Z}_g) & \mathbf{Z}_g & -R_1 \\ \mathbf{Z}_g & (R_2 + R_3 + j\omega L_3 + \mathbf{Z}_g) & R_2 \\ -R_1 & R_2 & (R_1 + R_2 + \mathbf{Z}_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g \\ \mathbf{V}_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

**9-3** Hallar la potencia suministrada por el generador de tensión del circuito de la Fig. 9-10. Calcular, asimismo, las potencias disipadas en las resistencias.

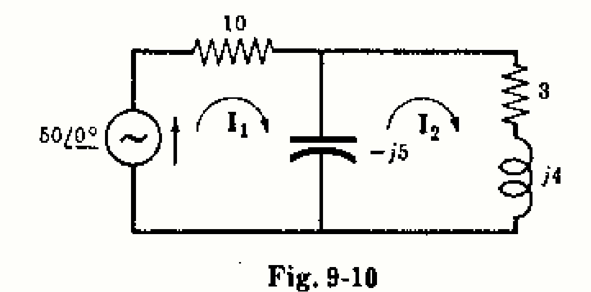



Fig. 9-10

Elijamos las mallas de manera que por el generador circule una sola corriente. En estas condiciones,

$$\begin{bmatrix} 10-j5 & j5 \\ j5 & 3-j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ & j5 \\ 0 & 3-j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-j5 & j5 \\ j5 & 3-j1 \end{vmatrix}} = \frac{150-j50}{50-j25} = 2{,}83\angle 8{,}14^\circ \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10-j5 & 50\angle 0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50-j25} = 4{,}47\angle -63{,}4^\circ$$

La potencia suministrada por la fuente es $P = VI\cos\theta = 50(2{,}83)\cos(8{,}14^\circ) = 140$ W. La potencia disipada en la resistencia de 10 Ω es $P_{10} = 10(I_1)^2 = 10(2{,}83)^2 = 80$ W, y la potencia disipada en la resistencia de 3 Ω es $P_3 = 3(I_2)^2 = 60$ W; la suma de ambas, 80 + 60 = 140 W, es igual a la potencia suministrada por la fuente.

**9-4** En el mismo circuito del Problema 9-3 se eligen las mallas como se indica en la Fig. 9-11. Hallar la potencia suministrada por el generador.

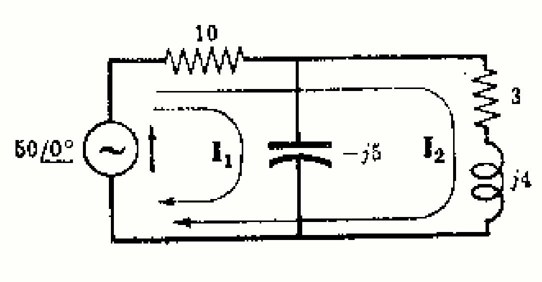



Fig. 9-11

El sistema de ecuaciones de malla, en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 10-j5 & 10 \\ 10 & 13+j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 50\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

De aqui resulta:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ & 10 \\ 50\angle 0^\circ & 13+j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-j5 & 10 \\ 10 & 13+j4 \end{vmatrix}} = \frac{150+j200}{50-j25} = 4{,}47\angle 79{,}7^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10-j5 & 50\angle 0^\circ \\ 10 & 50\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50-j25} = 4{,}47\angle -63{,}4^\circ$$

Por la rama que contiene la fuente circulan dichas dos corrientes. Por tanto,

$$I_1 + I_2 = \left(\frac{150+j200}{50-j25}\right) + \left(\frac{-j250}{50-j25}\right) = 2{,}83\angle +8{,}14^\circ$$

con lo que la potencia de la fuente es $P = VI \cos\theta = 50(2{,}83) \cos 8{,}14^\circ = 140$ W.

**9-5** En el circuito de la Fig. 9-12 se dan las tensiones compuestas, o entre lineas, de las tres fases de una red. Hallar las intensidades de corriente $I_A$, $I_B$ e $I_C$.

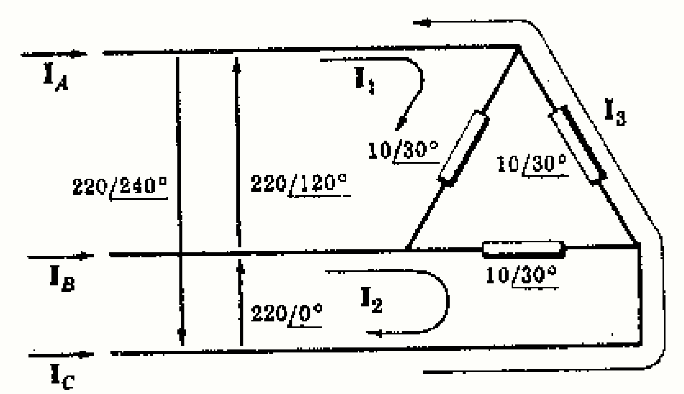



Fig. 9-12

Con las mallas elegidas las corrientes son independientes. Esto se pone de manifiesto en el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 10\angle 30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 10\angle 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 10\angle 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 120^\circ \\ 220\angle 0^\circ \\ 220\angle 240^\circ \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen las intensidades

$$I_1 = \frac{220\angle 120^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle 90^\circ, \quad I_2 = \frac{220\angle 0^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle -30^\circ, \quad I_3 = \frac{220\angle 240^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle 210^\circ$$

Por tanto,

$$I_A = I_1 - I_3 = (22\angle 90^\circ - 22\angle 210^\circ) = 38{,}1\angle 60^\circ$$
$$I_B = I_2 - I_1 = (22\angle -30^\circ - 22\angle 90^\circ) = 38{,}1\angle -60^\circ$$
$$I_C = I_3 - I_2 = (22\angle 210^\circ - 22\angle -30^\circ) = 38{,}1\angle 180^\circ$$

**9-6** En el circuito de cuatro mallas representado en la Fig. 9-13 se eligen las mallas que aparecen en el esquema. Se ajusta la resistencia $R$ y la capacidad de los dos condensadores iguales, $C$, de forma que la intensidad de corriente que circule por $Z_D$ sea cero. En estas condiciones, expresar los valores de $R_x$ y $L_x$ en función de $R$, $C$ y de la pulsación del generador $\omega$ en radianes por segundo.

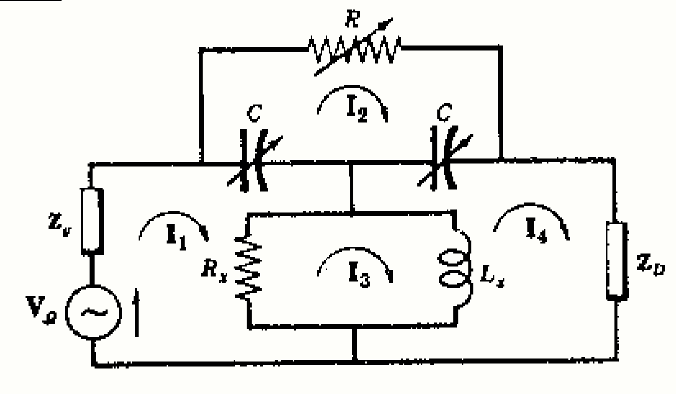



Fig. 9-13

El sistema de ecuaciones de malla, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} \left(R_x + \frac{1}{j\omega C} + \mathbf{Z}_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & 0 \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) & -(j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_x + \mathbf{Z}_D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expresando la corriente $\mathbf{I}_4$ que circula por $\mathbf{Z}_D$ en forma de determinante e igualando a cero,

$$\mathbf{I}_4 = \frac{\begin{vmatrix} \left(R_x + \frac{1}{j\omega C} + \mathbf{Z}_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & \mathbf{V}_g \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

Desarrollando el numerador por los elementos de la cuarta columna resulta

$$-\mathbf{V}_g \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) \end{vmatrix} = 0$$

Como este determinante debe ser cero,

$$-(-R_x)(R + 1/j\omega C + 1/j\omega C)(-j\omega L_x) - (-1/j\omega C)(-1/j\omega C)(R_x + j\omega L_x) = 0$$

de donde $\qquad R_x = 1/\omega^2 C^2 R \qquad$ y $\qquad L_x = 1/2\omega^2 C$

**9-7** En el circuito de la Fig. 9-14 hallar los valores de las intensidades $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$.

Se eligen las dos mallas que se indican en el esquema. El sistema de ecuaciones correspondiente, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 120^\circ \\ 220\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

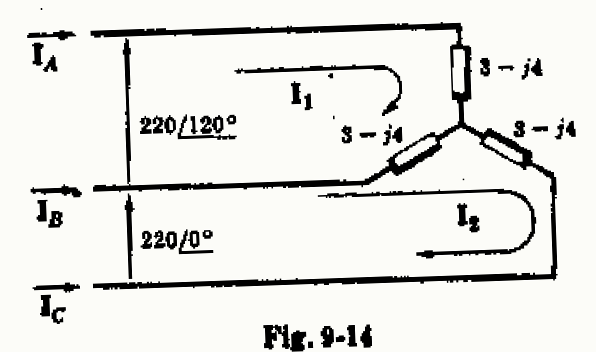



**Fig. 9-14**

de donde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 220\angle 120^\circ & -(3 - j4) \\ 220\angle 0^\circ & 6 - j8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{vmatrix}} = \frac{2200\angle 66{,}9^\circ + 1100\angle -53{,}1^\circ}{100\angle -106{,}2^\circ - 25\angle -106{,}2^\circ} = \frac{1905\angle 36{,}9^\circ}{75\angle -106{,}2^\circ} = 25{,}4\angle 143{,}1^\circ$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 - j8 & 220\angle 120^\circ \\ -(3 - j4) & 220\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2200\angle -53{,}1^\circ + 1100\angle 66{,}9^\circ}{75\angle -106{,}2^\circ} = \frac{1905\angle -23{,}2^\circ}{75\angle -106{,}2^\circ} = 25{,}4\angle 83^\circ$$

con lo que las intensidades de corriente por cada línea son $\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 25{,}4\angle 143{,}1^\circ$, $\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = (25{,}4\angle 83^\circ - 25{,}4\angle 143{,}1^\circ) = 25{,}4\angle 23{,}1^\circ$ e $\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 25{,}4\angle -97^\circ$

**9-8** Hallar la impedancia de entrada, vista desde la fuente de 50 voltios, del circuito de la Fig. 9-15 aplicando el cálculo matricial. Obtener, con esta impedancia, la intensidad de corriente $I_1$.

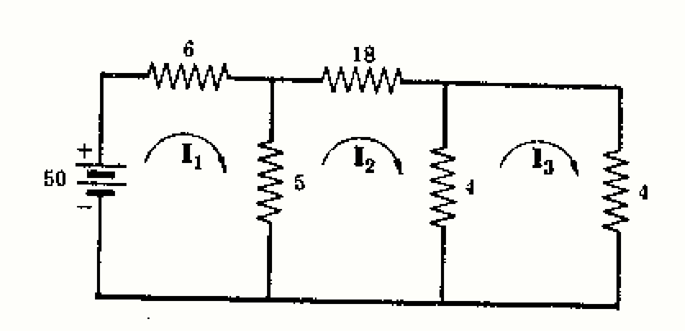



**Fig. 9-15**

La impedancia de entrada de la malla uno es

$$Z_{\text{entrada } 1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -5 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 27 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{200} = 10$$

Por tanto, $I_1 = V_1/Z_{\text{entrada } 1} = 50/10 = 5$ A.

**9-9** En el circuito de la Fig. 9-15 hallar la intensidad de la corriente de malla $I_3$ mediante la impedancia de transferencia correspondiente.

La fuente se encuentra en la malla uno y la corriente $I_3$ es la que circula por la malla tres. Por tanto, la impedancia de transferencia que se necesita es

$$Z_{\text{transferencia } 13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{2000}{\begin{vmatrix} -5 & 27 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{20} = 100$$

con lo que $I_3 = V_1/Z_{\text{transferencia } 13} = 50/100 = 0{,}5$ A.

**9-10** En el circuito de la Fig. 9-15 hallar la intensidad de la corriente de malla $I_2$ mediante la impedancia de transferencia correspondiente.

Como la fuente está en la malla uno y la corriente es la que circula por la malla dos, la impedancia de transferencia que se necesita es

$$\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{2000}{(-1)\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{40} = 50$$

con lo que $I_2 = V_1/Z_{\text{transferencia } 12} = 50/50 = 1$ A.

**9-11** Hallar las tensiones $\mathbf{V}_{AB}$ y $\mathbf{V}_{BC}$ en el circuito de la Figura 9-16.

**Fig. 9-16**

El sistema de ecuaciones de malla, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100\angle 45^\circ & -j10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{100} = 0, \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j14 & 100\angle 45^\circ \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{1000\angle 135^\circ}{100} = 10\angle 135^\circ$$

Por tanto, $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_1(3 + j4) = 0$ y $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{I}_2(-j10) = 10\angle 135^\circ\,(10\angle -90^\circ) = 100\angle 45^\circ$. La suma $(\mathbf{V}_{AB} + \mathbf{V}_{BC}) = 100\angle 45^\circ$, que es el valor del fasor de tensión aplicado.

**9-12** En el circuito de la Fig. 9-17 obtener las tres componentes del triángulo de potencia correspondiente a la fuente $10\underline{/30°}$ voltios.

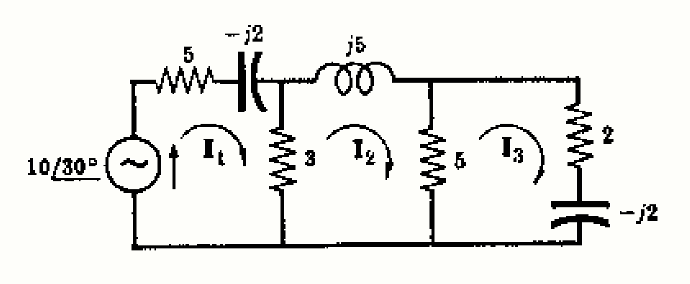



Fig. 9-17

Eligiendo las mallas que se indican en el esquema, por la rama que contiene el generador solo circula la corriente $\mathbf{I}_1$. Como no existe más que un generador en el circuito, se puede emplear la impedancia de entrada para el cálculo de $\mathbf{I}_1$.

$$Z_{\text{entrada } 1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j5 & -5 \\ -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315\underline{/16{,}2°}}{45{,}1\underline{/24{,}9°}} = 6{,}98\underline{/-8{,}7°}$$

con lo que $\qquad \mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{\text{entrada } 1} = (10\underline{/30°})/(6{,}98\underline{/-8{,}7°}) = 1{,}43\underline{/38{,}7°}$

La potencia suministrada por la fuente es $P = V_1 I_1 \cos\theta = 10(1{,}43)\cos 8{,}7° = 14{,}1$ W. La potencia reactiva es $Q = V_1 I_1 \operatorname{sen} 8{,}7° = 2{,}16$ VAR en adelanto. La potencia aparente es $S = V_1 I_1 = 14{,}3$ VA.

**9-13** En el circuito de la Fig. 9-17 hallar las intensidades de corriente $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ mediante las impedancias de transferencia.

Como el generador está en la malla uno y la corriente pedida circula por la malla dos hay que calcular la impedancia $\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 12}$.

$$\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{315\underline{/16{,}2°}}{(-1)\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315\underline{/16{,}2°}}{21{,}8\underline{/-16°}} = 14{,}45\underline{/32{,}2°}$$

Por tanto, $\qquad \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1/Z_{\text{transferencia } 12} = (10\underline{/30°})/(14{,}45\underline{/32{,}2°}) = 0{,}693\underline{/-2{,}2°}$

Análogamente,

$$\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{315\underline{/16{,}2°}}{\begin{vmatrix} -3 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{315\underline{/16{,}2°}}{15} = 21\underline{/16{,}2°}$$

con lo que $\qquad \mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 13} = (10\underline{/30°})/(21\underline{/16{,}2°}) = 0{,}476\underline{/13{,}8°}$

**9-14** En el circuito de la Fig. 9-17 hallar la potencia disipada en las resistencias y compararla con la potencia suministrada por el generador.

En los Problemas 9-12 y 9-13 se han obtenido: $\mathbf{I}_1 = 1{,}43\underline{/38{,}7°}$, $\mathbf{I}_2 = 0{,}693\underline{/-2{,}2°}$, $\mathbf{I}_3 = 0{,}476\underline{/13{,}8°}$.

La potencia disipada en la resistencia de 5 Ω es $P = 5(I_1)^2 = 5(1{,}43)^2 = 10{,}2$ W. Por la resistencia de 3 Ω circulan dos corrientes de malla cuya diferencia es la corriente por la rama $(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = (1{,}115 + j0{,}895) - (0{,}693 - j0{,}027) = 0{,}422 + j0{,}922 = 1{,}01\underline{/65{,}4°}$; por tanto, $P = 3(1{,}01)^2 = 3{,}06$ W. Análogamente, la corriente que circula por la rama que contiene la resistencia de 5 Ω es $(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = (0{,}693 - j0{,}027) - (0{,}462 + j0{,}113) = (0{,}231 - j0{,}140) = 0{,}271\underline{/-31{,}2°}$, con lo que la potencia es $P = 5(0{,}271)^2 = 0{,}367$ W. La potencia en la resistencia de 2 Ω es $P = 2(I_3)^2 = 2(0{,}476)^2 = 0{,}453$ W.

La potencia total disipada en las resistencias del circuito es $P_T = 10{,}2 + 3{,}06 + 0{,}367 + 0{,}453 = 14{,}1$ W que coincide, precisamente, con la potencia activa del Problema 9-12.

**9-15** En el circuito de la Fig. 9-18 el generador $\mathbf{V}_1$ produce una caída de tensión $\mathbf{V}_0$ voltios en la impedancia $2 - j2$ ohmios. Hallar el valor $\mathbf{V}_1$ del generador que produzca una caída $\mathbf{V}_0 = 5\underline{/0°}$ voltios.

Con la tensión dada $\mathbf{V}_0$ la corriente de malla es $\mathbf{I}_3 = \dfrac{\mathbf{V}_0}{2-j2} = \dfrac{5\underline{/0°}}{2\sqrt{2}\underline{/-45°}} = 1{,}76\underline{/45°}$ A. Su expresión como cociente de determinantes es

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & V_1 \\ -3 & 8+j5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = V_1 \frac{\begin{vmatrix} -3 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{315\underline{/16{,}2^\circ}} = V_1\,(0{,}0476\underline{/-16{,}2^\circ})$$

Por tanto, $$V_1 = \frac{I_3}{0{,}0476\underline{/-16{,}2^\circ}} = \frac{1{,}76\underline{/45^\circ}}{0{,}0476\underline{/-16{,}2}} = 36{,}9\underline{/61{,}2^\circ}$$

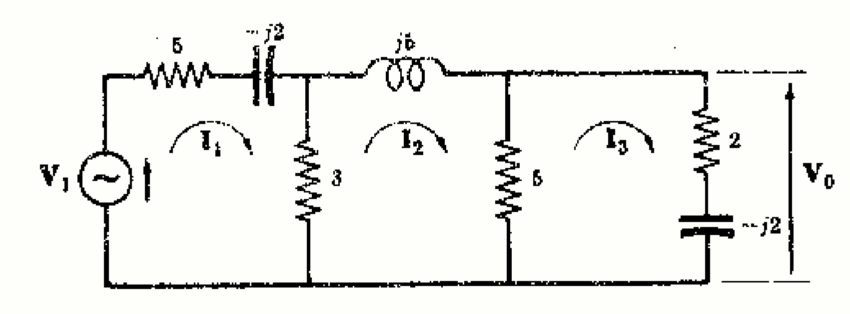



Fig. 9-18

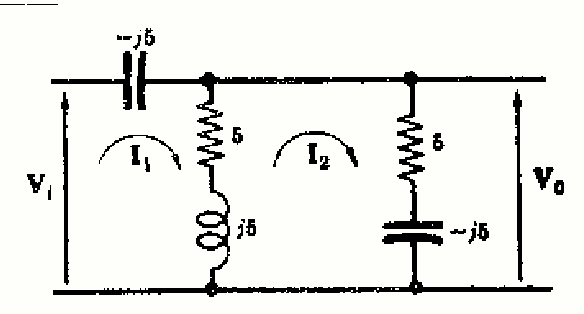



Fig. 9-19

**9-16** Al conectar una impedancia de carga grande en el circuito de la Fig. 9-19 la tensión de salida $V_0$ corresponde a la caída de tensión en la impedancia $5 - j5$ ohmios. Obtener la función de transferencia de tensión $V_0/V_i$ del circuito dado.

El sistema de ecuaciones de las dos mallas elegidas, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tensión de salida $V_0$ es

$$V_0 = I_2(5-j5) = (5-j5)\frac{\begin{vmatrix} 5 & V_i \\ -(5+j5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(5-j5)(5+j5)V_i}{(50-j50)} = \frac{50V_i}{50\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ}}$$

con lo que $$\frac{V_0}{V_i} = \frac{50}{50\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ}} = 0{,}707\,\underline{/45^\circ}$$

**9-17** El circuito de la Fig. 9-20 contiene dos generadores de tensión. Hallar la intensidad de corriente que circula por la impedancia $2 + j3$ ohmios debida a cada una de las fuentes.

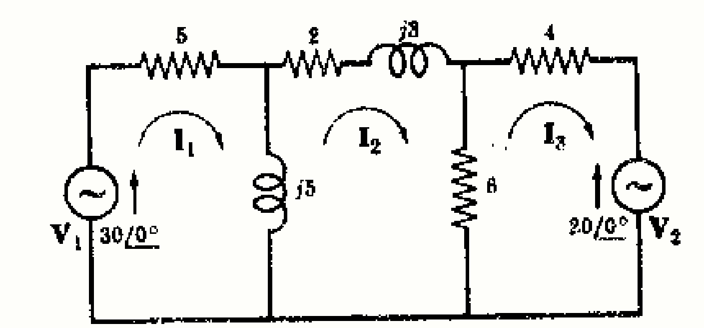



Fig. 9-20

Se eligen las mallas de forma que la corriente que circule por la impedancia en cuestión sea, directamente, la corriente de malla $I_2$. El sistema de ecuaciones del circuito, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\underline{/0^\circ} \\ 0 \\ -20\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

El determinante de impedancias $$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + j620 = 624\underline{/83{,}55^\circ}.$$

Desarrollando el determinante del numerador de $\mathbf{I}_2$ por los elementos de la segunda columna resulta

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 30\underline{/0^\circ} & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -20\underline{/0^\circ} & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 30\underline{/0^\circ}(-)\frac{\begin{vmatrix} -j5 & -6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} + 0 + (-20\underline{/0^\circ})(-)\frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & -6 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

$$= -30\underline{/0^\circ}\left(\frac{50\underline{/-90^\circ}}{624\underline{/83,55^\circ}}\right) + 20\underline{/0^\circ}\left(\frac{42,4\underline{/-135^\circ}}{624\underline{/83,55^\circ}}\right) = 2,41\underline{/6,45^\circ} + 1,36\underline{/141,45^\circ}$$

La corriente que origina la fuente $\mathbf{V}_1$ por la impedancia $2 + j3$ es $2,41\underline{/6,45^\circ}$ y la que origina $\mathbf{V}_2$ es $1,36\underline{/141,45^\circ}$. La suma de estas dos intensidades es el valor de la corriente $\mathbf{I}_2$, es decir, $\mathbf{I}_2 = 2,41\underline{/6,45^\circ} + 1,36\underline{/141,45^\circ} = 1,74\underline{/40,1^\circ}$ A.

**9-18** En el circuito de la Fig. 9-20 hallar (*a*) la potencia suministrada por cada generador y (*b*) la potencia disipada en las resistencias.

(*a*) La corriente que circula por la rama que contiene al generador $\mathbf{V}_1$ es

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 30\underline{/0^\circ} & -j5 & 0 \\ 0 & 8+j8 & -6 \\ -20\underline{/0^\circ} & -6 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2240\underline{/53,8^\circ}}{624\underline{/83,55^\circ}} = 3,59\underline{/-29,75^\circ}$$

La potencia que suministra la fuente es $P_1 = V_1 I_1 \cos\theta = 30(3,59)\cos 29,75^\circ = 93,5$ W.

La intensidad de la corriente que circula por la rama que contiene $\mathbf{V}_2$ es

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & 30\underline{/0^\circ} \\ -j5 & 8+j8 & 0 \\ 0 & -6 & -20\underline{/0^\circ} \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{860\underline{/-125,6^\circ}}{624\underline{/83,55^\circ}} = 1,38\underline{/-209,15^\circ}$$

Obsérvese que $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_3$ tienen sentidos opuestos. La potencia suministrada por $\mathbf{V}_2$ es $P_2 = V_2(I_3)\cos\theta = (-)(20)(1,38)\cos -209,15^\circ = 24,1$ W.

La potencia total es $P_T = P_1 + P_2 = 93,5 + 24,1 = 117,6$ W.

(*b*) La potencia disipada en la resistencia de 5 Ω es $P_5 = 5(I_1)^2 = 5(3,59)^2 = 64,5$ W. En la resistencia de 2 Ω, $P_2 = 2(I_2)^2 = 2(1,74)^2 = 6,05$ W. La corriente que circula por la rama que contiene la resistencia de 6 Ω es $(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = (1,33 + j1,12) - (-1,205 + j0,672) = 2,535 + j0,45 = 2,57/10,1^\circ$; por tanto, $P_6 = 6(2,57)^2 = 39,6$ W. En la resistencia de 4 Ω, $P_4 = 4(I_3)^2 = 4(1,38)^2 = 7,61$ W.

La potencia total es $P_T = 64,5 + 6,05 + 39,6 + 7,61 = 117,76$ W.

**9-19** El circuito de la Fig. 9-21 tiene dos generadores de tensión, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. Siendo $\mathbf{V}_1 = 30\underline{/0^\circ}$ voltios, hallar $\mathbf{V}_2$ para que la intensidad de corriente por la impedancia $2 + j3$ ohmios sea nula.

Con las mallas elegidas, por la impedancia $2 + j3$ circulará una sola corriente. El sistema de ecuaciones correspondiente, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\underline{/0^\circ} \\ 0 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 30\underline{/0^\circ} & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & \mathbf{V}_2 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

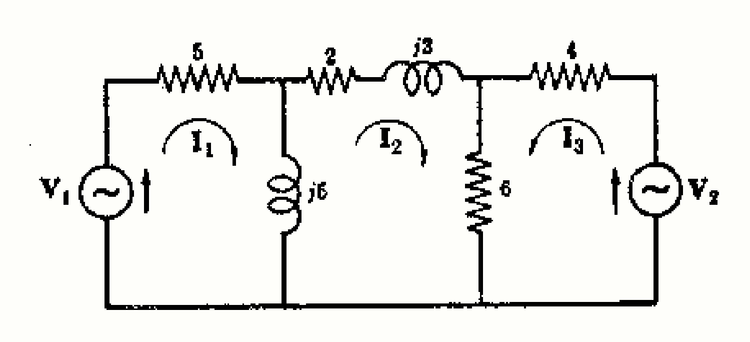



Fig. 9-21

Desarrollando $$-30\underline{/0^\circ}\begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - \mathbf{V}_2\begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$-30\underline{/0^\circ}\,(50\underline{/-90^\circ}) - \mathbf{V}_2(6)(5\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}) = 0$$

con lo que $$\mathbf{V}_2 = \frac{-30\underline{/0^\circ}\,(50\underline{/-90^\circ})}{6(5\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ})} = 35{,}4\underline{/45^\circ}$$

*Otro método.* Si no circula corriente por la impedancia $2 + j3$, $\mathbf{I}_2 = 0$, y las caídas de tensión en la reactancia $j5$ y en la resistencia de 6 Ω deben ser iguales, es decir,

$$\mathbf{I}_1(j5) = \mathbf{I}_3(6)$$

Sustituyendo $\mathbf{I}_1 = 30\underline{/0^\circ}/(5+j5)$ e $\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_2/10$,

$$\frac{30\underline{/0^\circ}}{5+j5}(j5) = \frac{\mathbf{V}_2}{10}(6) \qquad \text{de donde} \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{30\underline{/90^\circ}}{\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}}\left(\frac{10}{6}\right) = 35{,}4\underline{/45^\circ}$$

**9-20** En el circuito.de la Fig. 9-21 la tensión en bornes del generador es $\mathbf{V}_2 = 20\underline{/0^\circ}$ voltios. Hallar el valor de la fuente de tensión $\mathbf{V}_1$ para que la corriente que circule por la rama que contiene $\mathbf{V}_2$ sea nula.

Mediante las mallas elegidas en el Problema 9-19 podemos escribir la expresión de $\mathbf{I}_3$ e igualarla a cero:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & \mathbf{V}_1 \\ -j5 & 8+j8 & 0 \\ 0 & 6 & 20\underline{/0^\circ} \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

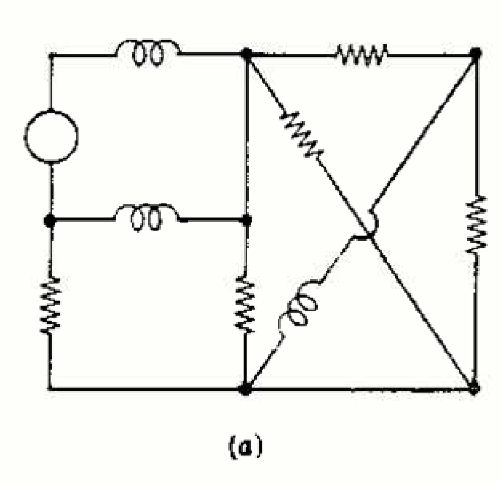
Desarrollando $$\mathbf{V}_1\begin{vmatrix} -j5 & 8+j8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 20\underline{/0^\circ}\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix} = 0$$

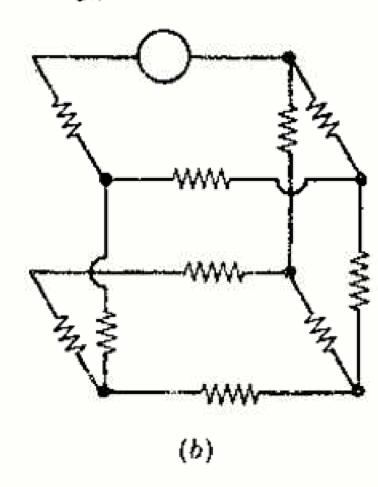
$$\mathbf{V}_1(30\underline{/-90^\circ}) + 20\underline{/0^\circ}\,(25+j80) = 0$$

con lo que $$\mathbf{V}_1 = \frac{-20\underline{/0^\circ}\,(25+j80)}{30\underline{/-90^\circ}} = 55{,}8\underline{/-17{,}4^\circ}$$

# Problemas propuestos

**9-21** Determinar el número de mallas necesarias para poder resolver cada uno de los circuitos de la Fig. 9-22(*a-f*). Emplear diferentes métodos para cada uno de ellos.
*Sol.* (*a*) 5, (*b*) 4, (*c*) 3, (*d*) 4, (*e*) 4, (*f*) 5.


(*a*)


(*b*)

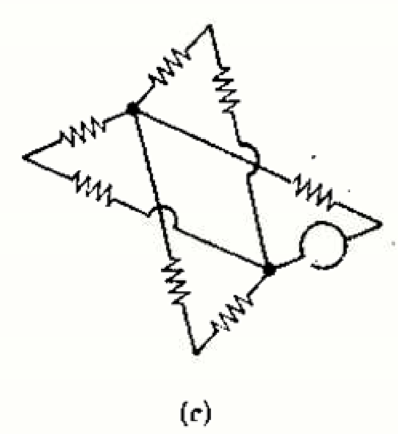
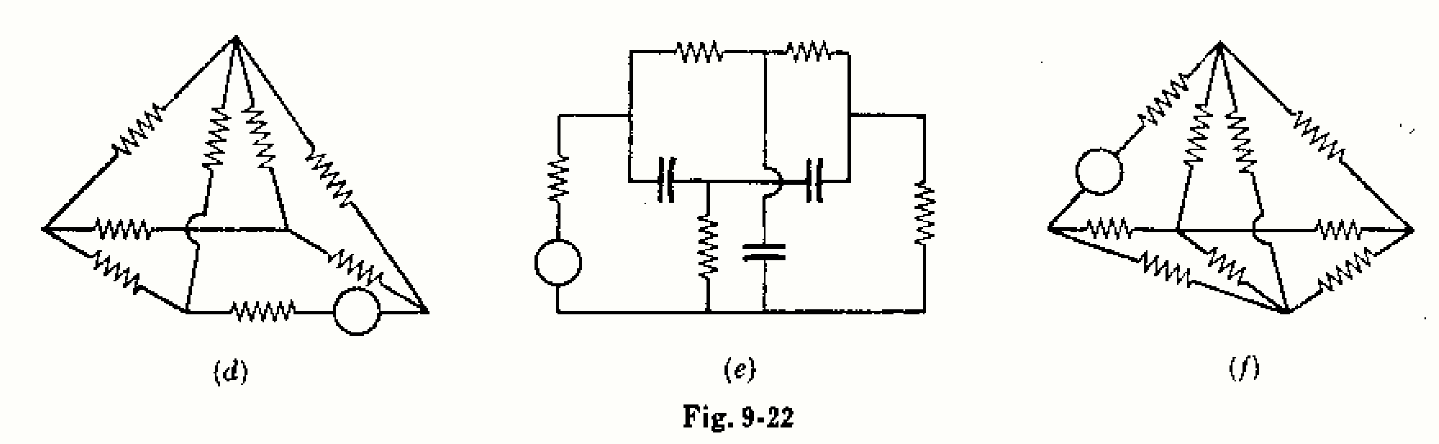

(*c*)

Fig. 9-22



(d) (e) (f)

Fig. 9-22

**9-22** En el circuito de la Fig. 9-23 hallar la intensidad de la corriente que circula por la resistencia de 3 ohmios. El sentido positivo de la corriente es el que se indica en el esquema. *Sol.* $4{,}47\underline{/-63{,}4^\circ}$ A.

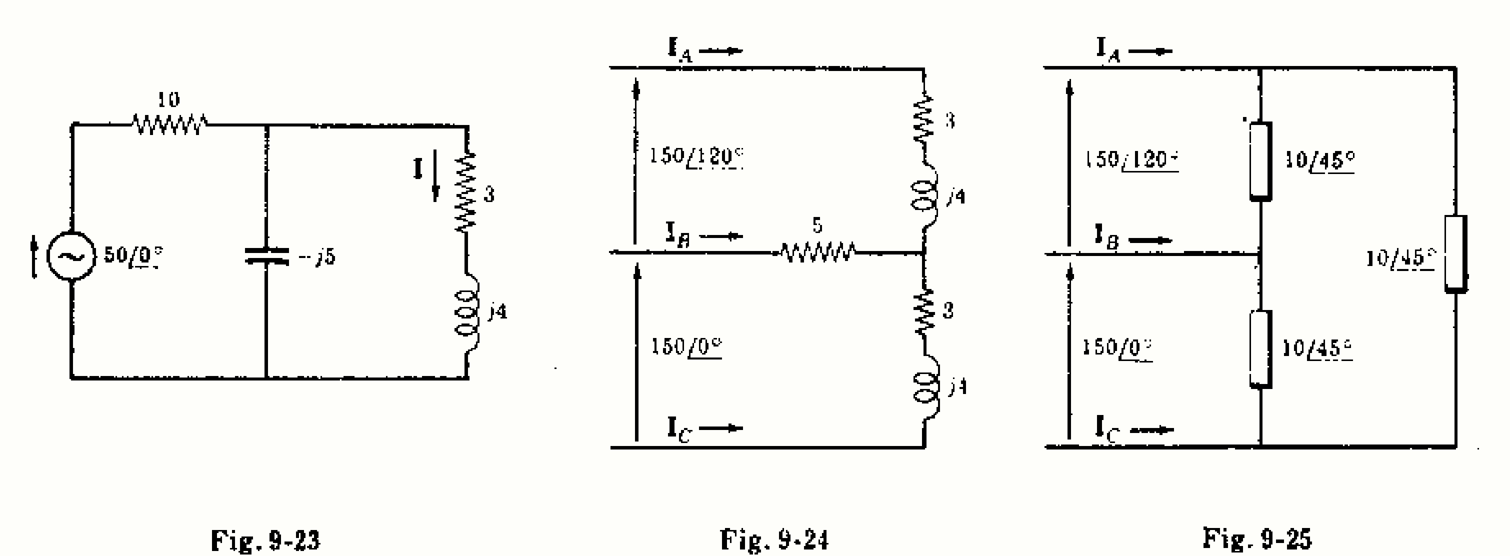



Fig. 9-23 Fig. 9-24 Fig. 9-25

**9-23** En el circuito de la Fig. 9-24 hallar las intensidades de corriente $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$.
*Sol.* $\mathbf{I}_A = 12{,}1\underline{/46{,}4^\circ}$ A; $\mathbf{I}_B = 19{,}1\underline{/-47{,}1^\circ}$ A; $\mathbf{I}_C = 22{,}1\underline{/166{,}4^\circ}$ A.

**9-24** En el circuito de la Fig. 9-25 hallar las intensidades $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$. *Sol.* $26\underline{/45^\circ}$ A; $26\underline{/-75^\circ}$ A; $26\underline{/-195^\circ}$ A.

**9-25** En el circuito de la Fig. 9-26 hallar la tensión $\mathbf{V}_{AB}$ por el método de las corrientes de malla.
*Sol.* $\mathbf{V}_{AB} = 75{,}4\underline{/55{,}2^\circ}$ V.

**9-26** En el circuito de la Fig. 9-27 hallar la tensión eficaz de la fuente **V** para que la potencia disipada en la resistencia de 5 ohmios sea 100 vatios. *Sol.* 40,3 V.

**9-27** Elegir unas mallas en el circuito de la Fig. 9-28 y hallar el valor del determinante de impedancias $\Delta_z$. Elegir otras mallas y calcular de nuevo $\Delta_z$. *Sol.* $61 - j15$.

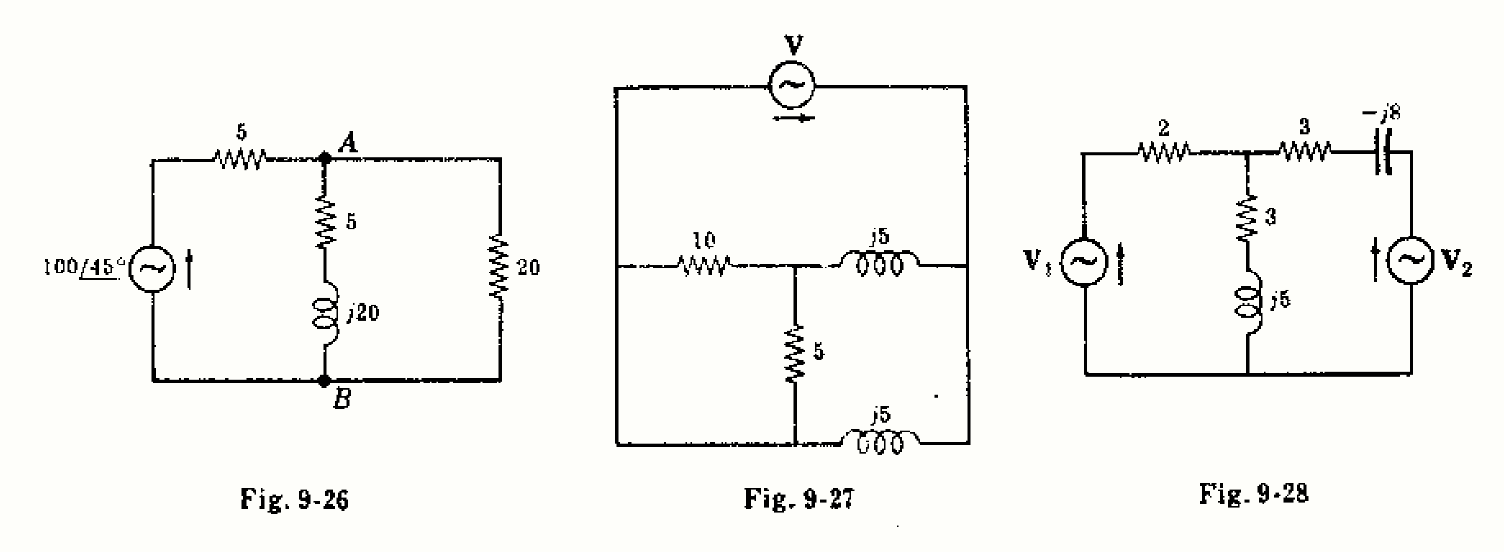



Fig. 9-26 Fig. 9-27 Fig. 9-28

**9-28** En el circuito de la Fig. 9-28, $V_1 = V_2 = 50\underline{/0°}$ voltios. Hallar la potencia suministrada por cada generador. Repetir el problema cambiando el sentido de la fuente $V_2$.
*Sol.* $P_1 = 191$ W; $P_2 = 77{,}1$ W; $P_1 = 327$ W; $P_2 = 214$ W.

**9-29** En el circuito de dos mallas de la Fig. 9-29 hallar la potencia suministrada por el generador, así como la potencia disipada en cada una de las resistencias del mismo.
*Sol.* $P = 36{,}7$ W; $P_1 = 2{,}22$ W; $P_2 = 27{,}8$ W; $P_3 = 6{,}66$ W.

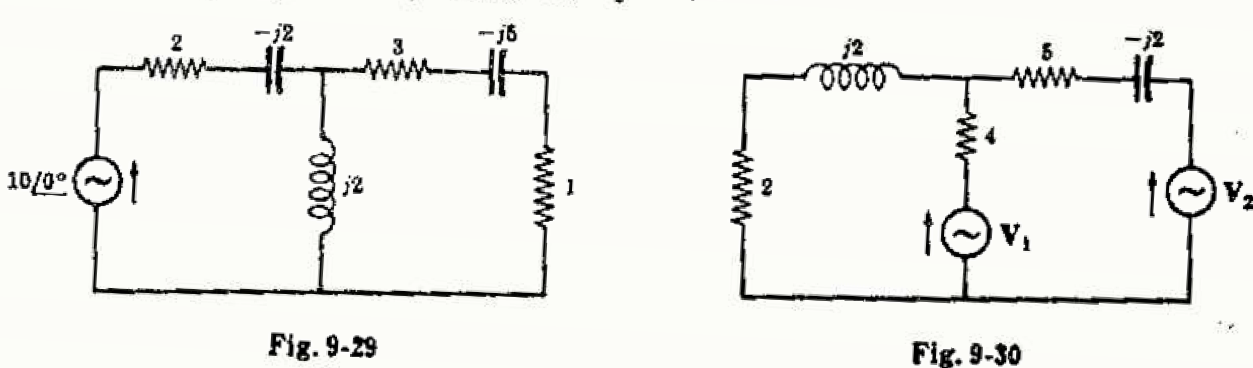



Fig. 9-29 Fig. 9-30

**9-30** En el circuito de la Fig. 9-30 los generadores $V_1$ y $V_2$ son $10\underline{/90°}$ voltios y suministran una intensidad con el sentido que se indica en el esquema. Hallar la potencia que suministra cada generador.
*Sol.* $P_1 = 11{,}0$ W; $P_2 = 9{,}34$ W.

**9-31** En el circuito de la Fig. 9-31 hallar la intensidad de corriente que circula por la impedancia $3 + j4$ ohmios.
*Sol.* 0.

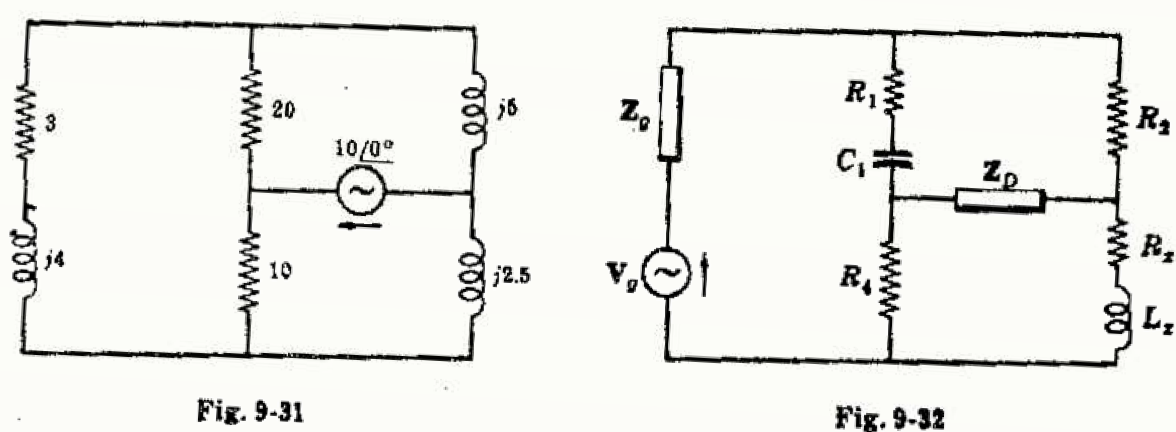



Fig. 9-31 Fig. 9-32

**9-32** El circuito de la Fig. 9-32 representa el puente de Hay. Elegir las mallas y escribir el sistema de ecuaciones en forma matricial. Expresar entonces la corriente que circula por $\mathbf{Z}_D$ en forma de determinante e igualarla a cero. Hallar los valores de $R_x$ y $L_x$ en función de las otras constantes del puente.

$$Sol. \quad R_x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}, \quad L_x = \frac{C_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}$$

**9-33** El circuito de la Fig. 9-33 representa el puente de Owen. Hallar los valores de $R_x$ y $L_x$ en función de las otras constantes del puente cuando la corriente que circula por $\mathbf{Z}_D$ sea nula. *Sol.* $R_x = \dfrac{C_1}{C_4} R_2$, $L_x = C_1 R_2 R_4$

**9-34** El circuito de la Fig. 9-34 es un puente de medida del coeficiente de autoinducción de una bobina. Elegir las mallas y escribir el sistema de ecuaciones en forma matricial. Hallar los valores de $R_x$ y $L_x$ cuando la corriente que circula por $\mathbf{Z}_D$ sea cero.

*Sol.* $R_x = \dfrac{R_2}{R_1} R_4$, $L_x = \dfrac{R_2}{R_1} L_4$

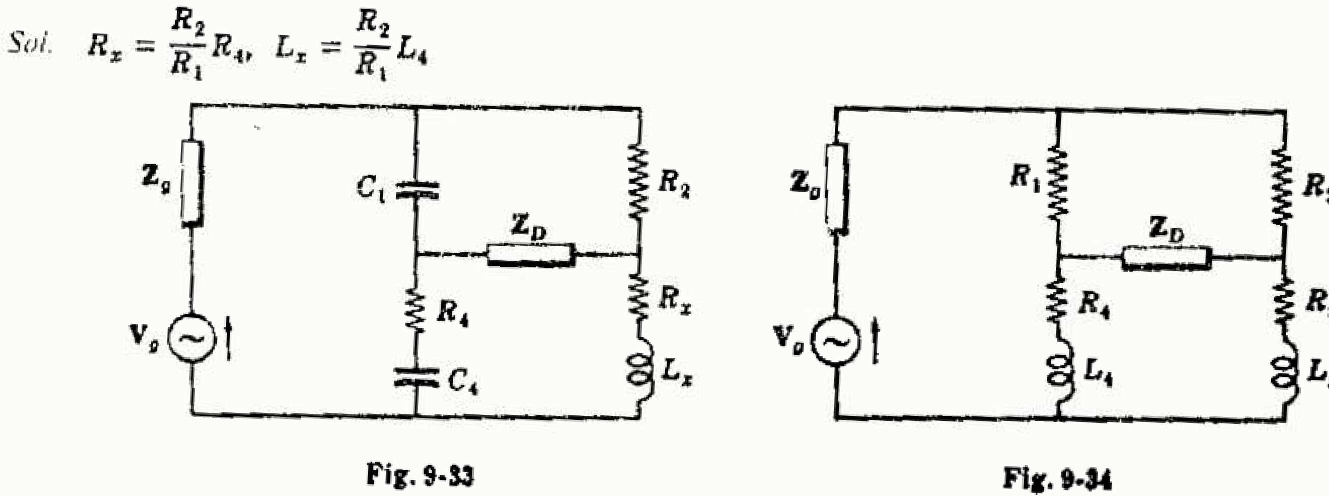



Fig. 9-33 Fig. 9-34

**9-35** Hallar la función de transferencia de tensión $V_0/V_i$ en el circuito de la Figura 9-35. *Sol.* 0,139/90°.

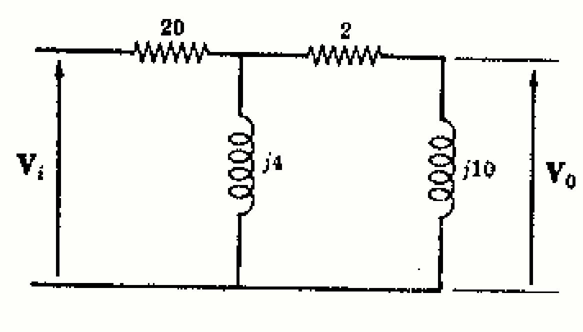



Fig. 9-35

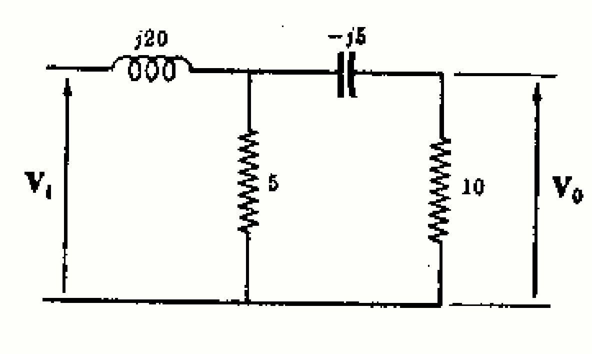



Fig. 9-36

**9-39** Hallar la función de transferencia de tensión $V_0/V_i$ en el circuito de la Figura 9-36. *Sol.* 0,159/−61,4°.

**9-37** En el circuito de la Fig. 9-37 hallar el valor de $V_0$ con el sentido de polarización que se indica. *Sol.* 1,56/128,7° V.

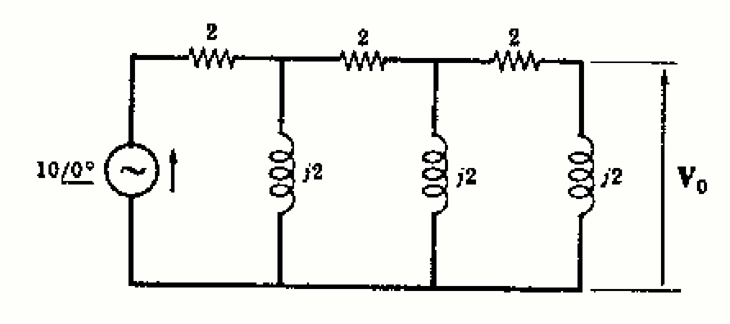



Fig. 9-37

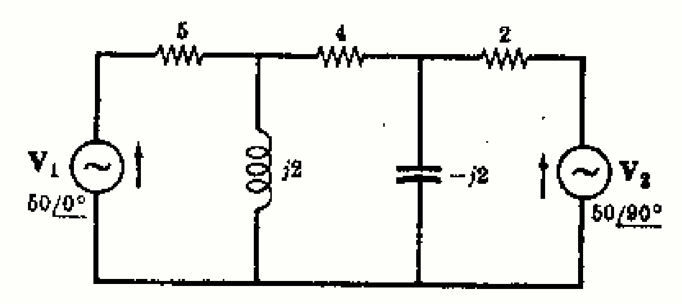



Fig. 9-38

**9-38** En el circuito de la Fig. 9-38 hallar la potencia disipada en cada una de las tres resistencias. *Sol.* 471 W; 47,1 W; 471 W.

**9-39** En el circuito de la Fig. 9-38 hallar la potencia suministrada por cada uno de los generadores. *Sol.* $P_1 = 422$ W; $P_2 = 565$ W.

**9-40** En el circuito de la Fig. 9-39 hallar la intensidad de la corriente de malla $I_3$ con la elección de las mallas considerada. *Sol.* 1,38/−209,15° A.

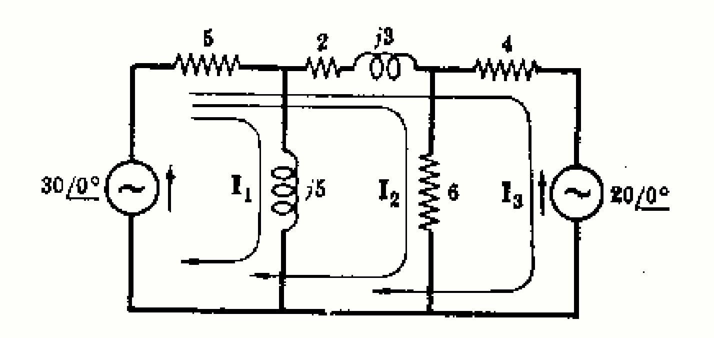



Fig. 9-39

**9-41** Hallar la intensidad de corriente $I_3$ en el circuito de la Figura 9-40. *Sol.* 11,6/113,2° A.

**9-42** En el circuito de la Fig. 9-40 hallar la relación de intensidades $I_1/I_3$. *Sol.* $-j3{,}3$.

**9-43** En el circuito de la Fig. 9-41, con las tres corrientes de malla que se indican, hallar las impedancias $Z_{\text{transferencia } 13}$ y $Z_{\text{transferencia } 31}$. *Sol.* 4,3/−68,2° para los dos.

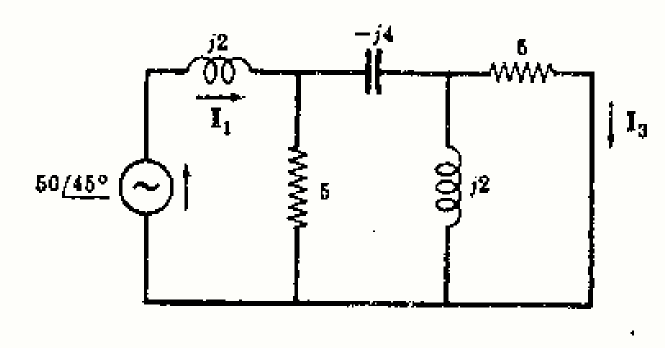



Fig. 9-40

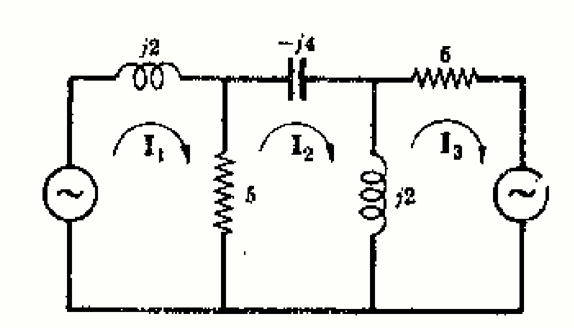



Fig. 9-41

**9-44** En el circuito de la Fig. 9-42, y con las mallas que se indican, hallar las impedancias $\mathbf{Z}_{\text{entrada } 1}$, $\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 12}$ y $\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 13}$. *Sol.* $20{,}2\angle -36{,}1°$; $17{,}4\angle -71{,}6°$; $6{,}82\angle -82{,}9°$.

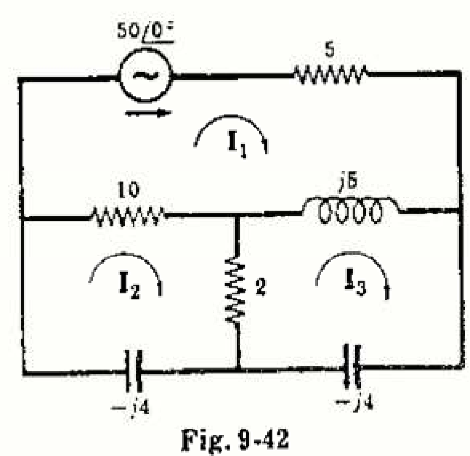



Fig. 9-42

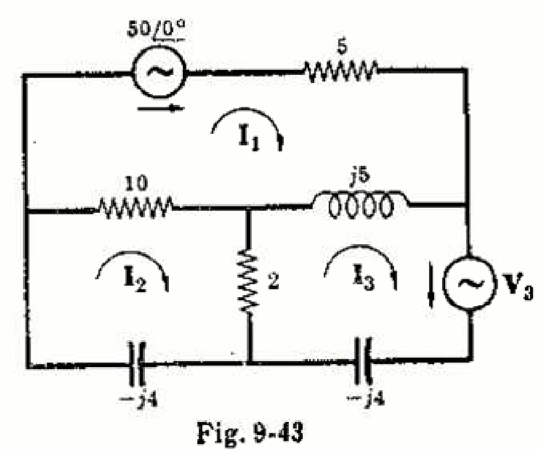



Fig. 9-43

**9-45** En la Fig. 9-43 se añade el generador $\mathbf{V}_3$ al circuito de la Fig. 9-42. Hallar el valor de $\mathbf{V}_3$ de manera que la corriente de malla $\mathbf{I}_1$ sea cero. *Sol.* $16{,}8\angle 133{,}2°$ V.

**9-46** En la Fig. 9-44 se añade el generador $\mathbf{V}_2$ al circuito de la Fig. 9-42. Hallar el valor de $\mathbf{V}_2$ de manera que la corriente de malla $\mathbf{I}_1$ sea nula. *Sol.* $42{,}9\angle 144{,}5°$ V.

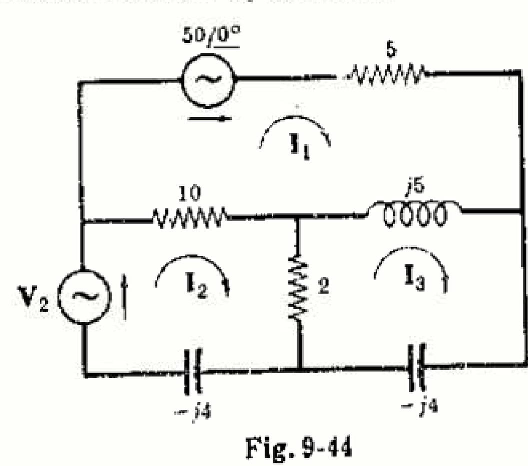



Fig. 9-44

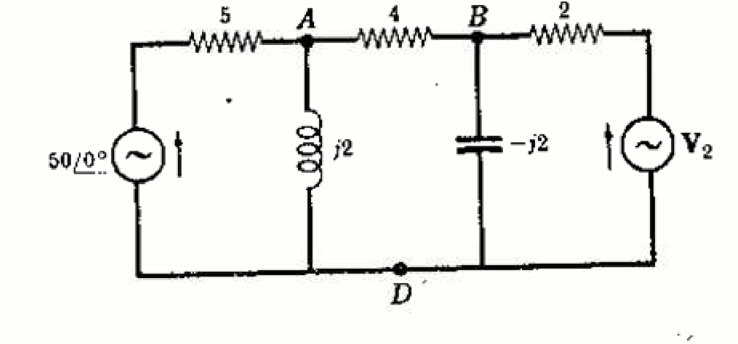



Fig. 9-45

**9-47** En el circuito de la Fig. 9-45 hallar el valor de $\mathbf{V}_2$ de manera que la intensidad de la corriente que circule por la resistencia de 4 ohmios sea nula. *Sol.* $26{,}3\angle 113{,}2°$.

**9-48** En el circuito de la Fig. 9-45 hallar las tensiones $\mathbf{V}_{AD}$ y $\mathbf{V}_{BD}$ sabiendo que la tensión en bornes del generador es $\mathbf{V}_2 = 26{,}3\angle 113{,}2°$ voltios.
*Sol.* $\mathbf{V}_{AD} = \mathbf{V}_{BD} = 18{,}5\angle 68{,}1°$ V.

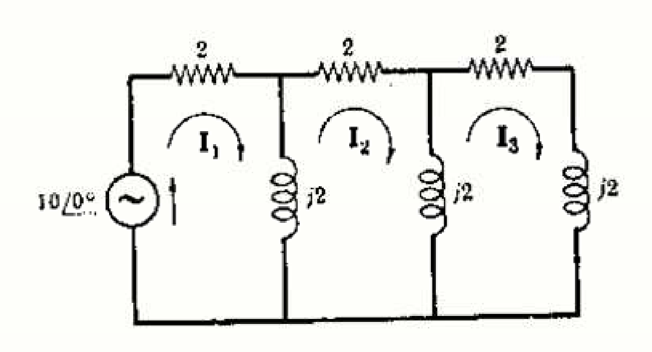



Fig. 9-46

**9-49** Hallar la impedancia $\mathbf{Z}_{\text{transferencia } 13}$ con la elección de mallas que se indica en la Fig. 9-46. Calcular el valor de $\mathbf{I}_3$ mediante esta impedancia de transferencia.
*Sol.* $12{,}8\angle -38{,}7°$; $0{,}782\angle 38{,}7°$.

**9-50** En el circuito de la Fig. 9-47 calcular el valor de la tensión en bornes del generador $\mathbf{V}_2$ para que la intensidad de corriente que circule por él sea nula. *Sol.* $\mathbf{V}_2 = 4\angle 180°$ V.

**9-51** Hallar el valor de tensión en bornes del generador $\mathbf{V}_1$ de la Fig. 9-48 que produce una caída de tensión eficaz en la resistencia de 5 ohmios igual a 20 voltios. *Sol.* 69,1 V.

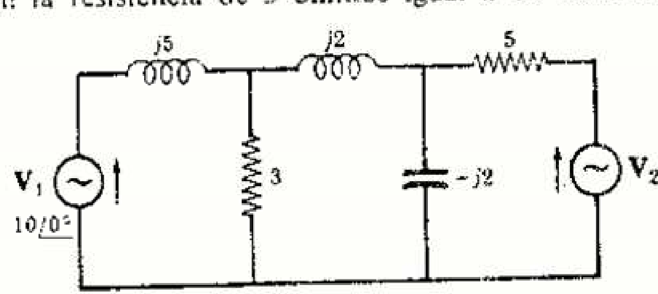



Fig. 9-47

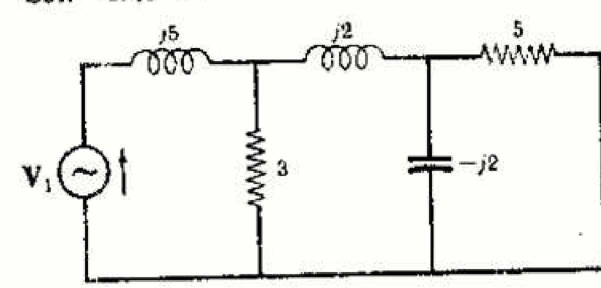



Fig. 9-48

# Capítulo 10

## Análisis de un circuito por el método de las tensiones en los nudos

### INTRODUCCION

Mediante la elección de lazos cerrados o mallas y la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff, se ha establecido en el Capítulo 9 el método de las corrientes de malla para la solución de los problemas de circuitos. En este capítulo se llega a la misma solución planteando un sistema de ecuaciones determinado por la aplicación de la primera ley de Kirchhoff. Este método se llama *método de las tensiones en los nudos.*

### TENSIONES EN LOS NUDOS

Un *nudo* es un punto de un circuito común a *dos o más elementos* del mismo. Si en un nudo se unen *tres o más elementos*, tal nudo se llama *nudo principal o conjunción.* A cada nudo del circuito se le puede asignar un número o una letra. En la Fig. 10-1 son nudos *A, B, 1, 2, 3* y *1, 2* y *3* son nudos principales. La tensión en un nudo es la tensión de este nudo respecto de otro, denominado *nudo de referencia.* En la Fig. 10-1 se ha elegido el nudo *3* como nudo de referencia. Entonces $V_{13}$ es la tensión entre los nudos *1* y *3*, y $V_{23}$ la tensión entre los nudos *2* y *3*. Como quiera que las tensiones en los nudos se toman siempre respecto de un nudo de referencia dado, se emplea la notación $V_1$ en lugar de $V_{13}$ y $V_2$ en lugar de $V_{23}$.

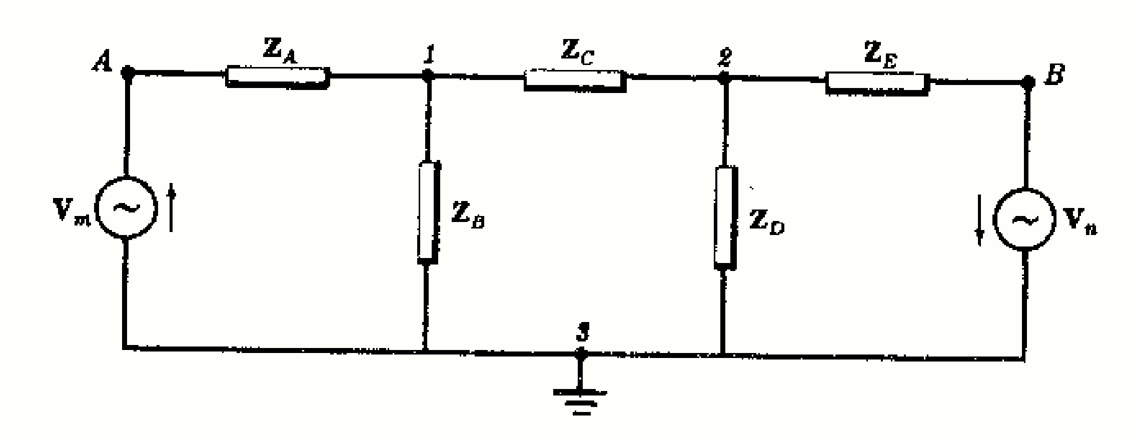



**Fig. 10-1. Nudos de una red**

El método de las tensiones en los nudos consiste en determinar las tensiones en todos los nudos principales respecto del nudo de referencia. La primera ley de Kirchhoff se aplica a los dos nudos principales *1* y *2*, obteniéndose así dos ecuaciones en las incógnitas $V_1$ y $V_2$. En la Fig. 10-2 se ha dibujado nuevamente el nudo *1* con todas sus ramas de conexión. Se supone que todas las corrientes en las ramas salen del nudo. Como la suma de las corrientes que salen del nudo es cero

$$\frac{V_1 - V_m}{Z_A} + \frac{V_1}{Z_B} + \frac{V_1 - V_2}{Z_C} = 0 \qquad (1)$$

Al establecer la Ecuación (*1*) la elección de los sentidos de las corrientes es arbitraria (**Véase Problema** 10-1.)

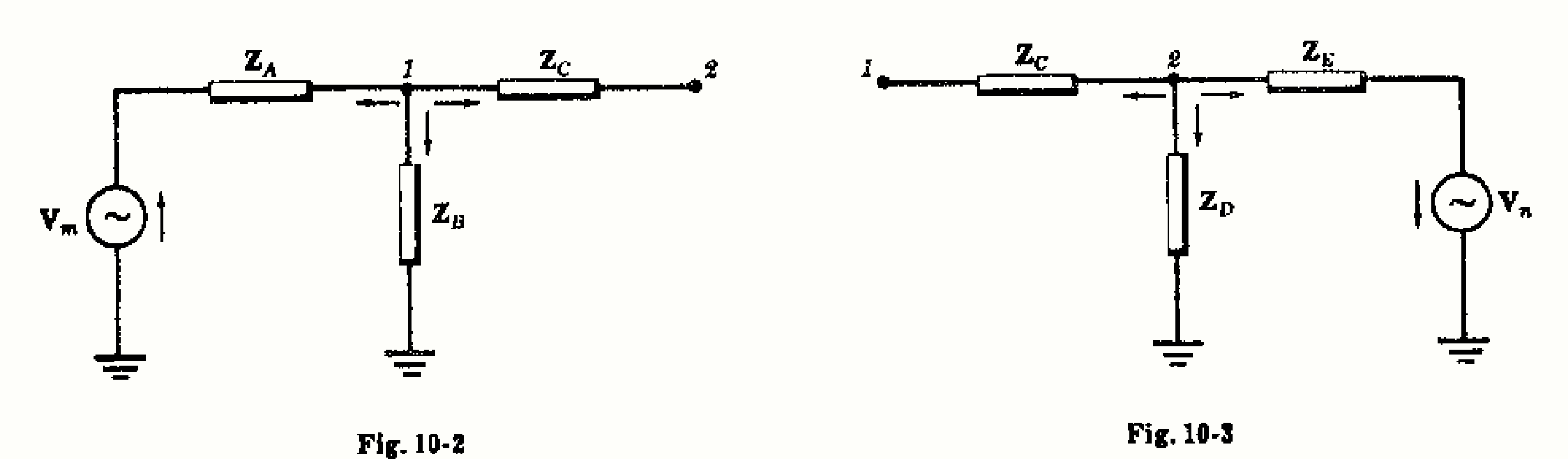



Fig. 10-2

Fig. 10-3

Repitiendo el mismo proceso con el nudo *2* (Fig. 10-3), la ecuación que resulta es

$$\frac{V_2 - V_1}{Z_C} + \frac{V_2}{Z_D} + \frac{V_2 + V_n}{Z_E} = 0 \qquad (2)$$

Agrupando en (*1*) y (*2*) los términos en $V_1$ y $V_2$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right) V_1 - \left(\frac{1}{Z_C}\right) V_2 &= \left(\frac{1}{Z_A}\right) V_m \\ -\left(\frac{1}{Z_C}\right) V_1 + \left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_D} + \frac{1}{Z_E}\right) V_2 &= -\left(\frac{1}{Z_E}\right) V_n \end{aligned} \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta que $1/Z = Y$, se puede escribir el sistema (*3*) en función de las admitancias

$$\begin{aligned} (Y_A + Y_B + Y_C)V_1 - Y_C V_2 &= Y_A V_m \\ -Y_C V_1 + (Y_C + Y_D + Y_E)V_2 &= -Y_E V_n \end{aligned} \qquad (4)$$

## NUMERO DE ECUACIONES DE TENSIONES EN LOS NUDOS

Se pueden escribir ecuaciones para cada uno de los nudos principales con la excepción del de referencia. En consecuencia, *el número de ecuaciones es igual al de nudos principales menos uno.* Disponiendo del método de las corrientes de malla y del de las tensiones en los nudos, la elección de uno u otro en cada caso particular depende de la configuración del circuito. En un circuito con muchas ramas en paralelo hay, normalmente, muchos más lazos que nudos, exigiendo menos ecuaciones, por tanto, de nudos para resolverlo (véanse los Problemas 9-6 y 10-4). En otros casos, puede haber el mismo número de mallas que de nudos o haber menos mallas que nudos. En todo caso debe elegirse siempre el método que dé menor número de ecuaciones.

## PLANTEAMIENTO DIRECTO DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE NUDOS

Un circuito con cuatro nudos principales exige para su solución tres ecuaciones nodales. En notación general el sistema es

$$\begin{aligned} Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 &= I_1 \\ Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 &= I_2 \\ Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 &= I_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

El coeficiente $Y_{11}$ se llama admitancia propia del nudo *1* y es la suma de todas las admitancias conectadas al nudo *1*. De igual forma, $Y_{22}$ e $Y_{33}$ son las admitancias de los nudos *2* y *3* respectivamente iguales a la suma de las admitancias conectadas a los nudos *2* y *3*.

El coeficiente $Y_{12}$ es la coadmitancia de los nudos *1* y *2* y es la suma de todas las admitancias que unen ambos nudos. $Y_{12}$ tiene signo negativo, como puede verse en la primera de las Ecuaciones (*4*). De igual forma, $Y_{23}$ e $Y_{13}$ son las coadmitancias de los elementos que unen los nudos *2* y *3*, *1* y *3*, respectivamente. Todas las coadmitancias tienen signo negativo. Obsérvese que $Y_{13} = Y_{31}$, $Y_{23} = Y_{32}$.

La intensidad $I_1$ es la suma de todas las corrientes de fuentes que pasan por el nudo *1*. Una corriente que entra en el nudo tiene signo positivo; a la que sale del nudo se le asigna el negativo. Las intensidades $I_2$ e $I_3$ son las sumas de las corrientes que pasan por los nudos *2* y *3*, respectivamente.

Por analogía con la notación matricial para las ecuaciones de las corrientes de malla (Capítulo 9), las tres ecuaciones nodales (*5*) pueden escribirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Las tensiones en los nudos $V_1$, $V_2$ y $V_3$ vienen dadas por

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} & Y_{13} \\ I_2 & Y_{22} & Y_{23} \\ I_3 & Y_{32} & Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y}, \qquad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 & Y_{13} \\ Y_{21} & I_2 & Y_{23} \\ Y_{31} & I_3 & Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y} \qquad \text{y} \qquad V_3 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & I_1 \\ Y_{21} & Y_{22} & I_2 \\ Y_{31} & Y_{32} & I_3 \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

Si el determinante numerador de cada una de las fracciones se desarrolla por los elementos de la columna que contiene las corrientes, se obtienen para las tensiones en los nudos las ecuaciones siguientes:

$$V_1 = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) + I_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y}\right) + I_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y}\right) \qquad (7)$$

$$V_2 = I_1\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Y}\right) + I_2\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_Y}\right) + I_3\left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_Y}\right) \qquad (8)$$

$$V_3 = I_1\left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_Y}\right) + I_2\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_Y}\right) + I_3\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_Y}\right) \qquad (9)$$

Los términos del segundo miembro de (*7*), (*8*) y (*9*) son las componentes del fasor resultante de las diversas corrientes. Así, en (*7*), la tensión $V_1$ es la suma de $I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$, debida a la corriente $I_1$, $I_2(\Delta_{21}/\Delta_Y)$ a $I_2$ e $I_3(\Delta_{31}/\Delta_Y)$ a $I_3$.

**Ejemplo.**

Escribir las ecuaciones de las tensiones en los nudos del circuito de la Fig. 10-4 y expresarlas en forma matricial.

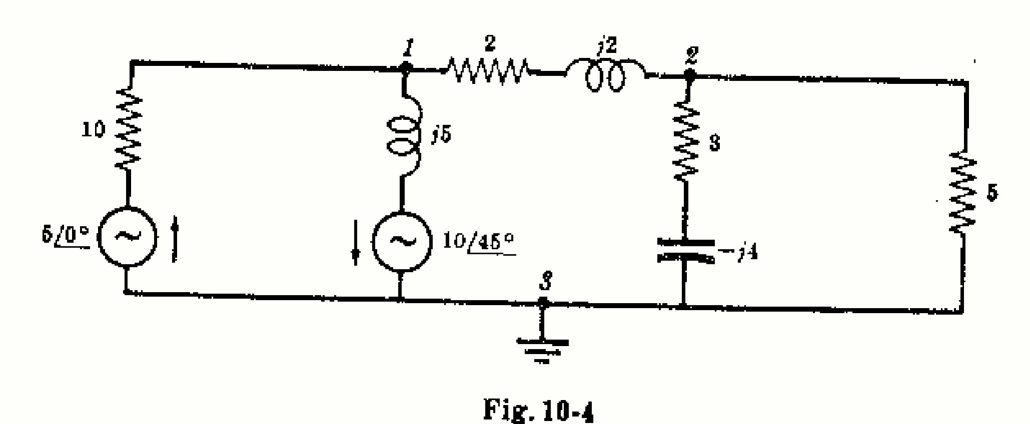



**Fig. 10-4**

Elegir el nudo *3* como referencia y numerar los nudos en la forma en que se ha hecho en la figura. Suponer que las corrientes en las ramas se alejan de los nudos *1* y *2*. Aplicando la primera ley de Kirchhoff a cada nudo, se obtiene:

En el nudo *1*: $$\frac{V_1 - 5\angle 0^\circ}{10} + \frac{V_1 + 10\angle 45^\circ}{j5} + \frac{V_1 - V_2}{2 + j2} = 0 \qquad (10)$$

En el nudo *2*: $$\frac{V_2 - V_1}{2 + j2} + \frac{V_2}{3 - j4} + \frac{V_2}{5} = 0 \qquad (11)$$

Agrupando términos,

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j2}\right)V_1 - \left(\frac{1}{2 + j2}\right)V_2 = \frac{5\angle 0^\circ}{10} - \frac{10\angle 45^\circ}{j5} \qquad (12)$$

$$-\left(\frac{1}{2 + j2}\right)V_1 + \left(\frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{3 - j4} + \frac{1}{5}\right)V_2 = 0 \qquad (13)$$

En la matriz cuadrada que contiene las admitancias, $Y_{11} = 1/10 + 1/j5 + 1/(2 + j2)$ por comparación con (*6*). Esto está de acuerdo con la definición de $Y_{11}$ como admitancia propia del nudo *1*. También $Y_{12} = Y_{21} = -1/(2 + j2)$ en concordancia con la definición de coadmitancia.

$I_1$ en la notación general se definió como la suma de las corrientes en el nudo *1*. De acuerdo con el convenio del signo, la corriente de la fuente de la rama izquierda tiene signo positivo y la de la fuente de la segunda rama, que se aleja de *1*, tiene signo negativo. Por tanto, $I_1 = (5\angle 0^\circ)/10 - (10\angle 45^\circ)/j5$. La corriente $I_2$ en el nudo *2* es cero, ya que no hay fuente alguna en las ramas conectadas con el nudo *2*.

## ADMITANCIA DE ENTRADA

Consideremos un circuito pasivo con dos terminales externos, como en la Fig. 10-5. La fuente de intensidad $I_1$ envía la corriente por el nudo *1* y se supone que las posibles admitancias en paralelo de la fuente están incluidas en el circuito.

Como no hay más fuentes de intensidad en el circuito, la ecuación de $V_1$ es

$$V_1 = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) \qquad (14)$$

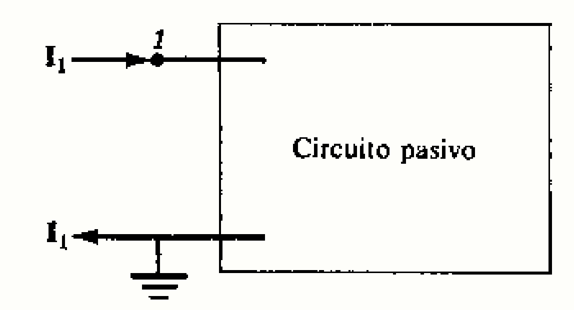



**Fig. 10-5**

La admitancia de entrada, $Y_{\text{entrada}}$, se define como el cociente de la intensidad de corriente que circula procedente de una fuente única existente entre dos nudos y la caída de tensión correspondiente entre ambos. De la expresión (*14*), por tanto,

$$Y_{\text{entrada }1} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}}$$

En un circuito activo, la admitancia de entrada se define como la admitancia que presenta el circuito en los terminales dados cuando todas las fuentes internas se hacen iguales a cero. Entonces,

$$V_1 = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y}\right) + \cdots = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right)$$

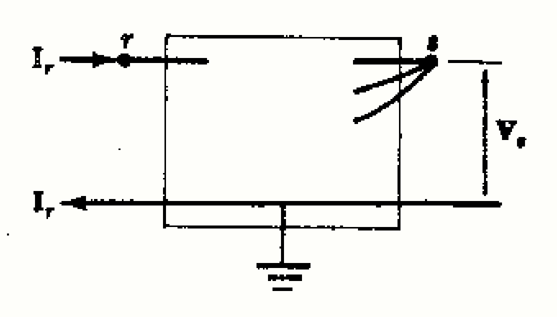
ó bien $$Y_{\text{entrada }1} = I_1/V_1 = \Delta_Y/\Delta_{11}$$

Por tanto, la definición de $V_{\text{entrada}}$ se mantiene tanto para un circuito pasivo como para uno activo.

## ADMITANCIA DE TRANSFERENCIA

Una corriente que circula por un nudo en un circuito da lugar a tensiones en todos los nudos con respecto al de referencia. La admitancia de transferencia es el cociente de la corriente que entra en un nudo a la tensión resultante en otro nudo, haciéndose iguales a cero todas las demás fuentes.

En el circuito de la Fig. 10-6, $I_r$ es la intensidad de corriente que entra en el nudo *r* y la tensión resultante en el nudo *s* viene dada por




$$V_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_Y}\right) + \cdots + I_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Y}\right) + \cdots + (0)\left(\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_Y}\right)$$

$$= I_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Y}\right)$$

Entonces, $$Y_{\text{transferencia } rs} = I_r/V_s = \Delta_Y/\Delta_{rs}$$

Fig. 10-6

Obsérvese que el punto de retorno de la corriente de entrada se ha elegido como nudo de referencia. Esto es preciso hacerlo porque de otra forma la corriente aparecería en más de un término en la ecuación de $V_s$ y la definición de $Y_{\text{transferencia}}$ no sería válida.

Utilizando las admitancias de entrada y transferencia, se obtiene el sistema de ecuaciones siguientes para $V_1$, $V_2$ y $V_3$ de un circuito de cuatro nudos principales:

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{\text{entrada } 1}} + \frac{I_2}{Y_{\text{transferencia } 21}} + \frac{I_3}{Y_{\text{transferencia } 31}}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{\text{transferencia } 12}} + \frac{I_2}{Y_{\text{entrada } 2}} + \frac{I_3}{Y_{\text{transferencia } 32}}$$

$$V_3 = \frac{I_1}{Y_{\text{transferencia } 13}} + \frac{I_2}{Y_{\text{transferencia } 23}} + \frac{I_3}{Y_{\text{entrada } 3}}$$

Si solo actúa una fuente de intensidad en la red, con todas las demás hechas iguales a cero, son evidentes las definiciones de las admitancias de entrada y transferencia.

## Problemas resueltos

**10-1** Escribir la ecuación del nudo *2* de las Figs. 10-7(*a*) y 10-7(*b*).

Como todas las corrientes en la Fig. 10-7(*a*) se alejan del nudo *2*, la suma de las corrientes que salen del nudo es igual a cero.

$$(V_2 - V_1)/j2 + V_2/10 + (V_2 + 10\underline{/0^\circ})/j5 = 0$$

o bien $$-(1/j2)V_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)V_2 = -10\underline{/0^\circ}/j5$$

En la Fig. 10-7(*b*) la corriente de una rama va hacia el nudo *2* y las otras dos se alejan. Poniendo que la corriente que entra es igual a la suma de las que salen

$$(V_1 - V_2)/j2 = V_2/10 + (V_2 + 10\underline{/0^\circ})/j5$$

Agrupando términos $$V_2/10 + (V_2 + 10\underline{/0^\circ})/j5 + (V_2 - V_1)/j2 = 0$$

o bien $$-(1/j2)V_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)V_2 = -10\underline{/0^\circ}/j5$$

Por consiguiente, puede hacerse cualquier elección de sentido de las corrientes para escribir las ecuaciones de los nudos, ya que las ecuaciones que resultan son idénticas.

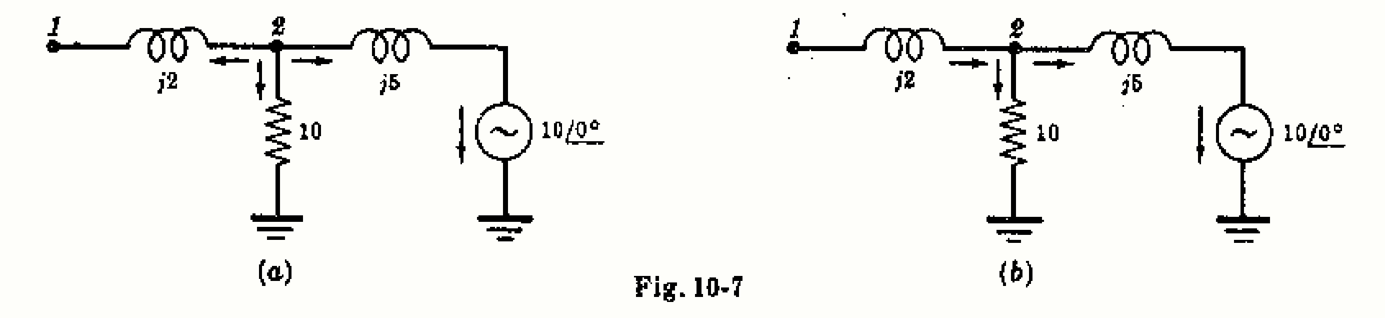



Fig. 10-7

**10-2** Escribir las ecuaciones de los nudos de la Fig. 10-8 y expresar el sistema en forma matricial.

Se han numerado los nudos en la forma que se ve en la figura eligiéndose uno como referencia. Suponiendo que todas las corrientes en las ramas salen de los nudos, se pueden escribir las siguientes ecuaciones de los nudos *1*, *2* y *3*:

$$(\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2)/(-j8) \;+\; \mathbf{V}_1/5 \;+\; (\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_3+10\underline{/0^\circ})/(3+j4) \;=\; 0$$

$$(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)/(-j8) \;+\; \mathbf{V}_2/10 \;+\; (\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_3-5\underline{/0^\circ})/(j4) \;=\; 0$$

$$\mathbf{V}_3/8 \;+\; (\mathbf{V}_3-\mathbf{V}_1-10\underline{/0^\circ})/(3+j4) \;+\; (\mathbf{V}_3-\mathbf{V}_2+5\underline{/0^\circ})/(j4) \;=\; 0$$

Agrupando términos,

$$\left(\frac{1}{-j8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{-j8}\right)\mathbf{V}_2 - \left(\frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_3 = (-10\underline{/0^\circ})/(3+j4)$$

$$-\left(\frac{1}{-j8}\right)\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{-j8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_2 - \left(\frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_3 = (5\underline{/0^\circ})/(j4)$$

$$-\left(\frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_2 + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{j4}+\frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_3 = \left(\frac{10\underline{/0^\circ}}{3+j4}\right)-\left(\frac{5\underline{/0^\circ}}{j4}\right)$$

En notación matricial

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-j8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3+j4}\right) & -\left(\frac{1}{-j8}\right) & -\left(\frac{1}{3+j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{-j8}\right) & \left(\frac{1}{-j8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{3+j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{j4}+\frac{1}{3+j4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{10\underline{/0^\circ}}{3+j4}\right) \\ \left(\frac{5\underline{/0^\circ}}{j4}\right) \\ \left(\frac{10\underline{/0^\circ}}{3+j4}-\frac{5\underline{/0^\circ}}{j4}\right) \end{bmatrix}$$

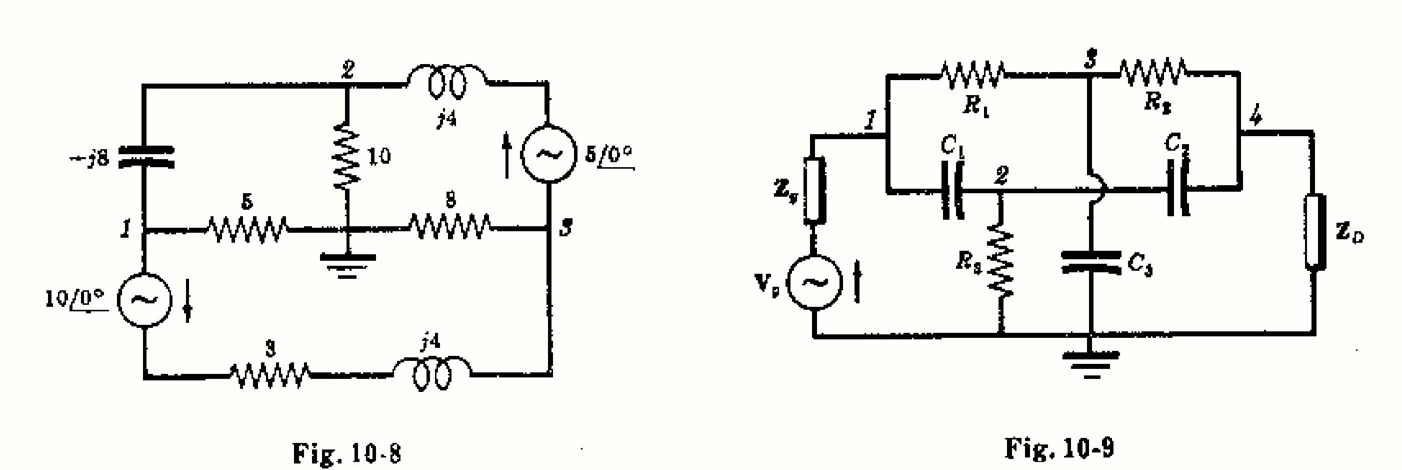



Fig. 10-8

Fig. 10-9

**10-3** Escribir el sistema de ecuaciones de los nudos de la Fig. 10-9 en forma matricial.

Los nudos se han elegido en la forma que aparece en el esquema. En $[Y]$, $\mathbf{Y}_{11}$ es la suma de todas las admitancias unidas al nudo *1*, $(1/\mathbf{Z}_g + 1/R_1 + j\omega C_1)$. $\mathbf{Y}_{12}$ e $\mathbf{Y}_{13}$ son la suma de todas las admitancias comunes a los nudos *1* y *2* y a los *1* y *3*, con signo menos; esto es, $\mathbf{Y}_{12} = -(j\omega C_1)$ e $\mathbf{Y}_{13} = -(1/R_1)$. Los otros términos de $[Y]$ se determinan de manera análoga.

La única corriente de excitación en el circuito va hacia el nudo *1* y es, por tanto, positiva, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g$.

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_g}+\frac{1}{R_1}+j\omega C_1\right) & -(j\omega C_1) & -\left(\frac{1}{R_1}\right) & 0 \\ -(j\omega C_1) & \left(j\omega C_1+\frac{1}{R_3}+j\omega C_2\right) & 0 & -(j\omega C_2) \\ -\left(\frac{1}{R_1}\right) & 0 & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j\omega C_3\right) & -\left(\frac{1}{R_2}\right) \\ 0 & -(j\omega C_2) & -\left(\frac{1}{R_2}\right) & \left(\frac{1}{R_2}+j\omega C_2+\frac{1}{\mathbf{Z}_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**10-4** En el circuito de la Fig. 10-10 los dos condensadores iguales de $C$ faradios y la resistencia $R$ se ajustan de forma que la corriente en la impedancia indicadora $\mathbf{Z}_D$ sea cero. Para que se cumpla esta condición, determinar $R_x$ y $L_x$ en función de las otras constantes del circuito.

Los nudos se eligen tal como se ve en la figura. Si se toma la referencia a un terminal de $\mathbf{Z}_D$, una tensión de nudo, $\mathbf{V}_3$, nula da lugar a una corriente cero a través de $\mathbf{Z}_D$. El sistema de ecuaciones nodales en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_g} + j\omega C + \frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & -\left(\frac{1}{R}\right) \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{j\omega L_x}\right) & -(j\omega C) \\ -\left(\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & \left(j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{Z}_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expresando $\mathbf{V}_3$ en forma de determinante e igualando a cero,

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_g} + j\omega C + \frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{j\omega L_x}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = 0$$

El determinante numerador tiene que ser nulo. Desarrollándolo por los elementos de la tercera columna se obtiene

$$(\mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g) \begin{vmatrix} -j\omega C & (j2\omega C + 1/R_x + 1/j\omega L_x) \\ -1/R & -j\omega C \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\quad -\omega^2 C^2 + j2\omega C/R + 1/(RR_x) + 1/(j\omega L_x R) = 0$

de donde $\quad R_x = 1/(\omega^2 C^2 R) \quad$ y $\quad L_x = 1/(2\omega^2 C)$

Este resultado es el mismo que se obtuvo por el método de las corrientes de malla en el Problema 9-6 del Capítulo 9. Obsérvese de paso que el número de ecuaciones necesarias para la solución del problema se ha reducido de cuatro a tres por este procedimiento.

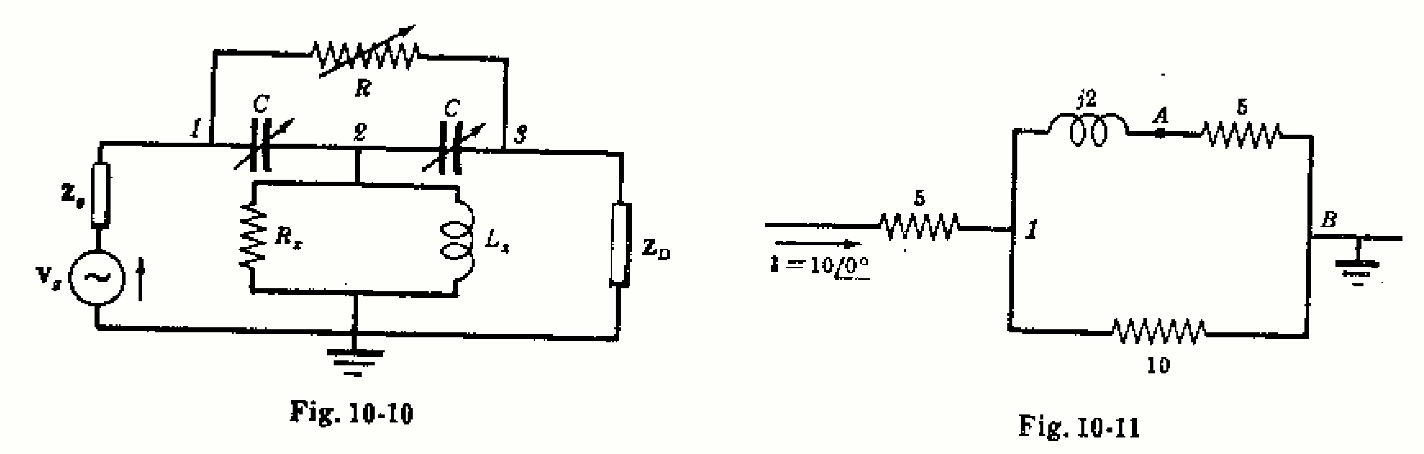



Fig. 10-10

Fig. 10-11

**10-5** En el circuito de la Fig. 10-11 anterior determinar la tensión $\mathbf{V}_{AB}$ por el método de los nudos.

Con solo dos nudos principales, basta con una ecuación nodal. Elegir el punto $B$ como referencia y escribir la ecuación del nudo $1$. Aplicando la primera ley de Kirchhoff, la corriente $\mathbf{I} = 10\underline{/0°}$ que entra tiene que ser igual a las que salen:

$$10\underline{/0°} = \mathbf{V}_1/10 + \mathbf{V}_1/(5 + j2) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_1 = 10\underline{/0°} \,/\, (0{,}281\underline{/-14{,}2°}) = 35{,}6\underline{/14{,}2°}$$

Como la corriente por la rama $5 + j2$ es $\mathbf{I} = \mathbf{V}_1/(5 + j2)$, la caída de tensión en la resistencia de 5 Ω es

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}(5) = \frac{\mathbf{V}_1}{(5 + j2)}(5) = \frac{35{,}6\underline{/14.2°}}{(5 + j2)}(5) = 33\underline{/-7{,}6°}$$

**10-6** Determinar la tensión $V_{AB}$ en el circuito de la Figura 10-12.

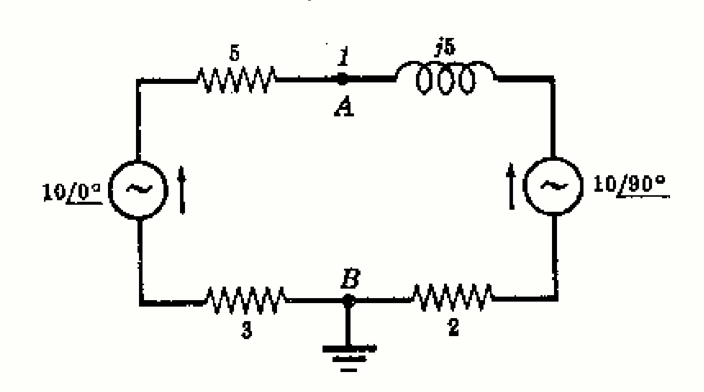



Fig. 10-12

El circuito no tiene nudos principales. Sin embargo, si se elige el punto $B$ como referencia y el punto $A$ como nudo $1$, se puede escribir una ecuación suponiendo que la corriente sale de $A$ por ambas ramas.

$$\frac{V_1 - 10\angle 0^\circ}{(5+3)} + \frac{V_1 - 10\angle 90^\circ}{(2+j5)} = 0$$

o bien

$$V_1\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2+j5}\right) = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{8} + \frac{10\angle 90^\circ}{2+j5}\right)$$

de donde $\quad V_{AB} = V_1 = 11{,}8\angle 55{,}05^\circ$.

**10-7** Hallar la tensión $V_{AB}$ en el circuito de la Figura 10-13.

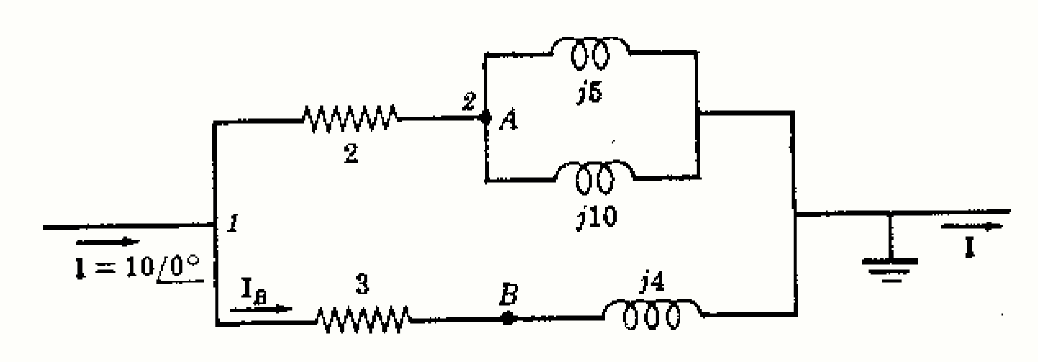



Fig. 10-13

Las ecuaciones de los nudos son:

En el nudo $1$: $\quad 10\angle 0^\circ = (V_1 - V_2)/2 + V_1/(3+j4)$

En el nudo $2$: $\quad (V_2 - V_1)/2 + V_2/j5 + V_2/j10 = 0$

Agrupando términos,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4}\right)V_1 - \frac{1}{2}V_2 = 10\angle 0^\circ$$

$$-\frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10}\right)V_2 = 0$$

y

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10\angle 0^\circ & -0{,}5 \\ 0 & (0{,}5 - j0{,}3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0{,}62 - j0{,}16) & -0{,}5 \\ -0{,}5 & (0{,}5 - j0{,}3) \end{vmatrix}} = \frac{5{,}83\angle -31^\circ}{0{,}267\angle -87{,}42^\circ} = 21{,}8\angle 56{,}42^\circ$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}62 - j0{,}16) & 10\angle 0^\circ \\ -0{,}5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{5\angle 0^\circ}{0{,}267\angle -87{,}42^\circ} = 18{,}7\angle 87{,}42^\circ$$

$V_2$ es la tensión de $A$ respecto de la referencia. Como $I_B = V_1/(3 + j4)$, la tensión $V_B$ respecto de la referencia es

$$V_B = \frac{V_1}{(3+j4)}(j4) = \frac{21{,}8\angle 56{,}42^\circ}{(3+j4)}(j4) = 17{,}45\angle 93{,}32^\circ$$

Con lo que la tensión $V_{AB}$ pedida es

$$V_{AB} = V_A - V_B = (18{,}7\angle 87{,}42^\circ) - (17{,}45\angle 93{,}32^\circ) = 2{,}23\angle 34{,}1^\circ$$

**10-8** Hallar en el circuito de la Fig. 10-14 las intensidades de corriente $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$.

Tomando el nudo *1* y el punto de referencia, en la forma señalada en la figura, la ecuación nodal es

$$\frac{\mathbf{V}_1 + 100\angle 120^\circ}{20} + \frac{\mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_1 - 100\angle 0^\circ}{10} = 0$$

de la que $\mathbf{V}_1 = \dfrac{200\angle 0^\circ - 100\angle 120^\circ}{5} = 50 - j17{,}32 = 53\angle -19{,}1^\circ$

Se calculan ahora las corrientes en cada rama.

$$\mathbf{I}_A = (\mathbf{V}_1 + 100\angle 120^\circ)/20 = (50 - j17{,}32 - 50 + j86{,}6)/20 = 3{,}46\angle 90^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_1/10 = 5{,}3\angle -19{,}1^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = (\mathbf{V}_1 - 100\angle 0^\circ)/10 = (50 - j17{,}32 - 100)/10 = 5{,}3\angle -160{,}9^\circ$$

Obsérvese que la suma de las tres corrientes que entran en el nudo de referencia es igual a cero.

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = 3{,}46\angle 90^\circ + 5{,}3\angle -19{,}1^\circ + 5{,}3\angle -160{,}9^\circ$$
$$= j3{,}46 + 5{,}0 - j1{,}732 - 5 - j1{,}732 = 0$$

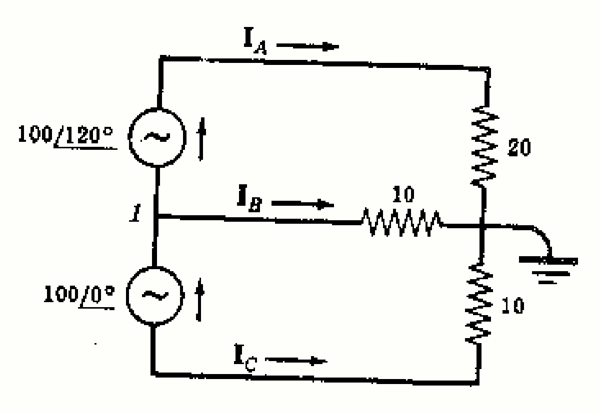


Fig. 10-14

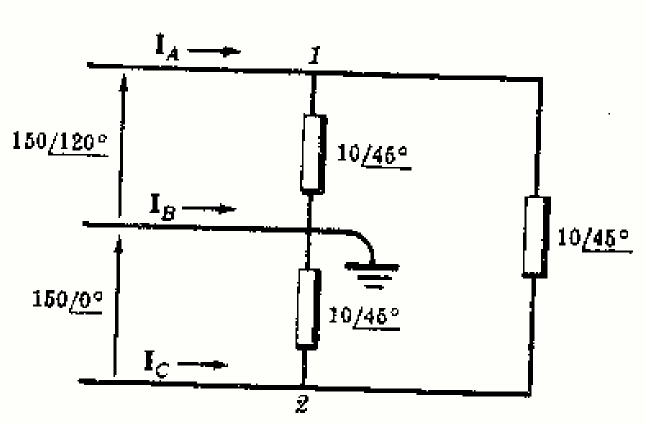


Fig. 10-15

**10-9** Hallar las corrientes en las líneas $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ para el circuito de la Figura 10-15.

Los nudos *1*, *2* y el de referencia están señalados en la figura. Las tensiones en los nudos $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ se leen directamente en el esquema, siendo igual a las tensiones constantes dadas. Así, pues,

$$\mathbf{V}_1 = 150\angle 120^\circ \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_2 = -150\angle 0^\circ = 150\angle 180^\circ$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a cada uno de los tres nudos, se podrán calcular las corrientes.

En el nudo *1*: $\mathbf{I}_A = \dfrac{\mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} + \dfrac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} = \dfrac{300\angle 120^\circ - 150\angle 180^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle 45^\circ$

En el nudo de referencia: $\mathbf{I}_B = \dfrac{-\mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} - \dfrac{\mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} = \dfrac{150\angle -60^\circ + 150\angle 0^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle -75^\circ$

En el nudo *2*: $\mathbf{I}_C = \dfrac{\mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} + \dfrac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} = \dfrac{300\angle 180^\circ - 150\angle 120^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle -195^\circ$

**10-10** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-16, la potencia suministrada por la fuente y la potencia disipada en cada una de las resistencias del circuito.

Tomando los nudos *1* y de referencia en la forma indicada en la figura, la ecuación nodal será

$$(\mathbf{V}_1 - 50\angle 0^\circ)/5 + \mathbf{V}_1/j10 + \mathbf{V}_1/(3 - j4) = 0$$

de donde

$$\mathbf{V}_1 = (10\angle 0^\circ)/(0{,}326\angle 10{,}6^\circ) = 30{,}7\angle -10{,}6^\circ$$

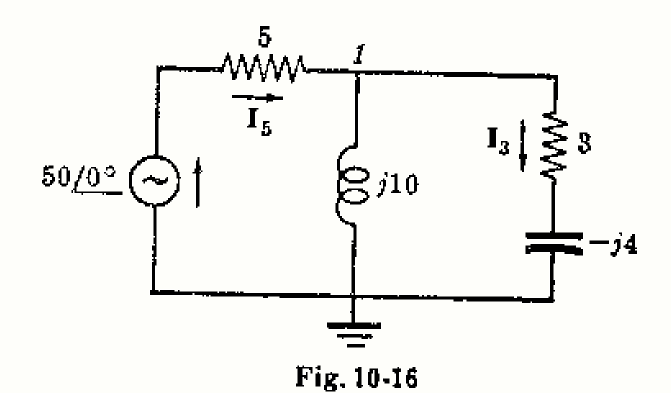


Fig. 10-16

Hallando ahora las corrientes en las ramas, supuestos los sentidos dados en la figura:

$$\mathbf{I}_5 = (50\angle 0^\circ - \mathbf{V}_1)/5 = (50\angle 0^\circ - 30{,}7\angle -10{,}6^\circ)/5 = 4{,}12\angle 15{,}9^\circ$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1/(3 - j4) = (30{,}7\angle -10{,}6^\circ)/(5\angle -53{,}1^\circ) = 6{,}14\angle 42{,}5^\circ$$

La potencia suministrada por la fuente es

$$P = VI_5 \cos\theta = (50)(4{,}12)\cos 15{,}9^\circ = 198 \text{ W}$$

De la relación $P = RI^2$, la potencia disipada en cada resistencia vale

$$P_5 = 5(I_5)^2 = 5(4{,}12)^2 = 85 \text{ W} \quad \text{y} \quad P_3 = 3(I_3)^2 = 3(6{,}14)^2 = 113 \text{ W}$$

Obsérvese que la potencia total suministrada por la fuente es igual a la suma de las potencias disipadas por las dos resistencias del circuito, esto es, $P_T = 85 + 113 = 198$ W.

**10-11** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-17, las tensiones en los nudos *1* y *2* con respecto a la referencia elegida.

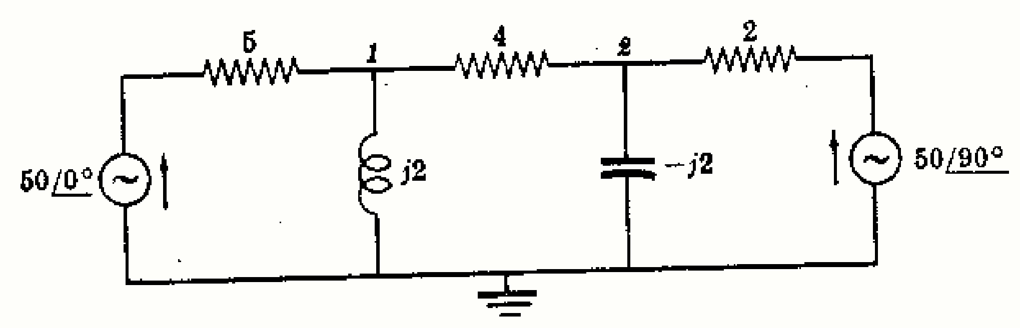



Fig. 10-17

Por simple inspección se puede escribir el sistema de las dos ecuaciones nodales en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{j2}+\frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{-j2}+\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{50\angle 0^\circ}{5}\right) \\ \left(\frac{50\angle 90^\circ}{2}\right) \end{bmatrix}$$

de donde
$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0{,}25 \\ j25 & (0{,}75 + j0{,}5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0{,}45 - j0{,}5) & -0{,}25 \\ -0{,}25 & (0{,}75 + j0{,}5) \end{vmatrix}} = \frac{13{,}5\angle 56{,}3^\circ}{0{,}546\angle -15{,}95^\circ} = 24{,}7\angle 72{,}25^\circ$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}45 - j0{,}5) & 10 \\ -0{,}25 & j25 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{18{,}35\angle 37{,}8^\circ}{0{,}546\angle -15{,}95^\circ} = 33{,}6\angle 53{,}75^\circ$$

**10-12** Dado el circuito de la Fig. 10-18 y conocida la caída de tensión $\mathbf{V}_0$ en la impedancia $2 - j2$, debida a la fuente $\mathbf{V}_i$, hallar la relación $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$.

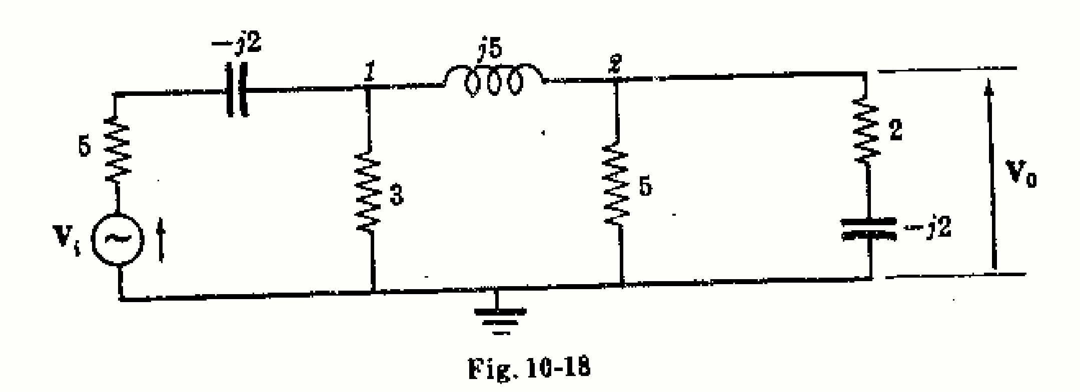



Fig. 10-18

Se han tomado los nudos *1* y *2* y el de referencia como se indica en la figura. Con esta elección, $\mathbf{V}_0$ es la tensión del nudo *2* con respecto al de referencia.

Se puede escribir directamente el sistema de ecuaciones de los nudos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5-j2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{j5}\right) & -\left(\frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{j5}\right) & \left(\frac{1}{j5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2-j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{V}_i}{5-j2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Despejando $\mathbf{V}_0$,

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}506 - j0{,}131) & \mathbf{V}_i/(5-j2) \\ j0{,}2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0{,}506 - j0{,}131) & j0{,}2 \\ j0{,}2 & (0{,}45 + j0{,}05) \end{vmatrix}} = \frac{(0{,}2\underline{/-90^\circ})\mathbf{V}_i/(5-j2)}{(0{,}276\underline{/-7^\circ})}$$

Por tanto,
$$\frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{V}_i} = \frac{0{,}2\underline{/-90^\circ}}{(5-j2)(0{,}276\underline{/-7^\circ})} = 0{,}1345\underline{/-61{,}2^\circ}$$

Este cociente se llama *función de transferencia de tensión* y permite el cálculo directo de la tensión de salida en la rama dada para una tensión de entrada determinada, esto es, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_i(0{,}1345\underline{/-61{,}2^\circ})$.

**10-13** Dados los nudos *1* y *2* en la Fig. 10-19, hallar la relación $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$.

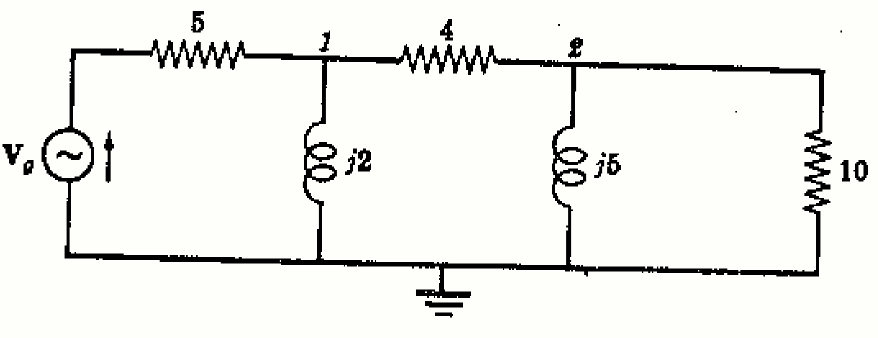



**Fig. 10-19**

Las ecuaciones de los nudos, dadas en forma matricial, son:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{j2}+\frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{j5}+\frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}_g/5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde
$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\mathbf{V}_g/5) & -0{,}25 \\ 0 & (0{,}35 - j0{,}2) \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}403\underline{/-29{,}8^\circ})}{\Delta_Y}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}45 - j0{,}5) & (\mathbf{V}_g/5) \\ -0{,}25 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}25)}{\Delta_Y}$$

y
$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}403\underline{/-29{,}8^\circ})/\Delta_Y}{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}25)/\Delta_Y} = \mathbf{1{,}61\underline{/-29{,}8^\circ}}$$

*Otra solución.* Expresar cada una de las tensiones en los nudos en función de los adjuntos. Puesto que hay una sola fuente de intensidad, $\mathbf{I}_1$, actuando sobre el circuito, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)$. Entonces,

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{\mathbf{I}_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)}{\mathbf{I}_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{0{,}35 - j0{,}2}{0{,}25} = 1{,}61\underline{/-29{,}8^\circ}$$

**10-14** Hallar las tensiones de los nudos *1* y *2* en el circuito de la Fig. 10-20 mediante las admitancias de entrada y transferencia.

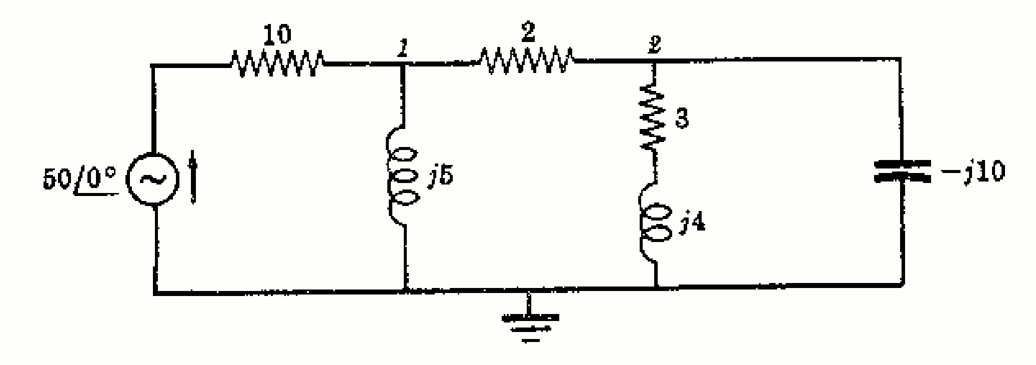



**Fig. 10-20**

La matriz de admitancias $[Y]$, para la elección de nudos dada, es

$$[Y] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{j5}+\frac{1}{2}\right) & -\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3+j4}+\frac{1}{-j10}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0{,}6-j0{,}2) & -0{,}5 \\ -0{,}5 & (0{,}62-j0{,}06) \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{Y}_{\text{entrada 1}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}6-j0{,}2) & -0{,}5 \\ -0{,}5 & (0{,}62-j0{,}06) \end{vmatrix}}{(0{,}62-j0{,}06)} = \frac{0{,}194\underline{/-55{,}5^\circ}}{0{,}62\underline{/-5{,}56^\circ}} = 0{,}313\underline{/-49{,}94^\circ}$$

y

$$\mathbf{Y}_{\text{transferencia 21}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0{,}194\underline{/-55{,}5^\circ}}{(-1)(-0{,}5)} = 0{,}388\underline{/-55{,}5^\circ}$$

En el nudo *1*:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{\text{entrada 1}}} + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Y}_{\text{transferencia 21}}}$$

Como en el nudo *2* no hay corriente, esto es, $\mathbf{I}_2 = 0$, tenemos

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{\text{entrada 1}}} = \frac{(50\underline{/0^\circ})/10}{0{,}313\underline{/-49{,}94^\circ}} = 15{,}95\underline{/49{,}94^\circ}$$

De igual forma,

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{\text{transferencia 12}}} + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Y}_{\text{entrada 2}}} = \frac{(50\underline{/0^\circ})/10}{0{,}388\underline{/-55{,}5^\circ}} = 12{,}9\underline{/55{,}5^\circ}$$

# Problemas propuestos

**10-15** Determinar el número de ecuaciones de tensiones en los nudos que son necesarias para resolver cada uno de los circuitos de la Figura 10-21(*a-f*).

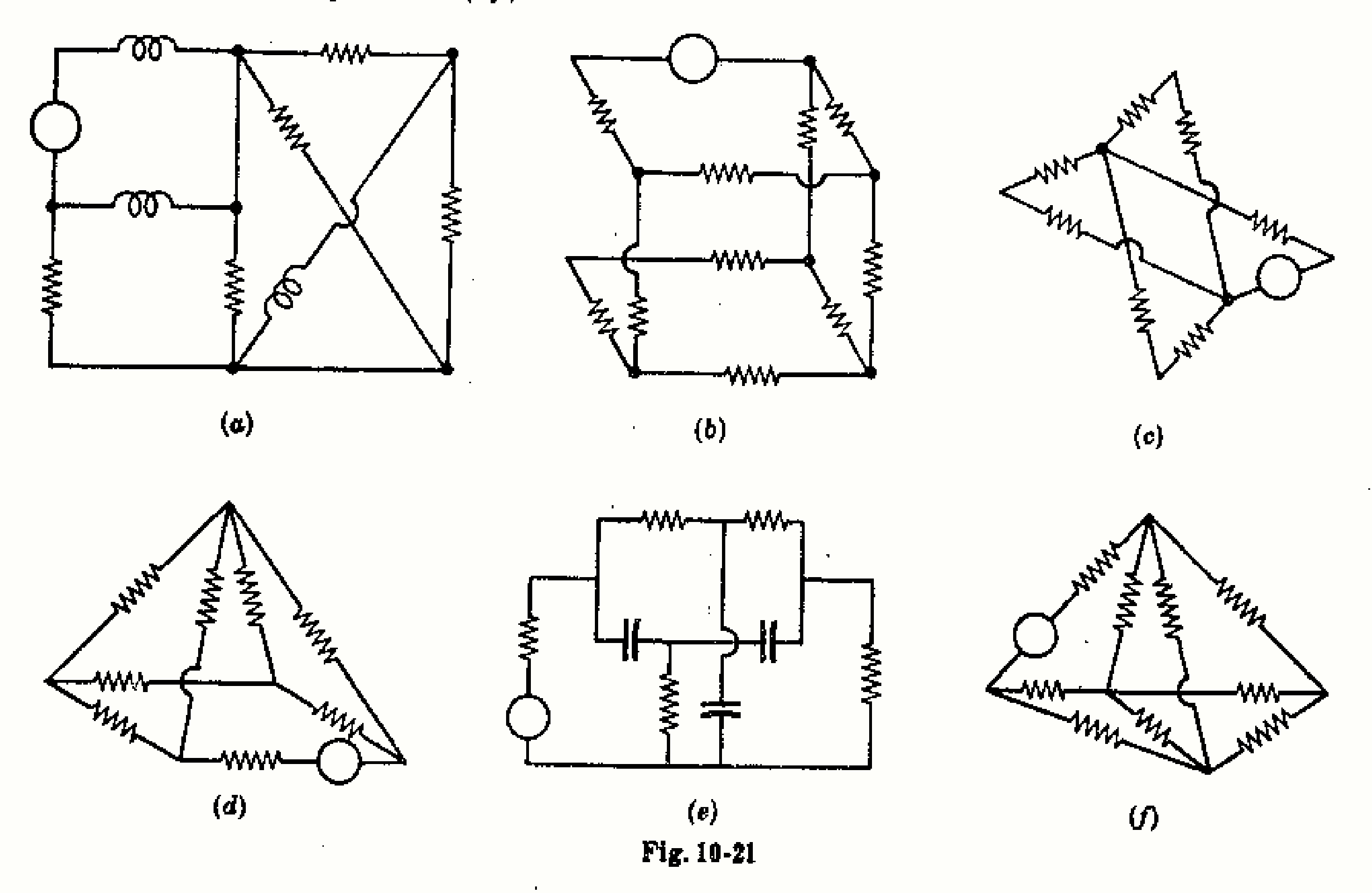



**Fig. 10-21**

*Sol.* (*a*) 3, (*b*) 5, (*c*) 1, (*d*) 4, (*e*) 4, (*f*) 4.

**10-16** Escribir la ecuación nodal para el nudo dado en la Figura 10-22.

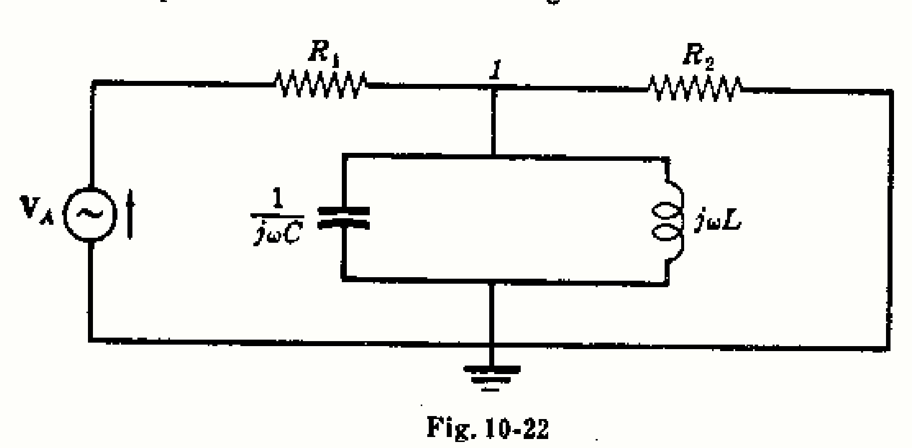



**Fig. 10-22**

**10-17** Dado el circuito de la Fig. 10-23 escribir las ecuaciones de los nudos y expresar el sistema en forma matricial. Escribir después, por simple inspección de la figura, la matriz $[Y]$ y compararla con la obtenida de las ecuaciones.

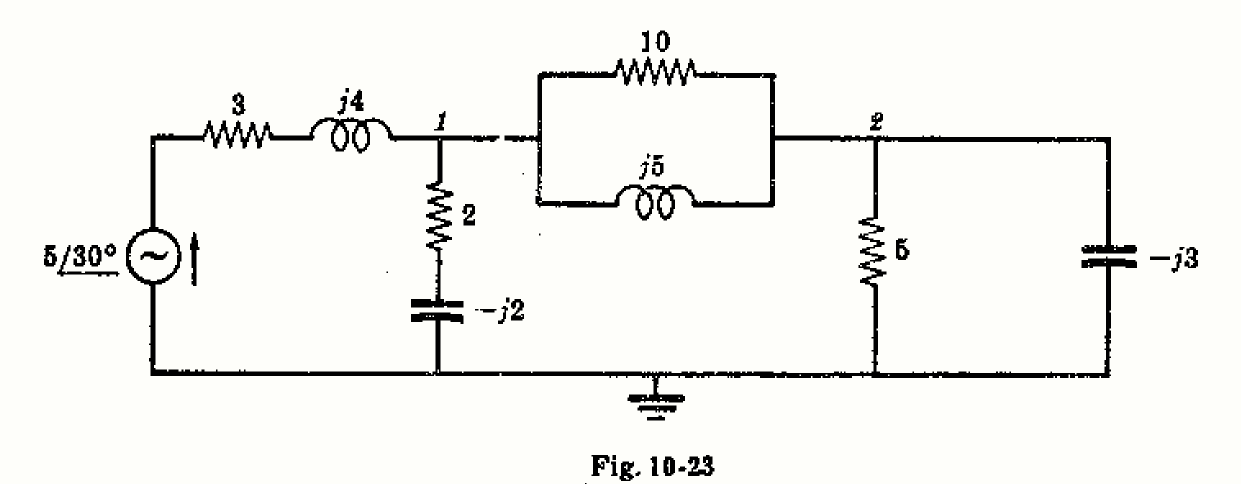



**Fig. 10-23**

**10-18** En el circuito de la Fig. 10-24 y con los nodos representados escribir el sistema de ecuaciones correspondientes y ponerlo en forma matricial. Después escribir la matriz de impedancias $[Y]$ por simple inspección y compararla con la que se obtiene a partir del sistema.

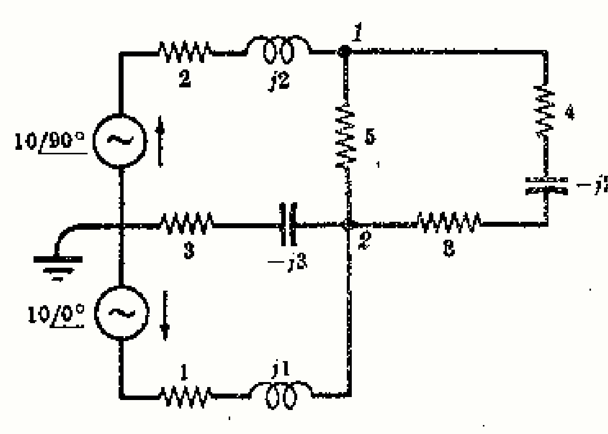



Fig. 10-24

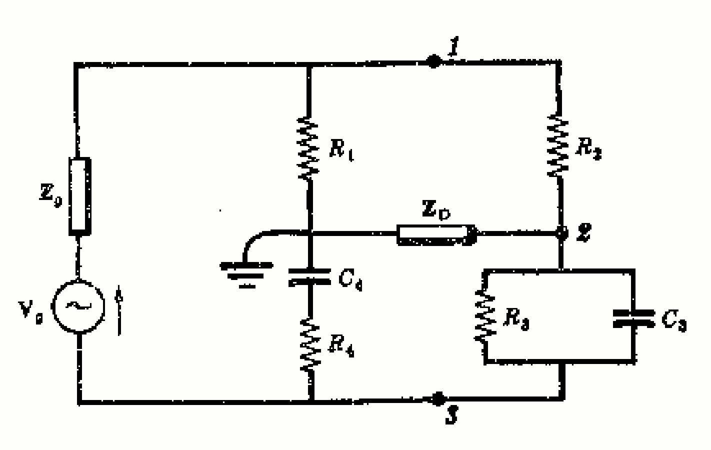



Fig. 10-25

**10-19** El circuito representado en la Fig. 10-25 anterior es un puente de Wien. Escribir las tres ecuaciones de los nudos y expresar el sistema en forma matricial. Escribir después $[Y]$ directamente y compararla con la obtenida de las ecuaciones.

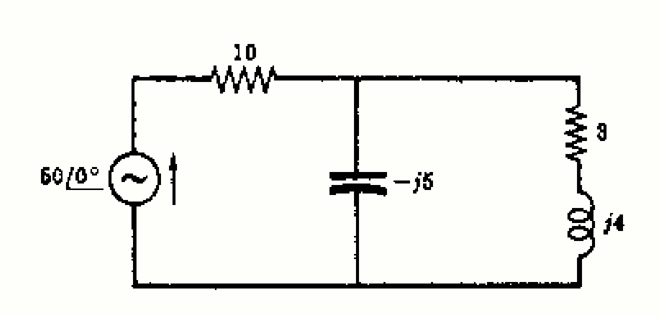



Fig. 10-26

**10-20** Utilizando el método de los nudos, determinar en el circuito de la Fig. 10-26 la potencia suministrada por la fuente de 50 voltios y la potencia disipada en las dos resistencias. *Sol.* 140, 80, 60 W.

**10-21** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-27, la tensión $V_{AB}$ por el método de los nudos. *Sol.* $75{,}4\underline{/55{,}2°}$ V.

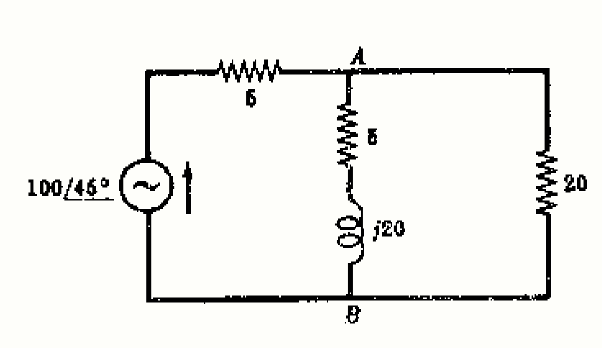



Fig. 10-27

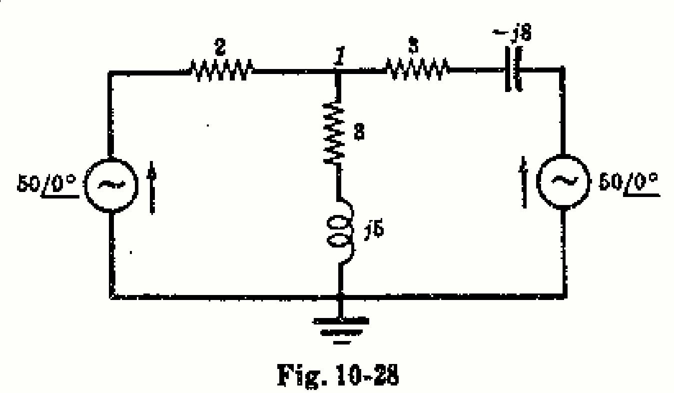



Fig. 10-28

**10-22** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-28, la tensión $V_1$. *Sol.* $43{,}9\underline{/14{,}9°}$ V.

**10-23** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-29, la tensión en el nudo *1* y la corriente $I_1$. Suponer que la dirección de $I_1$ es la que figura en el esquema. *Sol.* $17{,}7\underline{/-45°}$ V; $1{,}77\underline{/135°}$ A.

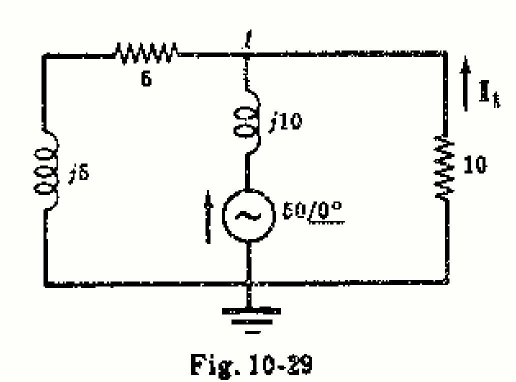



Fig. 10-29

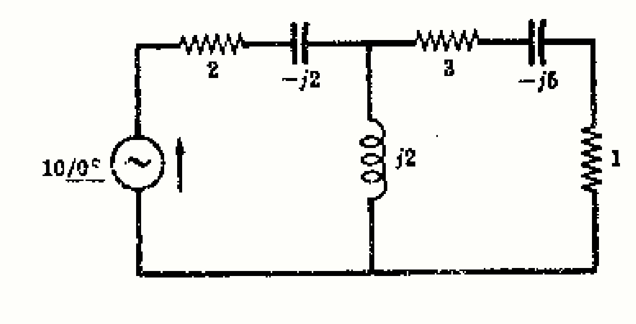



Fig. 10-30

**10-24** Utilizando el método de los nudos hallar, en el circuito de la Fig. 10-30, la potencia suministrada por la fuente de 10 voltios y la potencia disipada en cada una de las resistencias. *Sol.* 36,7; 27,8; 6,66, y 2,22 W.

**10-25** Hallar la potencia suministrada al circuito de la Fig. 10-31 por la fuente $V_1 = 50\angle 0^\circ$ voltios. Hallar también la potencia disipada en cada una de las resistencias del circuito.
*Sol.* $P = 354$ W; $P_1 = 256$ W; $P_2 = 77{,}1$ W; $P_3 = 9{,}12$ W; $P_4 = 11{,}3$ W.

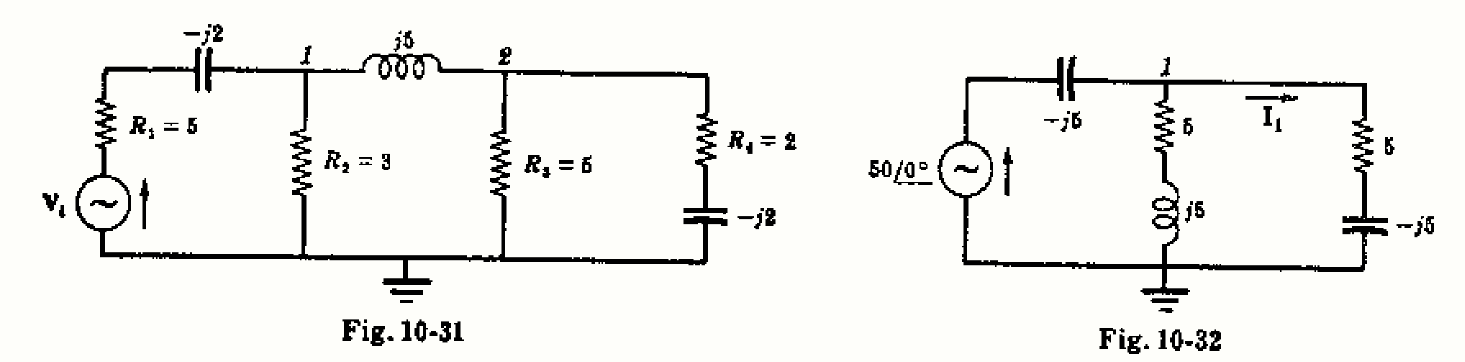



Fig. 10-31 Fig. 10-32

**10-26** Hallar, por el método de los nudos, el valor de $I_1$ en el circuito de la Figura 10-32. *Sol.* $5\angle 90^\circ$ A.

**10-27** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-33, la tensión eficaz de la fuente V para obtener en la resistencia de 3 ohmios una potencia de 75 vatios. *Sol.* 24,2 V.

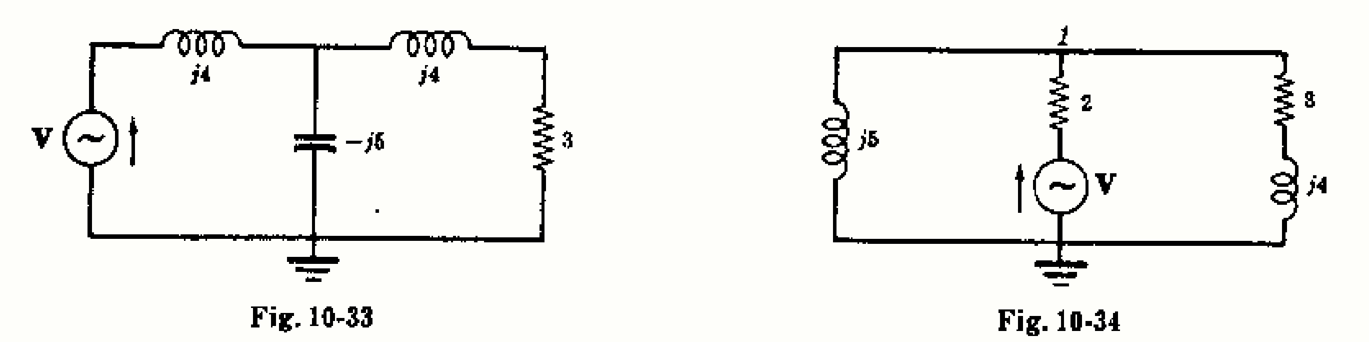



Fig. 10-33 Fig. 10-34

**10-28** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-34, cuál debe ser la tensión de la fuente V para que la tensión en el nudo *1* sea $50\angle 0^\circ$ voltios. *Sol.* $71{,}6\angle -30{,}2^\circ$ V.

**10-29** Hallar la tensión en el nudo *1* en el circuito de la Figura 10-35. *Sol.* $179\angle 204{,}8^\circ$ V.

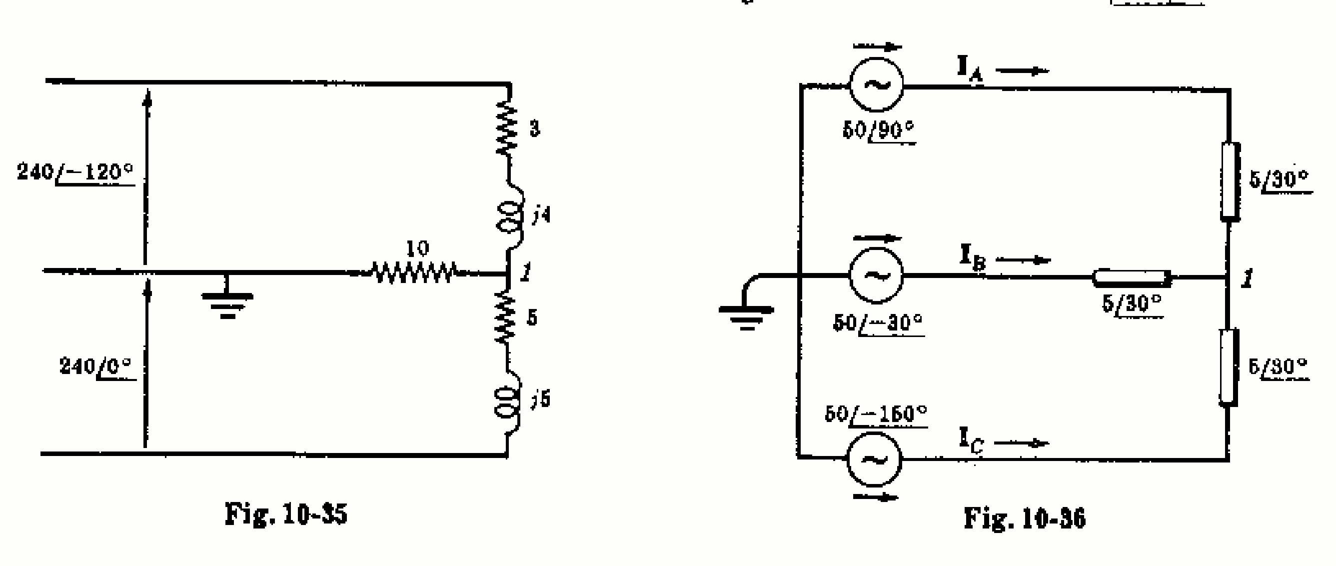



Fig. 10-35 Fig. 10-36

**10-30** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-36, las intensidades de corriente en las tres líneas, $I_A$, $I_B$ e $I_C$.
*Sol.* $10\angle 60^\circ$, $10\angle -60^\circ$, $10\angle 180^\circ$ A.

**10-31** ¿Cuál debe ser la tensión de la fuente $V_2$ en el circuito de la Fig. 10-37 para que la corriente en la impedancia $2 + j4$ sea nula? *Sol.* $125\angle -135^\circ$ V.

**10-32** En el mismo circuito del problema anterior, ¿cuál será el valor de la corriente en la impedancia $2 + j4$ si $V_2 = 100\angle 30^\circ$ voltios? *Sol.* $12{,}1\angle -11^\circ$ A.

**10-33** En el problema anterior, ¿cuáles son las potencias suministradas por las dos fuentes al circuito?
*Sol.* $P_1 = -90{,}6$; $P_2 = 1000$ W.

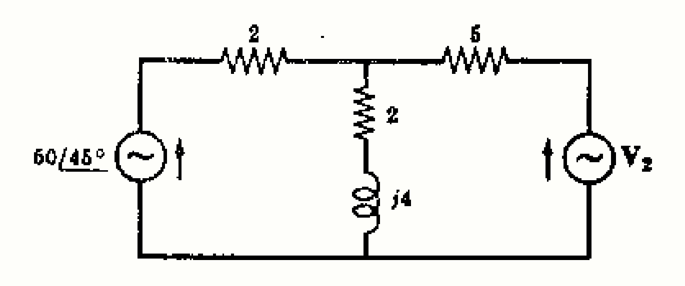



Fig. 10-37

**10-34** El circuito de la Fig. 10-38 tiene una corriente de entrada de intensidad $\mathbf{I}_1$. La corriente en la resistencia de 10 ohmios es $\mathbf{I}_2$. Determinar la relación $\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$. *Sol.* $0{,}151\angle 25{,}8°$.

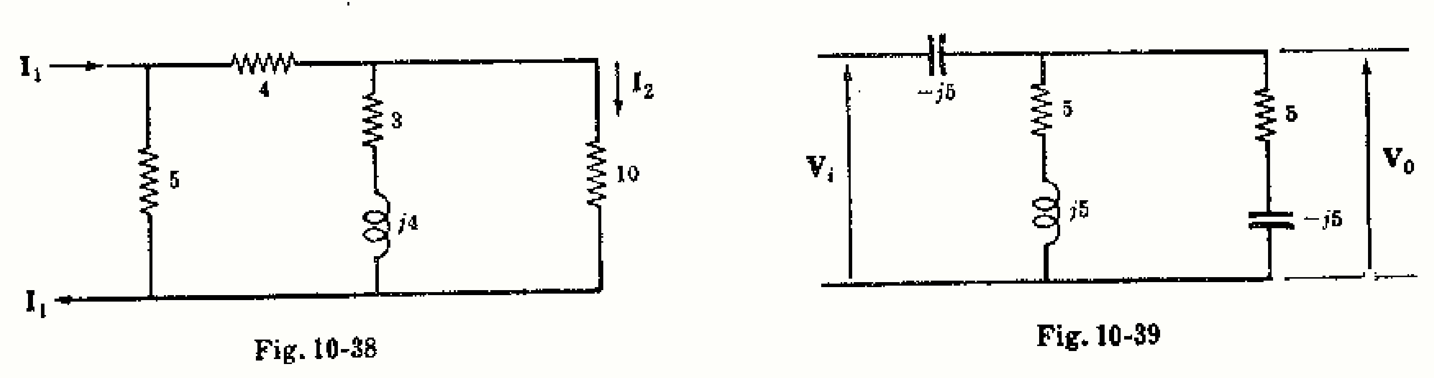



Fig. 10-38

Fig. 10-39

**10-35** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-39, la función de transferencia de tensión $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$ por el método de los nudos. *Sol.* $0{,}707\angle 45°$.

**10-36** Determinar la función de transferencia de tensión $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$ para el circuito de la Figura 10-40. *Sol.* $0{,}159\angle -61{,}4°$.

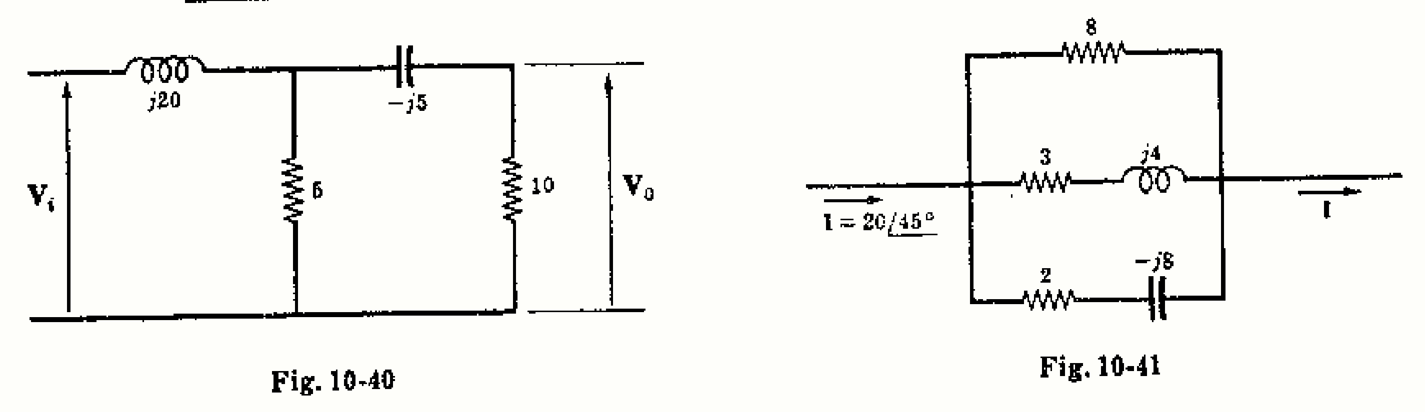



Fig. 10-40

Fig. 10-41

**10-37** Utilizando el método de los nudos, obtener la tensión a través del circuito paralelo de la Figura 10-41. *Sol.* $72{,}2\angle 53{,}8°$ V.

**10-38** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-42, las tensiones $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BC}$ y $\mathbf{V}_{CD}$ por el método de los nudos. *Sol.* $35{,}4\angle 45°$ V; $50\angle 0°$ V; $13{,}3\angle -90°$ V.

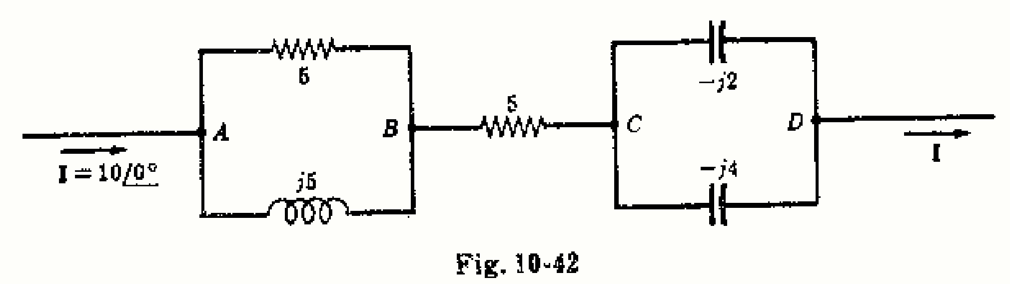



Fig. 10-42

**10-39** En el circuito de la Fig. 10-43 hallar la tensión en bornes de las impedancias en paralelo por el método de los nudos. *Sol.* $35\angle -24{,}8°$ V.

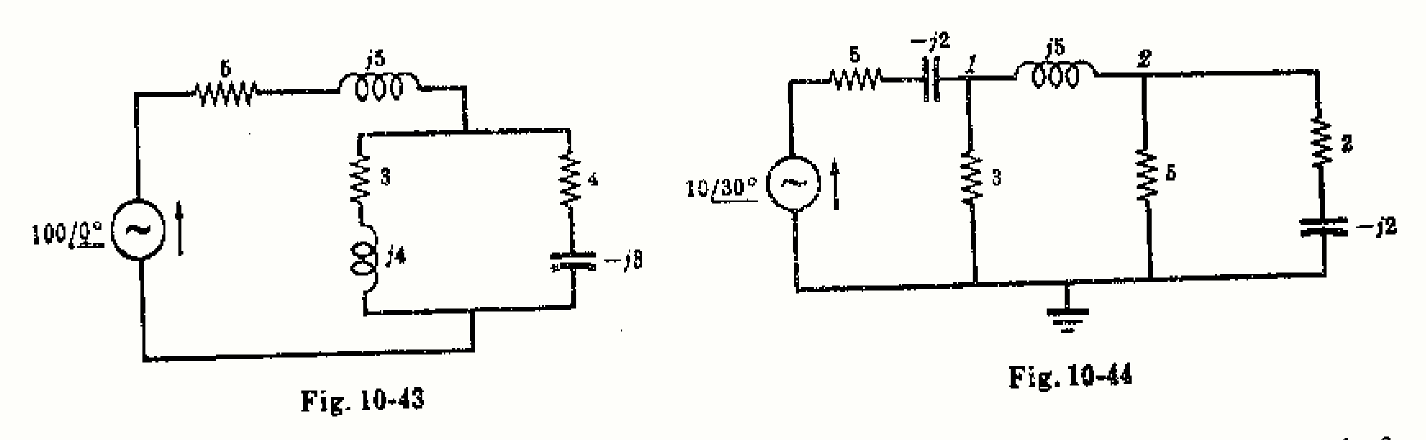



Fig. 10-43

Fig. 10-44

**10-40** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-44, las tensiones en los nudos $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ y la corriente en la fuente de $10\angle 30°$ voltios. *Sol.* $3{,}02\angle 65{,}2°$ V, $1{,}34\angle -31{,}3°$ V, $1{,}44\angle 38{,}8°$ V.

**10-41** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-45, la potencia disipada en la resistencia de 6 ohmios por el método de los nudos. *Sol.* 39,6 W.

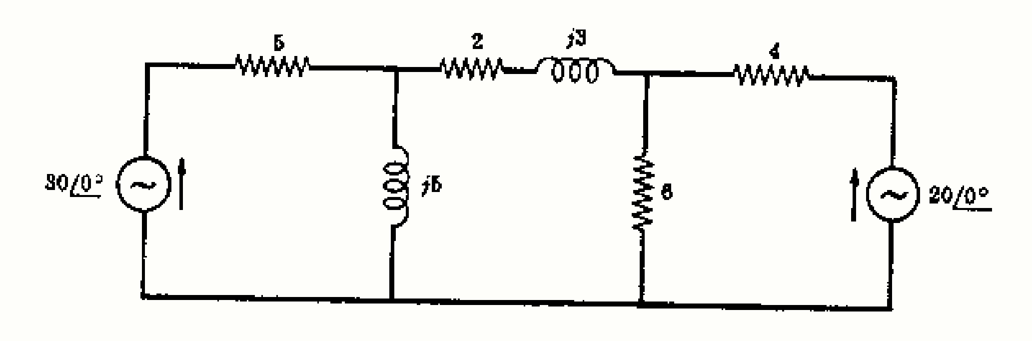



**Fig. 10-45**

**10-42** En el mismo circuito del problema anterior (Fig. 10-45) hallar la intensidad de corriente en la impedancia $2 + j3$ ohmios, con sentido positivo hacia la derecha. *Sol.* $1,73\underline{/40°}$ A.

**10-43** Calcular, en el circuito de la Fig. 10-46, la tensión $V_1$ que cumpla la condición de que la corriente en la resistencia de 4 ohmios sea cero. Elegir un borne de la resistencia como nudo de referencia.
*Sol.* $95,4\underline{/-23,2°}$ V.

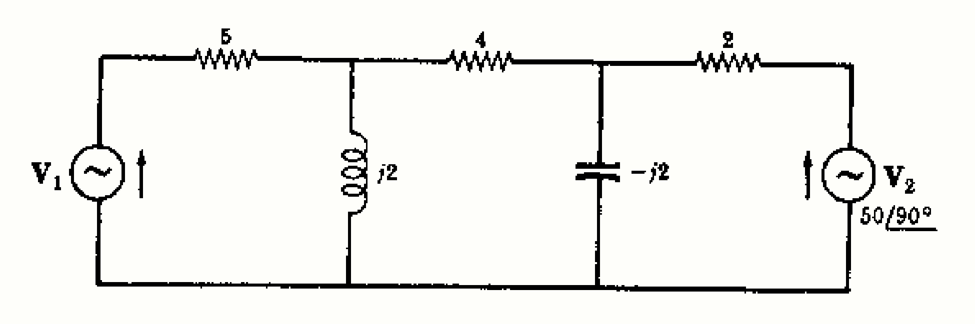



**Fig. 10-46**

**10-44** En el circuito del problema anterior se supone que $V_1 = 50\underline{/0°}$ voltios y $V_2$ es desconocido. Determinar $V_2$ de forma que la corriente por la resistencia de 4 ohmios sea nula. *Sol.* $26,2\underline{/113,2°}$ V.

**10-45** Hallar, en el circuito de la Fig. 10-47, el valor de la intensidad $I_3$ con el sentido dado en el esquema.
*Sol.* $11,7\underline{/112,9°}$ A.

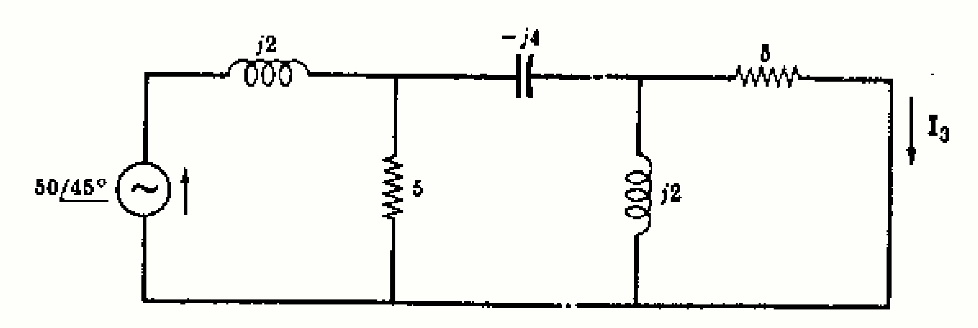



**Fig. 10-47**

**10-46** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-48, la relación de las dos tensiones de nudo $V_1/V_2$. *Sol.* $2,26\underline{/96,35°}$.

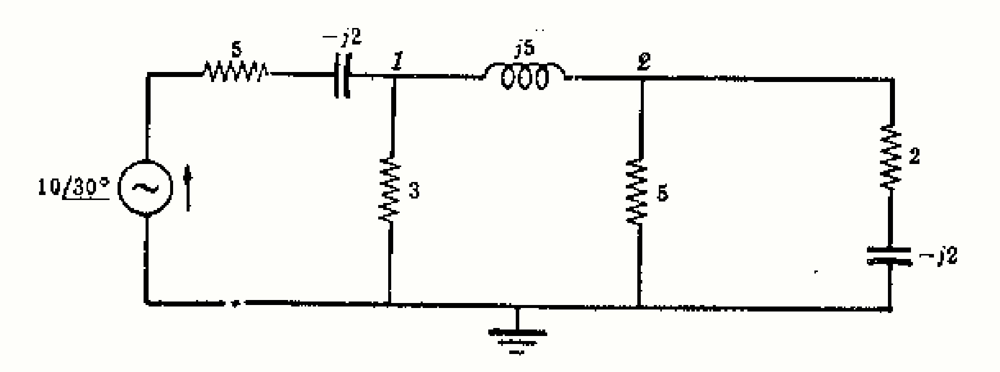



**Fig. 10-48**

**10-47** Calcular el valor de $V_0$ en el circuito de la Fig. 10-49 por el método de los nudos. *Sol.* 1,56/128,7° V.

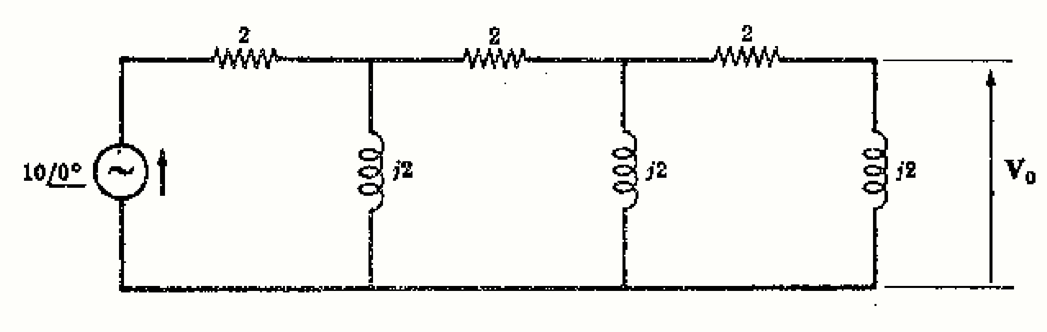



Fig. 10-49

**10-48** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-50, las tensiones de los nudos $V_1$ y $V_2$. *Sol.* 18,6/68,2° V.

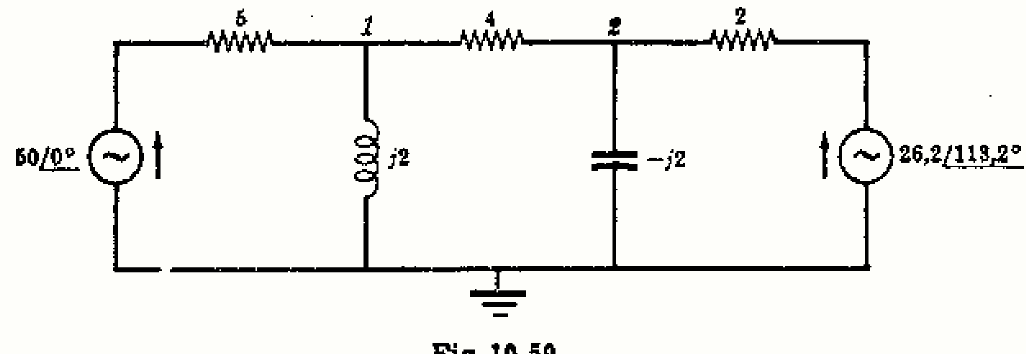



Fig. 10-50

**19-49** Hallar, en el circuito de la Fig. 10-51, el valor de $V_2$ tal que reduzca su corriente a cero. *Sol.* 4/180° V.

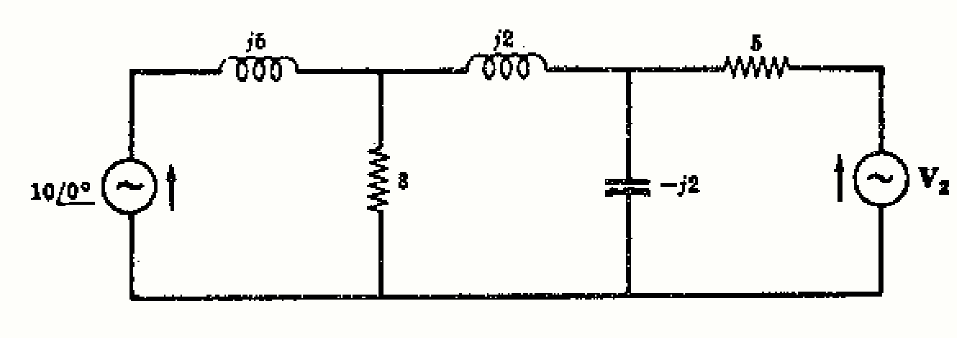



Fig. 10-51

**10-50** Determinar, en el circuito de la Fig. 10-52, el valor de la corriente de excitación I que da lugar a una tensión $V_{AB}$ de 5/30° voltios. *Sol.* 9,72/−16° A.

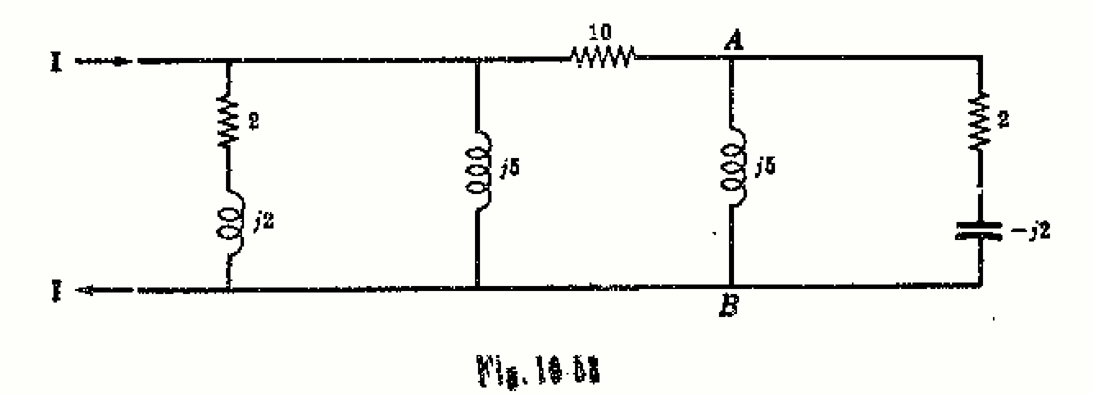



Fig. 10-52

# Capítulo 11

# Teoremas de Thevenin y Norton

## INTRODUCCION

Un circuito en el cual todas las impedancias permanecen fijas, se puede resolver tanto por el método de las corrientes de malla como por el de las tensiones en los nudos. Consideremos ahora el circuito de la Fig. 11-1, en el que las impedancias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ han de conectarse sucesivamente al circuito. Al unir cada una de ellas se obtendrá, según el método seguido, una matriz diferente de **Z** o **Y** y, en consecuencia, habrá tres soluciones diferentes. La mayor parte del trabajo engorroso que esto lleva consigo se evita si se puede remplazar el circuito activo por un circuito simple equivalente. Este es el objeto de los teoremas de Norton y Thevenin.

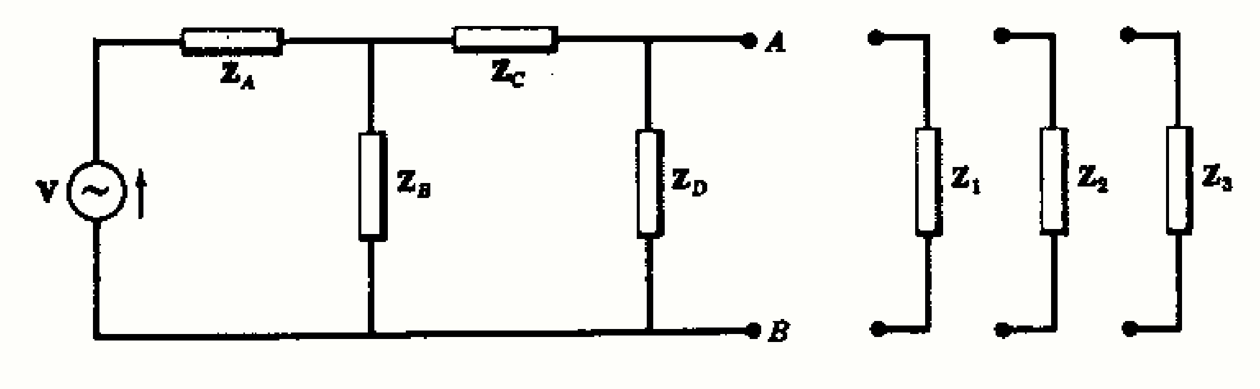



Fig. 11-1

## TEOREMA DE THEVENIN

El teorema de Thevenin establece que cualquier circuito lineal activo con terminales de salida *A* y *B*, tal como el representado en la Fig. 11-2(*a*), puede sustituirse (o equivale) por una fuente de tensión **V**′ en serie con una impedancia **Z**′ [Figura 11-2(*b*)].

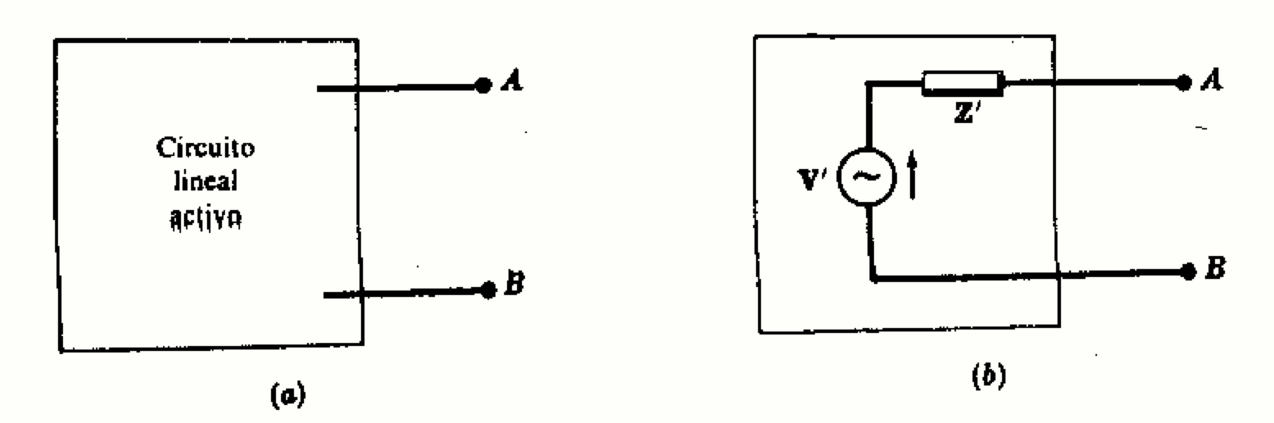



Fig. 11-2. Circuito equivalente de Thevenin

La *tensión equivalente de Thevenin*, **V**′, es la tensión entre los terminales *AB* medida a circuito abierto, y la *impedancia equivalente*, **Z**′, es la impedancia de entrada en los terminales *AB* con todas las fuentes internas iguales a cero.

La polaridad de la tensión equivalente de Thevenin, V', se elige de forma que la corriente en una impedancia que se conecte tenga el mismo sentido que si dicha impedancia se conectara al circuito activo original.

**Ejemplo 1.**

Dado el circuito de la Fig. 11-3 determinar el circuito equivalente de Thevenin con respecto a los terminales $AB$. Utilizar el resultado para hallar la corriente en las dos impedancias, $\mathbf{Z}_1 = 5 - j5$ y $\mathbf{Z}_2 = 10\angle 0°$, conectadas sucesivamente a los terminales $AB$ y determinar la potencia a ellas suministrada.

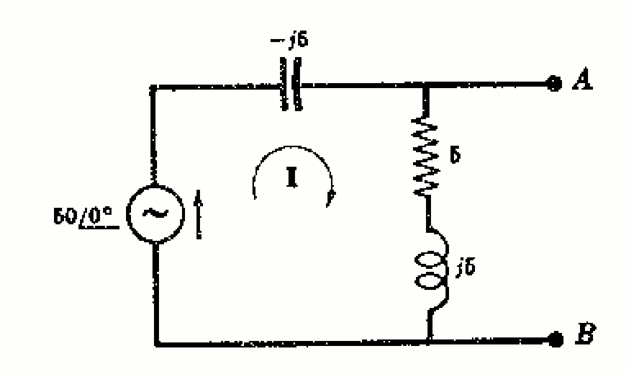


Fig. 11-3

En la Fig. 11-3 la corriente

$$\mathbf{I} = 50\angle 0° /(5 + j5 - j5) = 10\angle 0°$$

La tensión V' equivalente de Thevenin es entonces la caída de tensión en la impedancia $5 + j5$. Por tanto,

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}(5 + j5) = 70{,}7\angle 45°$$

La impedancia de entrada en los terminales $AB$ es $\quad \mathbf{Z}' = \dfrac{(5 + j5)(-j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5.$

El circuito equivalente de Thevenin es el representado en la Fig. 11-4($a$) con la fuente V' dirigida al terminal $A$.

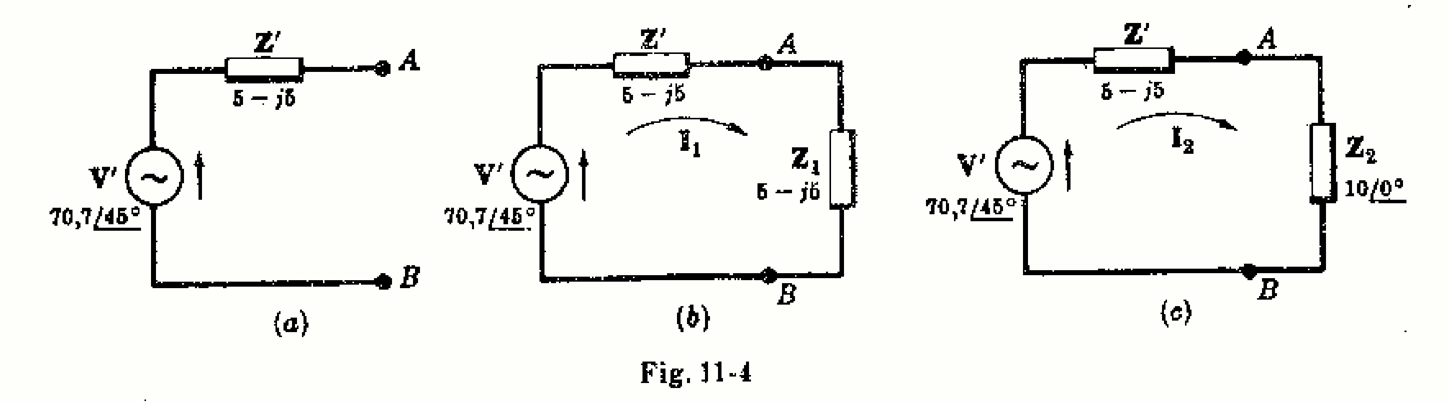


Fig. 11-4

Si se une la impedancia $\mathbf{Z}_1$ a los terminales del circuito equivalente de Thevenin, se tiene la Fig. 11-4($b$). En este circuito,

$$\mathbf{I}_1 = (70{,}7\angle 45°)/(5 - j5 + 5 - j5) = 5\angle 90° \qquad \text{y} \qquad P_1 = 5(I_1)^2 = 125 \text{ W}$$

Con la impedancia $\mathbf{Z}_2$ en lugar de la $\mathbf{Z}_1$, Fig. 11-4($c$), se tiene

$$\mathbf{I}_2 = (70{,}7\angle 45°)/(5 - j5 + 10) = 4{,}47\angle 63{,}43° \qquad \text{y} \qquad P_2 = 10(I_2)^2 = 200 \text{ W}$$

## TEOREMA DE NORTON

El teorema de Norton establece que cualquier circuito lineal activo con terminales de salida $AB$, tal como el representado en la Fig. 11-5($a$), puede sustituirse (o equivale) por una fuente de intensidad I' en paralelo con una impedancia Z', Figura 11-5($b$).

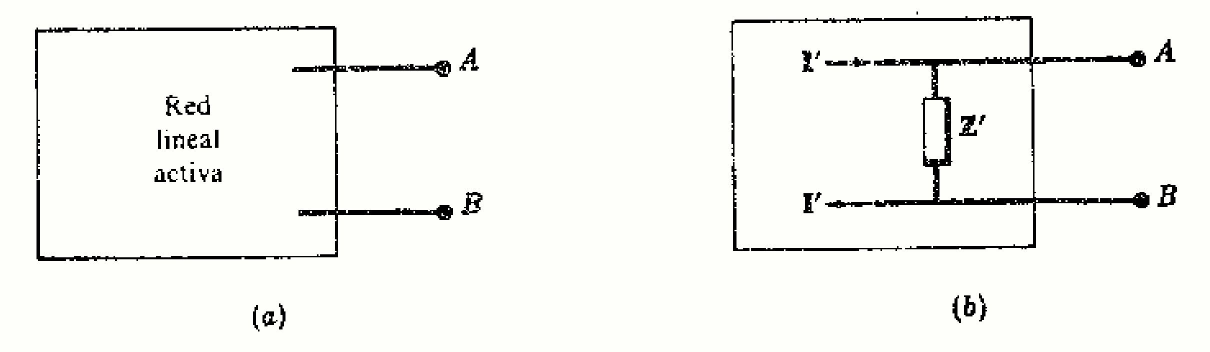


Fig. 11-5. Circuito equivalente de Norton

La *fuente de intensidad*, I′, *equivalente de Norton* es la corriente en un cortocircuito aplicado a los terminales del circuito activo. La impedancia Z′ en paralelo es la impedancia de entrada del circuito en los terminales *AB* cuando se hacen iguales a cero todas las fuentes internas. Por consiguiente, dado un circuito lineal activo, las impedancias Z′ de los circuitos equivalentes de Thevenin y Norton son idénticas.

La intensidad de la corriente en una impedancia conectada a los terminales del circuito equivalente de Norton ha de tener el mismo sentido que la que circularía por la misma impedancia conectada al circuito activo original.

**Ejemplo 2.**

Dado el circuito de la Fig. 11-6, determinar el circuito equivalente de Norton respecto de los terminales *AB*. Utilizar el resultado para hallar la corriente en dos impedancias $\mathbf{Z}_1 = 5 - j5$ y $\mathbf{Z}_2 = 10\underline{/0^\circ}$, unidas sucesivamente a los terminales *AB* y determinar las potencias a ellas suministradas.

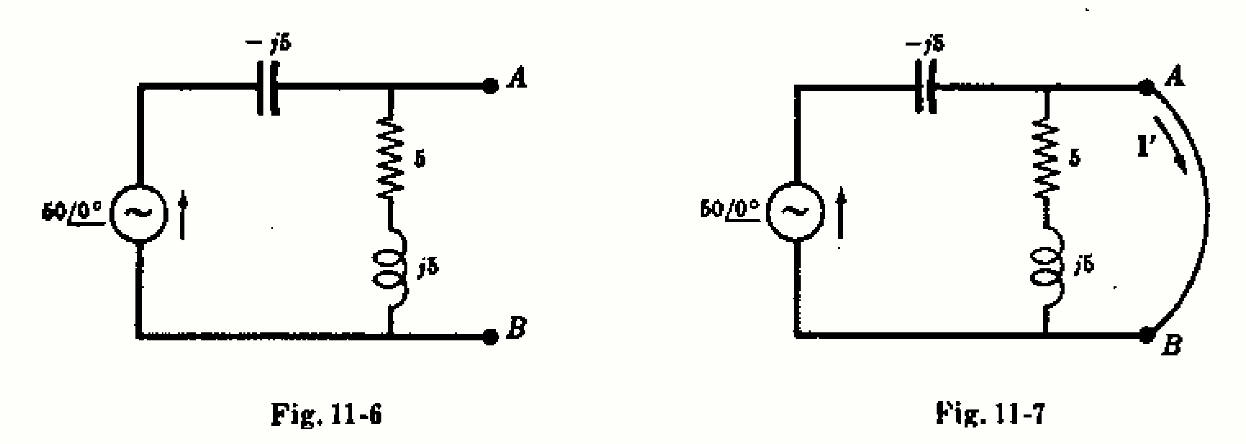



Fig. 11-6 Fig. 11-7

En la Fig. 11-7, cuando se cortocircuita *AB*, $\mathbf{I}' = 50\underline{/0^\circ}/(-j5) = 10\underline{/90^\circ}$. Al hacer la fuente igual a cero,

$$\mathbf{Z}' = \frac{-j5(5 + j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5.$$

El circuito equivalente de Norton es el de la Fig. 11-8(*a*). Obsérvese que la corriente va hacia el terminal *A*.

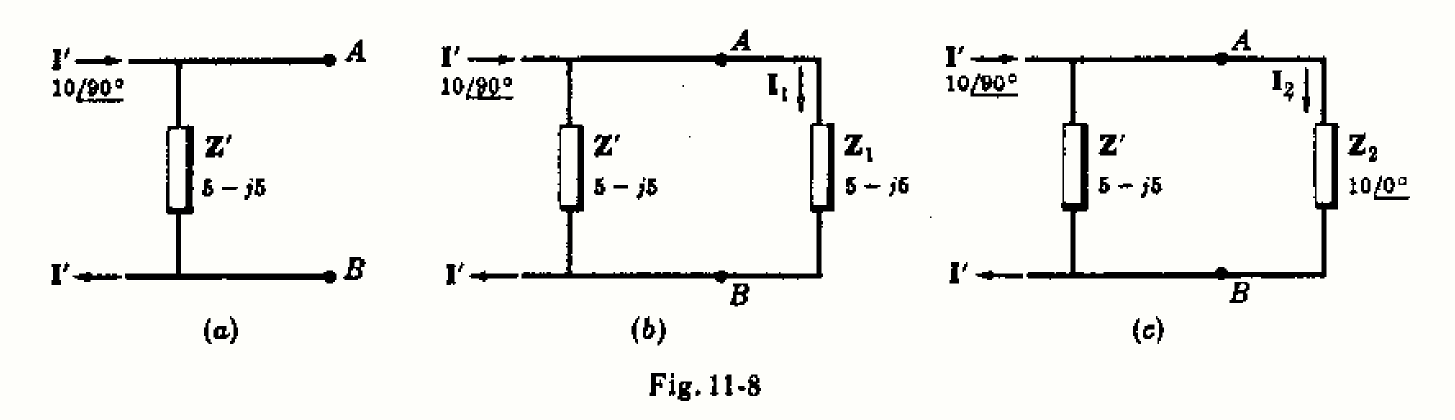



Fig. 11-8

Si se conecta la impedancia $\mathbf{Z}_1$ a los terminales del circuito equivalente de Norton, se tiene la Fig. 11-8(*b*). La corriente que pasa por $Z_1$ es $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}'\left(\dfrac{\mathbf{Z}'}{\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}_1}\right) = 10\underline{/90^\circ}\left(\dfrac{5 - j5}{10 - j10}\right) = 5\underline{/90^\circ}$. La potencia suministrada a $\mathbf{Z}_1$ vale $P_1 = 5(I_1)^2 = 125$ W.

Con la impedancia $\mathbf{Z}_2$ unida a los terminales *AB* se tiene [Fig. 11-8(*c*)]

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}'(5 - j5)/(15 - j5) = 4{,}47\underline{/63{,}43^\circ} \quad \text{y} \quad P_2 = 10(I_2)^2 = 200 \text{ W}$$

## CIRCUITOS EQUIVALENTES DE THEVENIN Y NORTON

En los Ejemplos 1 y 2 se han aplicado los teoremas de Thevenin y Norton a dos circuitos idénticos, obteniéndose resultados iguales. Se deduce, en consecuencia, que los circuitos de Thevenin y Norton son equivalentes entre sí.

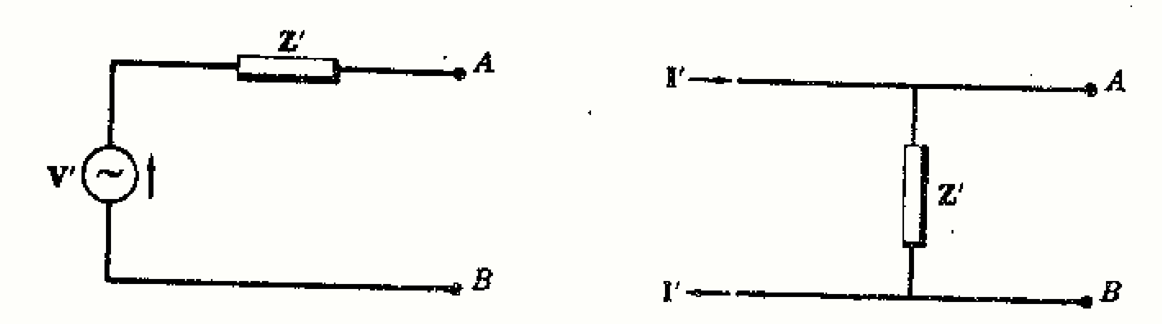



Fig. 11-9. Circuitos de Thevenin y Norton

En la Fig. 11-9 se tiene la misma impedancia Z' a la izquierda de los terminales *AB* de ambos circuitos. Si se ponen en corto cada uno de los circuitos, la corriente en el de Thevenin viene dada por V'/Z' y en el de Norton por I'. Como las dos intensidades son iguales, tendremos la siguiente relación entre la corriente equivalente de Norton y la tensión equivalente de Thevenin: I' = V'/Z'.

Se puede obtener la misma relación si se consideran las tensiones a circuito abierto en cada uno de los circuitos. En el de Thevenin vale V' y en el de Norton, Z'I'. Igualando las dos tensiones, V' = Z'I' o bien I' = V'/Z' como antes.

Los circuitos de Thevenin y Norton son *equivalentes para una sola frecuencia*. Las impedancias complejas del circuito activo se han reducido a la impedancia equivalente Z'. La tensión y la corriente equivalentes se han obtenido en las impedancias complejas del circuito activo. Ahora bien, puesto que toda impedancia depende de la frecuencia, se deduce que *los circuitos de Thevenin y Norton son equivalentes solamente para la frecuencia que han sido calculados*.

# Problemas resueltos

**11-1** Obtener el circuito equivalente de Thevenin del circuito activo de la Figura 11-10.

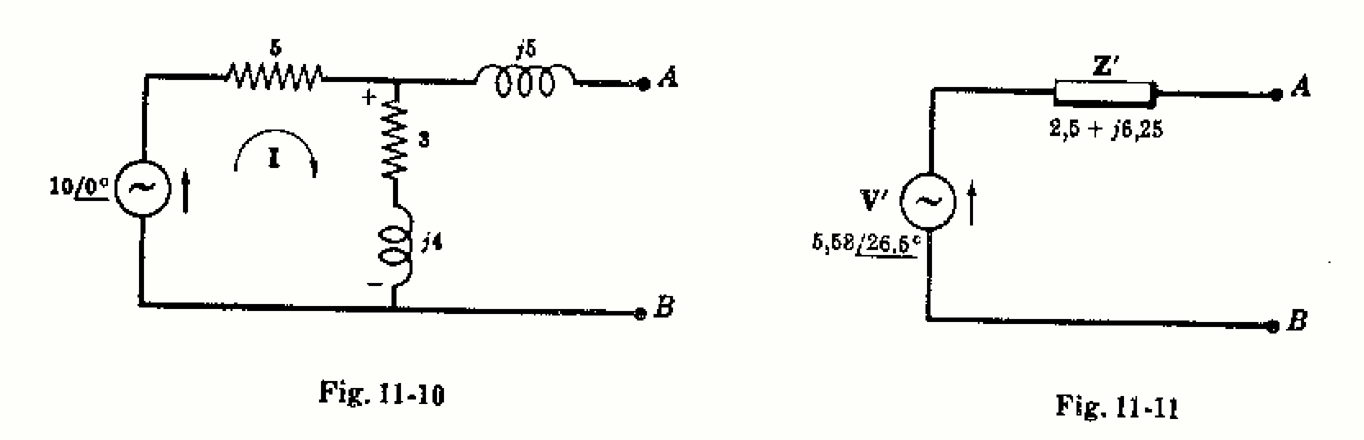



Fig. 11-10

Fig. 11-11

La impedancia equivalente del circuito se obtiene haciendo la fuente igual a cero. Así

$$\mathbf{Z}' = j5 + \frac{5(3+j4)}{5+3+j4} = 2{,}5 + j6{,}25$$

La corriente **I** en el circuito abierto de la Fig. 11-10 es $\mathbf{I} = (10\angle 0^\circ)/(5+3+j4) = 1{,}117\angle -26{,}6^\circ$. La tensión a circuito abierto será la caída en la impedancia $3 + j4$.

$$\mathbf{V}' = \mathbf{I}(3+j4) = (1{,}117\angle -26{,}6^\circ)(5\angle 53{,}1^\circ) = 5{,}58\angle 26{,}5^\circ$$

La polaridad de V' viene dada por el sentido de la corriente que entra en la impedancia $3 + j4$. La fuente, por tanto, alimenta hacia el terminal *A* en el circuito equivalente, tal como se representa en la Figura 11-11.

**11-2** Obtener el circuito equivalente de Norton para el circuito activo de la Figura 11-10.

La impedancia equivalente es $Z' = 2{,}5 + j6{,}25$, como se calculó en el Problema 11-1.

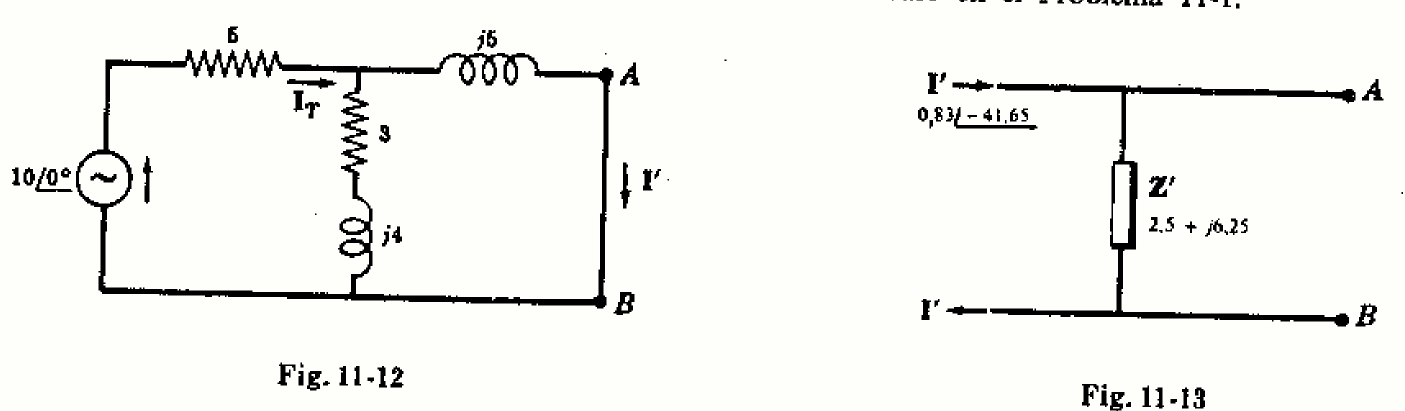



Fig. 11-12

Fig. 11-13

Poniendo en corto los terminales $AB$, como en la Fig. 11-12, la impedancia total que presenta el circuito a la fuente $10\underline{/0°}$ es

$$\mathbf{Z}_T = 5 + \frac{(3+j4)j5}{(3+j4+j5)} = 5{,}83 + j2{,}5 = 6{,}35\underline{/23{,}2°}$$

La corriente, entonces, $\mathbf{I}_T = 10\underline{/0°}/\mathbf{Z}_T = (10\underline{/0°})/(6{,}35\underline{/23{,}2°}) = 1{,}575\underline{/-23{,}2°}$, con lo que

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I}_T\left(\frac{3+j4}{3+j4+j5}\right) = 1{,}575\underline{/-23{,}2°}\left(\frac{5\underline{/53{,}1°}}{3+j9}\right) = 0{,}83\underline{/-41{,}65°}$$

El circuito equivalente de Norton es el de la Fig. 11-13. Obsérvese que la corriente $\mathbf{I}'$ se dirige hacia $A$ puesto que la corriente de cortocircuito entra por el terminal $A$.

**11-3** En el circuito de corriente continua dado en la Fig. 11-14 se conectan sucesivamente tres resistencias, $R_1 = 1$ ohmio, $R_2 = 5$ ohmios y $R_3 = 10$ ohmios, a los terminales $AB$. Determinar la potencia suministrada a cada resistencia.

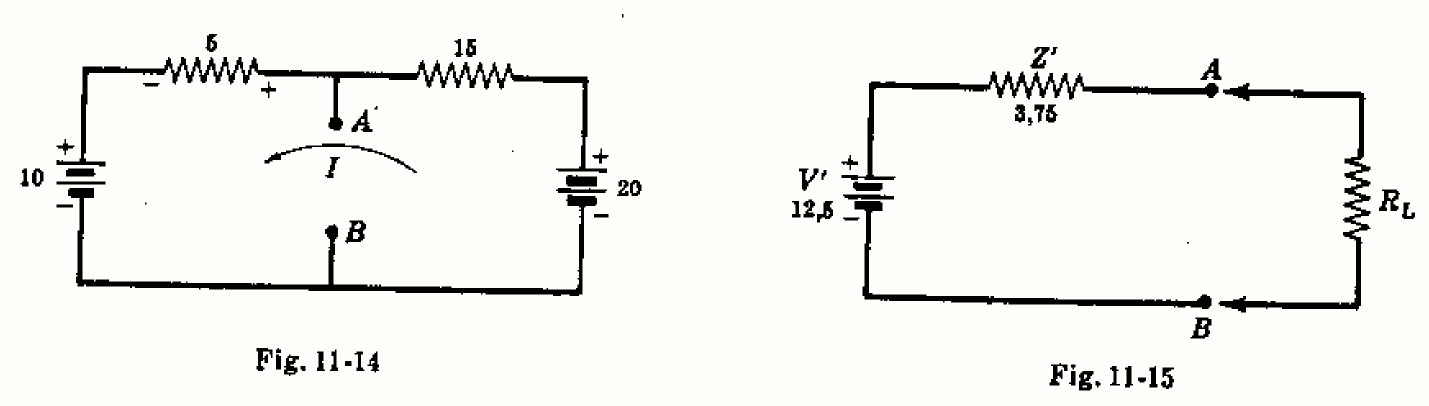



Fig. 11-14

Fig. 11-15

Se obtiene el circuito equivalente de Thevenin. En la Fig. 11-14 la corriente $I = (20 - 10)/(5 + 15) = 0{,}5$ A. La caída de tensión en la resistencia de 5 ohmios es $V_5 = (5)I = 2{,}5$ V, con la polaridad señalada. La tensión de $A$ respecto de $B$ es

$$V_{AB} = V' = 10 + V_5 = 12{,}5 \text{ V}$$

Si se hacen iguales a cero las fuentes de corriente continua, la impedancia $Z'$ es la combinación en paralelo de las resistencias de 5 y 15 ohmios,

$$Z' = \frac{5(15)}{20} = 3{,}75$$

El circuito equivalente de Thevenin es el de la Fig. 11-15. Conectando ahora cada una de las tres resistencias a los terminales $AB$, las potencias respectivas serán:

Con $R_1 = 1\ \Omega$, $I_1 = 12{,}5/(3{,}75 + 1) = 2{,}63$ A y $P_1 = (1)(I_1)^2 = (1)(2{,}63)^2 = 6{,}91$ W.

Con $R_2 = 5\ \Omega$, $I_2 = 12{,}5/(3{,}75 + 5) = 1{,}43$ A y $P_2 = (5)(I_2)^2 = (5)(1{,}43)^2 = 10{,}2$ W.

Con $R_3 = 10\ \Omega$, $I_3 = 12{,}5/(3{,}75 + 10) = 0{,}91$ A y $P_3 = (10)(I_3)^2 = (10)(0{,}91)^2 = 8{,}28$ W.

**11-4** Obtener el circuito equivalente de Norton respecto de los terminales $AB$ del circuito de la Figura 11-16.

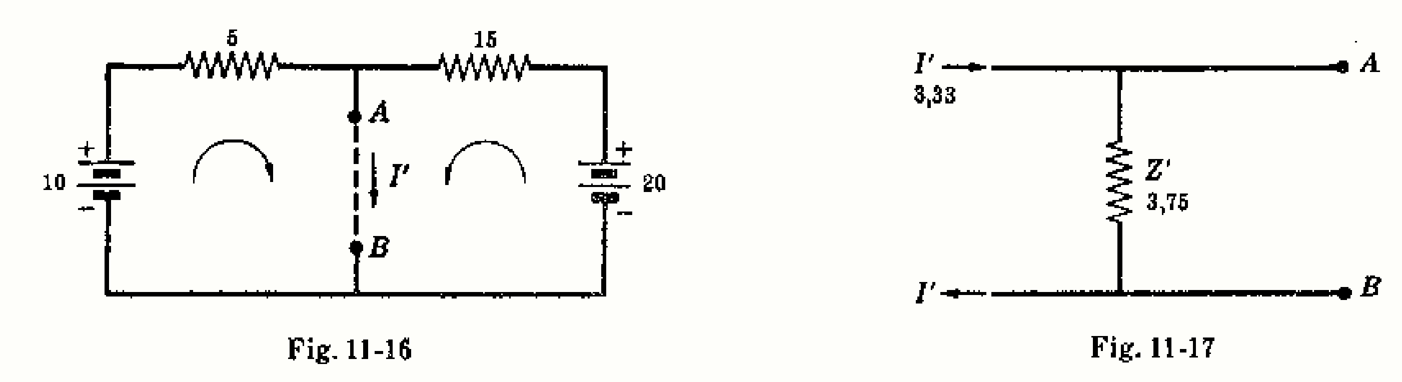



Fig. 11-16 Fig. 11-17

Aplicando un cortocircuito a los terminales $AB$ se tiene para la corriente $I'$

$$I' = 10/5 + 20/15 = 3{,}33 \text{ A}$$

La impedancia equivalente en los terminales $AB$ con las fuentes de tensión iguales a cero es

$$Z' = 5(15)/(5 + 15) = 3{,}75\ \Omega$$

El circuito equivalente de Norton es el de la Figura 11-17.

**11-5** Hallar el circuito equivalente de Thevenin del circuito de la Figura 11-18.

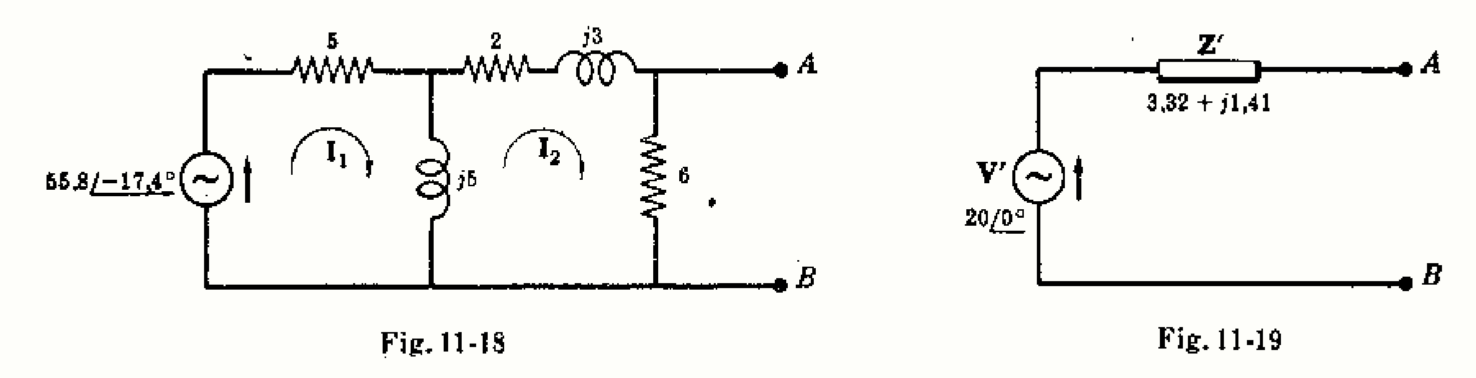



Fig. 11-18 Fig. 11-19

A circuito abierto hay dos mallas, como se ve en el esquema. La corriente $\mathbf{I}_2$ viene dada por

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 55{,}8\underline{/-17{,}4^\circ} \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix}} = \frac{279\underline{/72{,}6^\circ}}{83{,}7\underline{/72{,}6^\circ}} = 3{,}33\underline{/0^\circ}$$

La tensión a circuito abierto es, pues, $\mathbf{V}_{AB} = (6)\mathbf{I}_2 = (6)3{,}33\underline{/0^\circ} = 20\underline{/0^\circ}$. Por reducción del circuito

$$\mathbf{Z}' = \frac{6\left[\frac{5(j5)}{5+j5} + (2+j3)\right]}{6 + \left[\frac{5(j5)}{5+j5} + (2+j3)\right]} = 3{,}32 + j1{,}41$$

El circuito equivalente de Thevenin es el representado en la Fig. 11-19 con $\mathbf{V}'$ dirigido hacia el terminal $A$.

**11-6** Obtener el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-18.

Poniendo los terminales $AB$ en cortocircuito, la corriente vale

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}' = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 55{,}8\underline{/-17{,}4^\circ} \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 2+j8 \end{vmatrix}} = \frac{279\underline{/72{,}6^\circ}}{(-5+j50)} = 5{,}58\underline{/-23{,}14^\circ}$$

La impedancia $\mathbf{Z}' = 3{,}32 + j1{,}41$, como se calculó en el Problema 11-5.

Como comprobación, la tensión a circuito abierto del circuito equivalente de Norton en la Fig. 11-20 puede compararse con $\mathbf{V}'$ de Thevenin en el Problema 11-5.

$$\mathbf{V}_{oc} = \mathbf{I}'\mathbf{Z}' = 5{,}58\underline{/-23{,}14^\circ}\,(3{,}32 + j1{,}41) = 20{,}1\underline{/-0{,}14^\circ}$$

En el Problema 11-5, $\mathbf{V}' = 20\underline{/0^\circ}$.

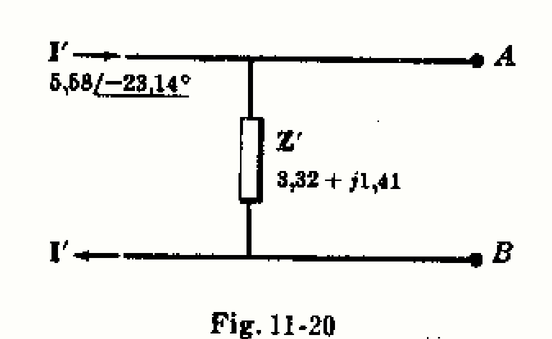



Fig. 11-20

**11-7** Sustituir el circuito activo de la Fig. 11-21 por uno equivalente de Thevenin en los terminales *AB*.

En el circuito abierto la corriente es

$$\mathbf{I} = 20\underline{/0^\circ}/(10 + 3 - j4) = 1{,}47\underline{/17{,}1^\circ}$$

Por tanto, la caída de tensión en la resistencia de 10 Ω es $\mathbf{V}_{10} = (10)\mathbf{I} = 14{,}7\underline{/17{,}1^\circ}$.

La tensión $\mathbf{V}_{AB}$ es la suma de las tensiones de las dos fuentes más la caída de tensión en la resistencia de 10 Ω, con las polaridades señaladas en la Fig. 11-22. Entonces,

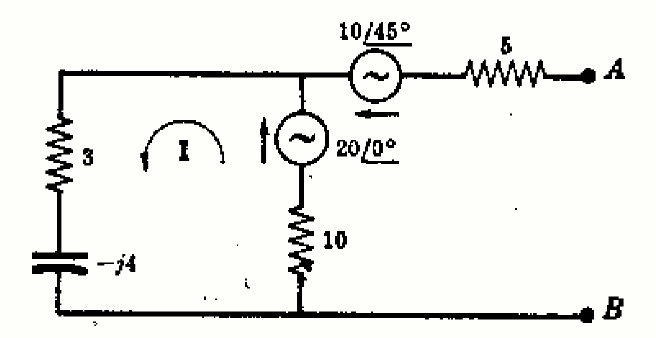



Fig. 11-21

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = 20\underline{/0^\circ} - 10\underline{/45^\circ} - 14{,}7\underline{/17{,}1^\circ} = 11{,}39\underline{/264{,}4^\circ}$$

La impedancia $\mathbf{Z}' = 5 + \dfrac{10(3 - j4)}{10 + 3 - j4} = 7{,}97 - j2{,}16$.

El circuito equivalente de Thevenin es el representado en la Figura 11-23.

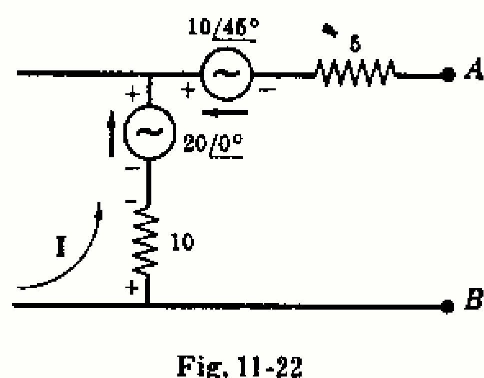



Fig. 11-22

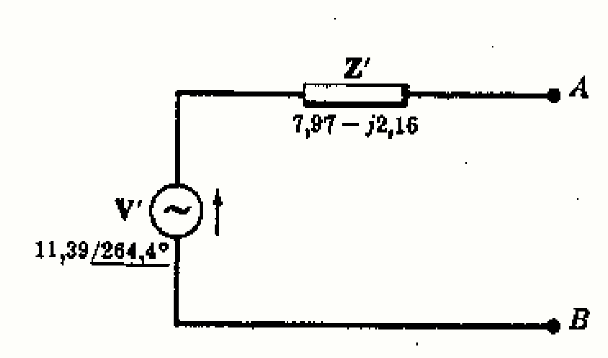



Fig. 11-23

**11-8** Obtener el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-21.

$\mathbf{Z}' = 7{,}97 - j2{,}16$, como se calculó en el Problema 11-7.

Aplicando un cortocircuito a los terminales *AB* y eligiendo las corrientes de malla en el sentido de las agujas del reloj, se tiene

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 13 - j4 & -20 \\ -10 & (20 - 10\underline{/45^\circ}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 - j4 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{156\underline{/247{,}4^\circ}}{112{,}3\underline{/-32{,}3^\circ}} = 1{,}39\underline{/279{,}7^\circ}$$

La fuente de intensidad de Norton, $\mathbf{I}'$, se dirige hacia el terminal *A*, Figura 11-24.

Comparando la tensión $\mathbf{V}_{oc}$ a circuito abierto de este circuito con la tensión equivalente de Thevenin $\mathbf{V}'$ del Problema 11-7,

$$\mathbf{V}_{oc} = \mathbf{Z}'\mathbf{I}' = (8{,}25)\underline{/-15{,}2^\circ}\,)(1{,}39\underline{/279{,}7^\circ}\,) = 11{,}45\underline{/264{,}5^\circ}$$

y $\mathbf{V}' = 11{,}39\underline{/264{,}4^\circ}$

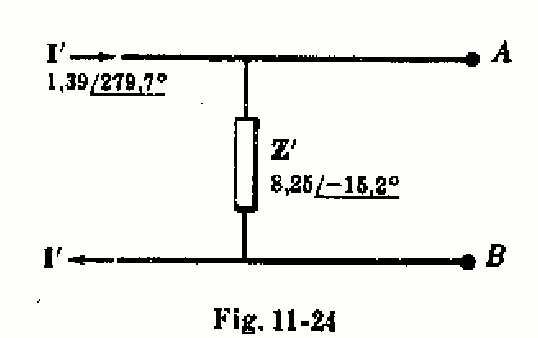



Fig. 11-24

**11-9** En el circuito activo de la Fig. 11-25 hay una fuente de intensidad $\mathbf{I} = 5\underline{/30°}$ amperios. Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$.

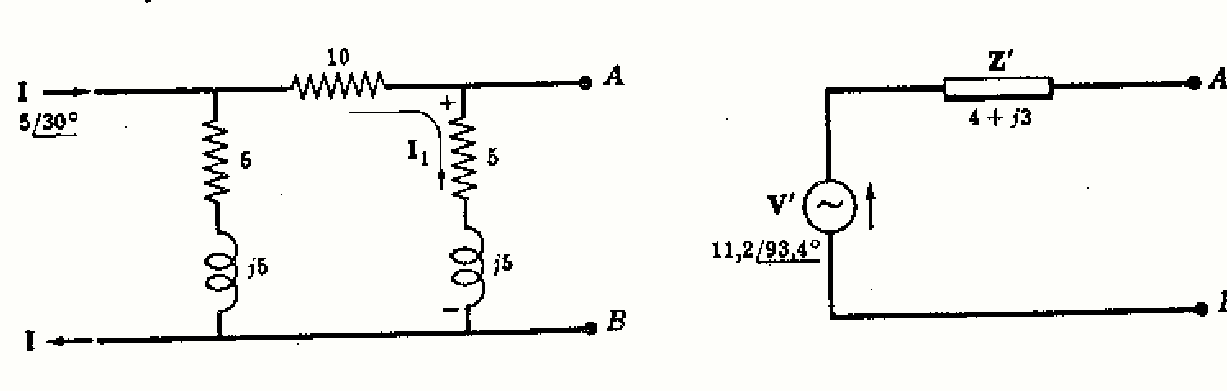



Fig. 11-25 Fig. 11-26

La impedancia equivalente $\mathbf{Z}'$ en los terminales $AB$ con la fuente reducida a cero está formada por dos ramas en paralelo. En consecuencia,

$$\mathbf{Z}' = \frac{(5+j5)(15+j5)}{(5+j5+15+j5)} = 4 + j3$$

A circuito abierto, la corriente se divide entre las dos ramas. Hallando el valor de $\mathbf{I}_1$, señalada en el diagrama, se tiene

$$\mathbf{I}_1 = 5\underline{/30°}\left(\frac{5+j5}{20+j10}\right) = 1{,}585\underline{/48{,}4°}$$

Puesto que $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}'$ es la caída de tensión en la impedancia $5 + j5$,

$$\mathbf{V}' = (5+j5)I_1 = (7{,}07\underline{/45°})(1{,}585\underline{/48{,}4°}) = 11{,}2\underline{/93{,}4°}$$

El circuito equivalente de Thevenin es el de la Figura 11-26.

**11-10** Hallar el circuito equivalente de Norton del circuito activo de la Figura 11-25.

La impedancia equivalente del circuito, calculada en el Problema 11-9, es $\mathbf{Z}' = 4 + j3 = 5\underline{/36{,}9°}$.

Si se pone $AB$ en corto en la Fig. 11-25 la intensidad de corriente es

$$\mathbf{I}' = 5\underline{/30°}\left(\frac{5+j5}{5+j5+10}\right) = 2{,}24\underline{/56{,}6°}$$

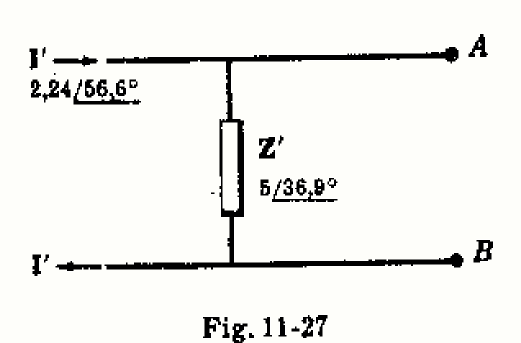



Fig. 11-27

El circuito equivalente de Norton es el dibujado en la Figura 11-27.

A circuito abierto, el equivalente de Norton tiene una tensión $\mathbf{V}_{oc} = (5\underline{/36{,}9°})(2{,}24\underline{/56{,}6°}) = 11{,}2\underline{/93{,}5°}$. En el Problema 11-9 la tensión equivalente de Thevenin era $\mathbf{V}' = 11{,}2\underline{/93{,}4°}$.

**11-11** Obtener el equivalente de Thevenin del circuito puente dado en la Fig. 11-28. ¿En qué condiciones será cero la tensión a circuito abierto en los terminales $AB$?

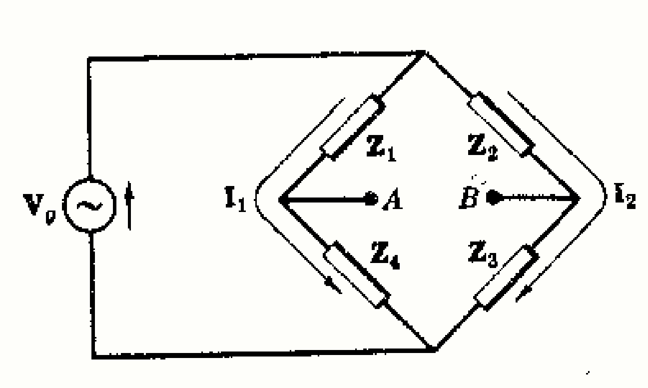



Fig. 11-28

Con la fuente de tensión igualada a cero la impedancia equivalente en los terminales $AB$ está formada por la combinación en paralelo de $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_4$ en serie con la combinación en paralelo de $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$. Por tanto,

$$\mathbf{Z}' = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_4} + \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_3}$$

A circuito abierto, la fuente $V_g$ entrega las corrientes de intensidades $I_1$ e $I_2$ del diagrama.

$$I_1 = V_g/(Z_1 + Z_4) \qquad y \qquad I_2 = V_g/(Z_2 + Z_3)$$

Suponiendo mayor el potencial de *A* que el de *B* se tiene

$$V' = V_{AB} = Z_4 I_1 - Z_3 I_2 = \frac{V_g Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{V_g Z_3}{Z_2 + Z_3} = V_g\left[\frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}\right]$$

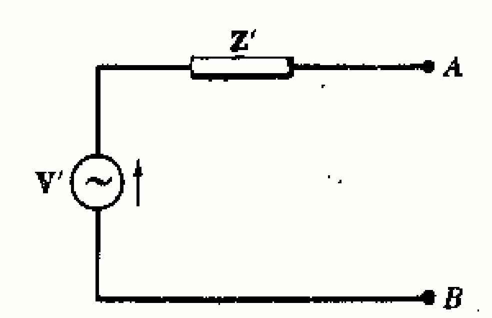


Fig. 11-29

La tensión equivalente de Thevenin V' es proporcional a la diferencia $Z_2Z_4 - Z_1Z_3$. Será $V' = 0$ cuando se verifique $Z_2Z_4 = Z_1Z_3$.

**11-12** Obtener el circuito equivalente de Thevenin del puente de la Figura 11-30.

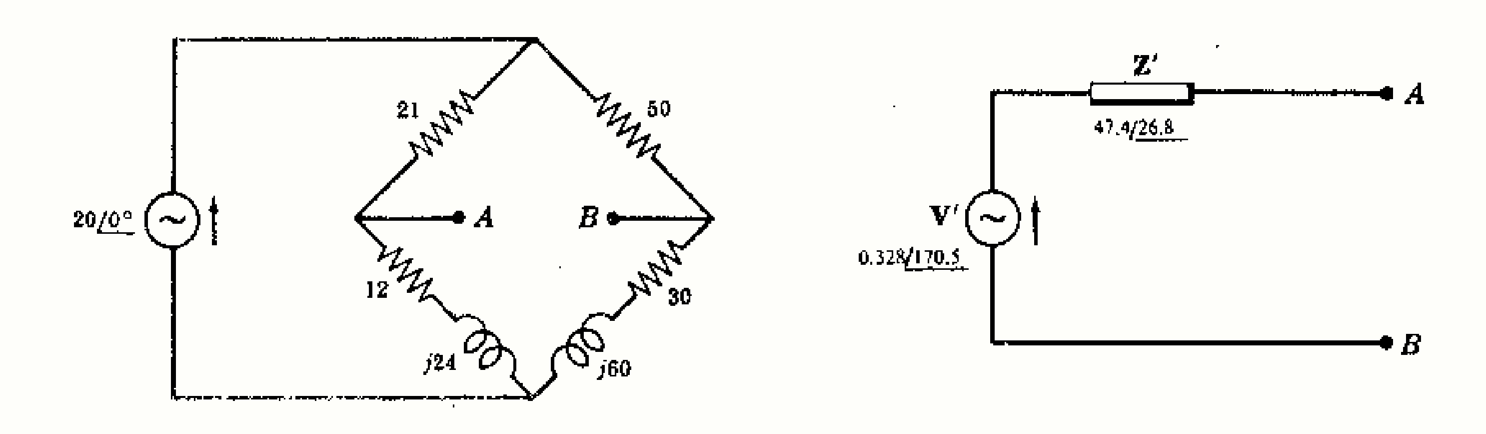


Fig. 11-30 Fig. 11-31

La impedancia equivalente en los terminales *AB* con la fuente igual a cero es

$$Z' = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47{,}4\underline{/26{,}8^\circ}$$

A circuito abierto, la corriente en el lado izquierdo del puente es $I_1 = (20\underline{/0^\circ})/(33 + j24)$. En el lado derecho del puente, $I_2 = (20\underline{/0^\circ})/(80 + j60)$.

Suponiendo que el punto *A* está a un potencial más alto que *B* tenemos

$$V' = V_{AB} = \frac{(20\underline{/0^\circ})(12 + j24)}{33 + j24} - \frac{(20\underline{/0^\circ})(30 + j60)}{80 + j60} = (20\underline{/0^\circ})(1 + j2)\left[\frac{12}{33 + j24} - \frac{30}{80 + j60}\right] = 0{,}328\underline{/170{,}5^\circ}$$

**11-13** Sustituir, en el circuito de la Fig. 11-32, el circuito a la izquierda de los terminales *AB* por su equivalente de Thevenin. Determinar después la intensidad de corriente por la impedancia $2 - j2$ conectada al circuito equivalente.

La impedancia Z' puede obtenerse por reducción del circuito. La impedancia $5 - j2$ está en paralelo con la resistencia de 3 Ω. La impedancia equivalente es

$$Z_1 = \frac{(5 - j2)3}{8 - j2} = 1{,}94 - j0{,}265$$

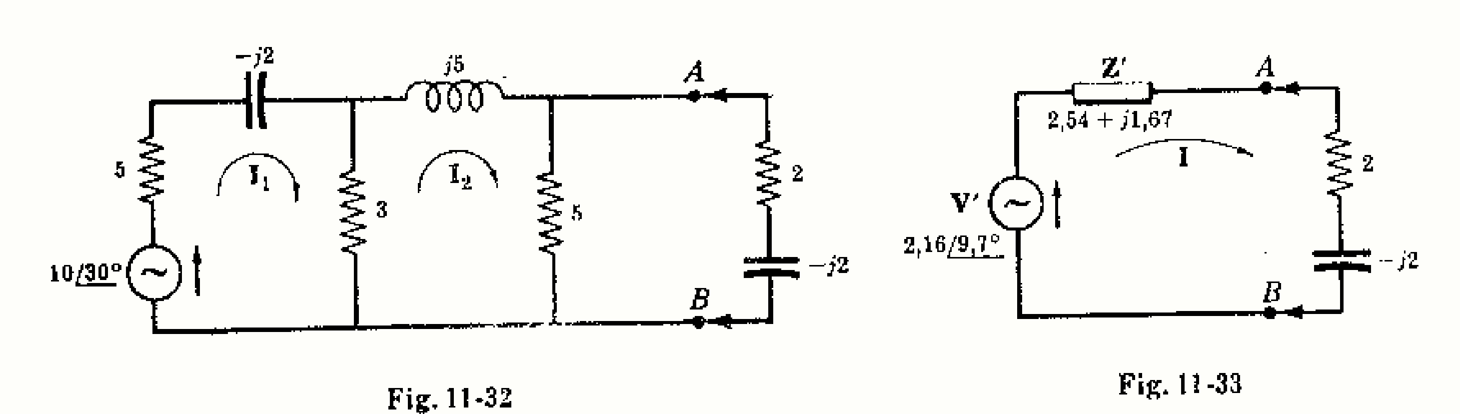



Fig. 11-32 Fig. 11-33

Ahora $\mathbf{Z}_1$ está en serie con la impedancia $j5$. Sumándolas

$$\mathbf{Z}_2 = 1{,}94 - j0{,}265 + j5 = 1{,}94 + j4{,}735$$

$\mathbf{Z}'$ se determina combinando $\mathbf{Z}_2$ y la resistencia de 5 Ω. Por tanto,

$$\mathbf{Z}' = \frac{(1{,}94 + j4{,}735)5}{6{,}94 + j4{,}735} = 3{,}04\underline{/33{,}4°} = 2{,}54 + j1{,}67$$

Hallando el valor de $\mathbf{I}_2$ en el circuito abierto por el método de las corrientes de malla,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & 10\underline{/30°} \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 \\ -3 & 8 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{30\underline{/30°}}{69{,}25\underline{/20{,}3°}} = 0{,}433\underline{/9{,}7°}$$

Entonces, la tensión a circuito abierto es la caída en la resistencia de 5 Ω.

$$\mathbf{V}' = \mathbf{I}_2(5) = (0{,}433\underline{/9{,}7°})5 = 2{,}16\underline{/9{,}7°}$$

Si se une ahora, Fig. 11-33, la impedancia $2 - j2$ al equivalente de Thevenin, la corriente buscada es

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}'/(\mathbf{Z}' + 2 - j2) = (2{,}16\underline{/9{,}7°})/(4{,}54 - j0{,}33) = 0{,}476\underline{/13{,}87°}$$

**11-14** Determinar, en el circuito de la Fig. 11-34, una tensión $\mathbf{V}_2$ tal que la corriente que circule por la impedancia $2 + j3$ sea cero.

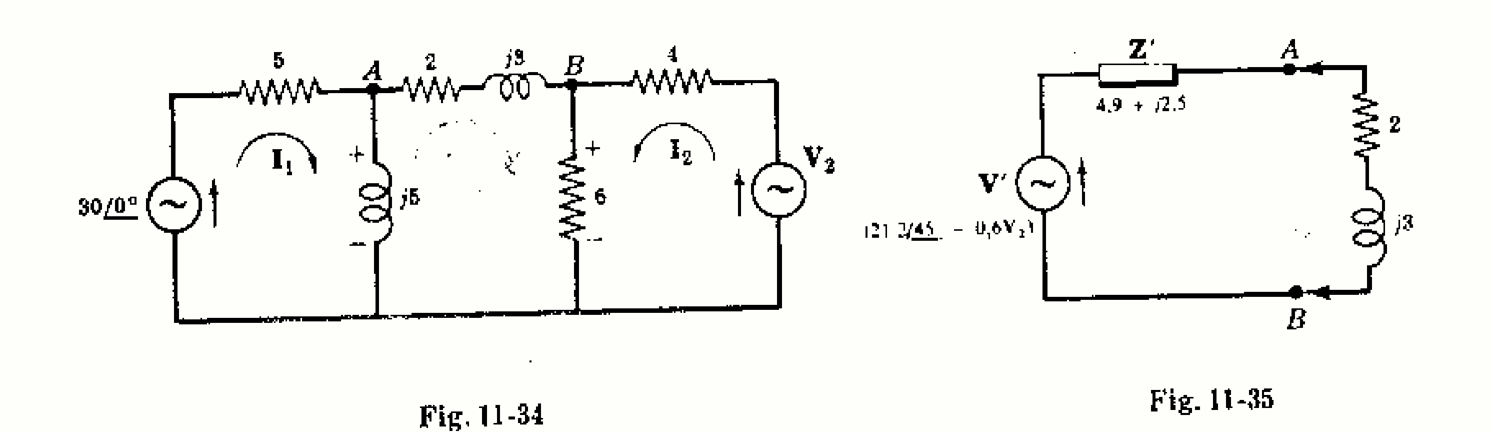



Fig. 11-34 Fig. 11-35

Se aplica el teorema de Thevenin al circuito dado y se obtiene la tensión equivalente medida en los terminales $AB$. A circuito abierto, las dos corrientes son $\mathbf{I}_1 = (30\underline{/0°})/(5 + j5)$ e $\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2/10$.

Suponiendo que el potencial de $A$ es mayor que el de $B$, se tiene

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = (j5)\mathbf{I}_1 - (6)\mathbf{I}_2 = (j5)30\underline{/0°}/(5 + j5) - \mathbf{V}_2(6)/10 = 21{,}2\underline{/45°} - 0{,}6\mathbf{V}_2$$

La corriente en el circuito equivalente de Thevenin de la Fig. 11-35 es cero si $V' = 0$. Por tanto,

$$0 = 21{,}2\underline{/45^\circ} - 0{,}6V_2 \quad \text{y} \quad V_2 = 35{,}4\underline{/45^\circ}$$

*Nota.* El valor de la impedancia Z' en la Fig. 11-35 no hace falta en este problema, dejándose su cálculo al lector como ejercicio.

**11-15** En el circuito de la Fig. 11-36 determinar el valor de la fuente de tensión $V_1$ para el cual la corriente en la fuente $20\underline{/0^\circ}$ voltios es nula.

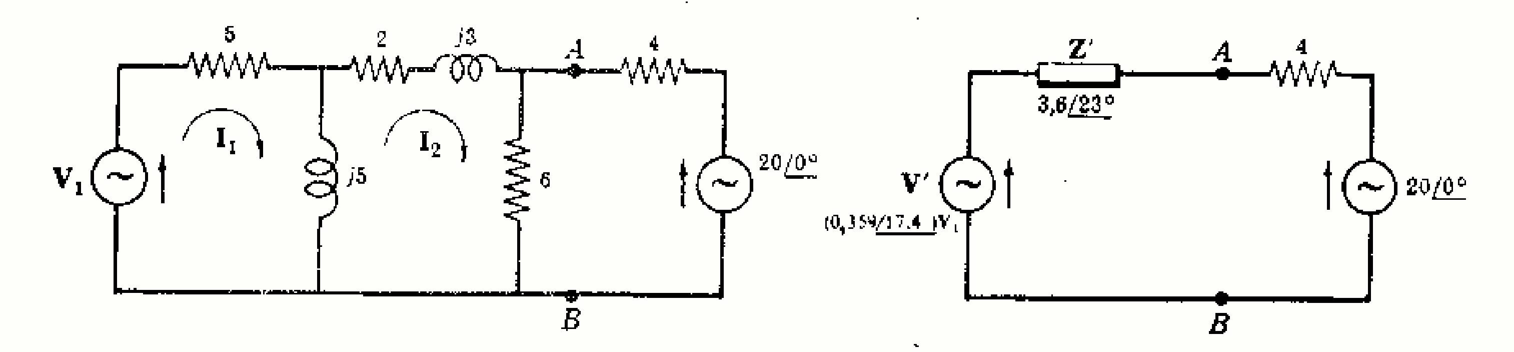



Fig. 11-36 Fig. 11-37

Se obtiene el equivalente de Thevenin para el circuito activo a la izquierda de los terminales *AB*. A circuito abierto, hay dos corrientes de malla $I_1$ e $I_2$. Hallando el valor de $I_2$,

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & V_1 \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix}} = \frac{V_1\, 5\underline{/90^\circ}}{83{,}6\underline{/72{,}6^\circ}}$$

La tensión a circuito abierto es ahora la caída en la resistencia de 6 Ω, $(6)I_2$.

$$V' = (6)\frac{V_1\, 5\underline{/90^\circ}}{83{,}6\underline{/72{,}6^\circ}} = (0{,}359\underline{/17{,}4^\circ})V_1$$

Si se conecta el circuito equivalente de Thevenin a los terminales *AB*, como en la Fig. 11-37, es evidente que para una corriente cero, V' tiene que ser igual a la otra fuente, esto es, $V' = 20\underline{/0^\circ}$. Por consiguiente. $(0{,}359\underline{/17{,}4^\circ})V_1 = 20\underline{/0^\circ}$, de donde $V_1 = 55{,}7\underline{/-17{,}4^\circ}$.

La nota final del Problema 11-14 es también aplicable a éste.

**11-16** El circuito activo de la Fig. 11-38 tiene tres impedancias $Z_1 = 10\underline{/30^\circ}$, $Z_2 = 20\underline{/0^\circ}$ y $Z_3 = 5 - j5$, que han de conectarse sucesivamente a los terminales *AB*. Determinar la potencia disipada en cada una de ellas.

Se sustituye el circuito por su equivalente de Thevenin en los terminales *AB* y se unen las impedancias al circuito equivalente.

Para calcular la impedancia de entrada se eligen tres corrientes de malla como si una fuente alimentara entre *A* y *B* en la forma indicada en la Fig. 11-39. Entonces, la impedancia de entrada $Z_{entrada\,1}$ es Z' del circuito de Thevenin. De la definición de $Z_{entrada}$ se tiene $Z_{entrada\,1} = \Delta_z/\Delta_{11}$, siendo

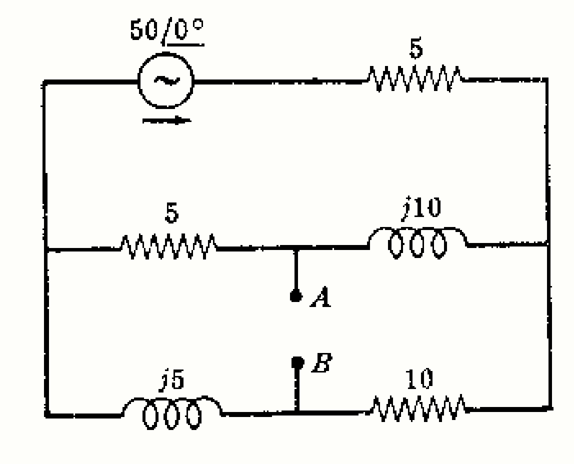



Fig. 11-38

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} (5+j5) & -5 & (5+j5) \\ -5 & (10+j10) & (-5-j10) \\ (5+j5) & (-5-j10) & (15+j15) \end{vmatrix} = 1455\underline{/121°}$$

y

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} (10+j10) & (-5-j10) \\ (-5-j10) & (15+j15) \end{vmatrix} = 213{,}5\underline{/69{,}4°}$$

Sustituyendo $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_{\text{entrada 1}} = \Delta_z/\Delta_{11} = 1455\underline{/121°}\,/213{,}5\underline{/69{,}4°} = 6{,}82\underline{/51{,}6°} = 4{,}23 + j5{,}34$

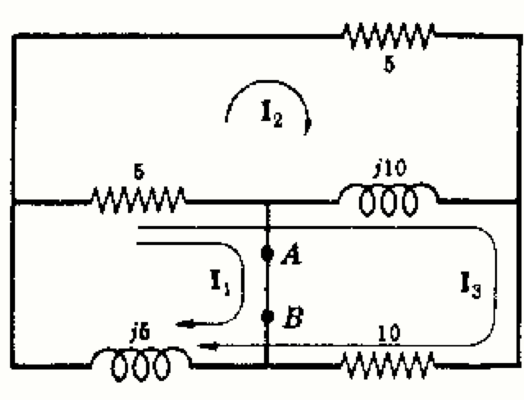


Fig. 11-39

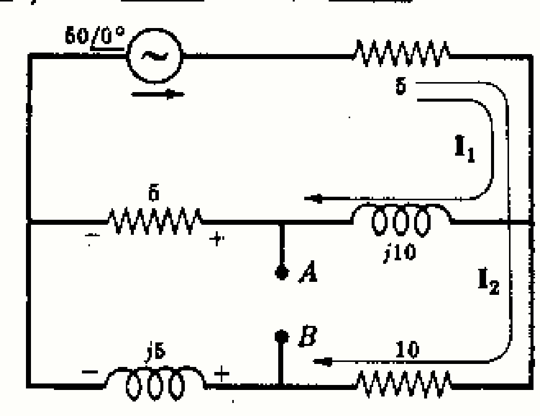


Fig. 11-40

En el circuito abierto hay dos corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, Fig. 11-40; las intensidades son

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 5 \\ 50 & 15+j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+j10 & 5 \\ 5 & 15+j5 \end{vmatrix}} = \frac{558\underline{/26{,}6°}}{213{,}5\underline{/69{,}4°}} = 2{,}62\underline{/-42{,}8°}$$

y

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j10 & 50 \\ 5 & 50 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{558\underline{/63{,}4°}}{213{,}5\underline{/69{,}4°}} = 2{,}62\underline{/-6°}$$

Ahora bien, la tensión equivalente de Thevenin $\mathbf{V}'$ es la tensión a circuito abierto $\mathbf{V}_{AB}$, suponiendo el punto $A$ a un potencial más alto que el de $B$. En la Fig. 11-40 la caída de tensión en la resistencia de 5 Ω en la rama central y en la reactancia $j5$ en la rama inferior se han marcado con sus polaridades instantáneas. Entonces,

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_1(5) - \mathbf{I}_2(j5)$$
$$= (2{,}62\underline{/-42{,}8°})(5) - (2{,}62\underline{/-6°})(5\underline{/90°})$$
$$= 23{,}4\underline{/-69{,}4°}$$

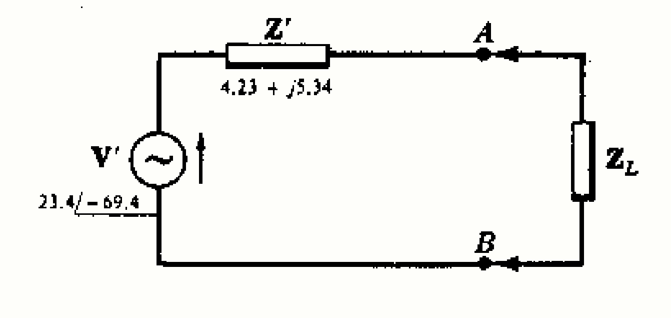


Fig. 11-41

El circuito equivalente de Thevenin se ha representado en la Fig. 11-41 con la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ conectada a los terminales $AB$.

Sustituyendo los valores dados de $\mathbf{Z}_L$ en $\mathbf{I} = \mathbf{V}'/(\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}_L)$ se obtienen las corrientes y las potencias pedidas. Por tanto,

Con $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_1 = 10\underline{/30°} = 8{,}66 + j5$,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{23{,}4\underline{/-69{,}4°}}{(4{,}23 + j5{,}34 + 8{,}66 + j5)} = 1{,}414\underline{/-108{,}2°} \quad \text{y} \quad P_1 = \text{Re}\,\mathbf{Z}_1(I_1)^2 = (8{,}66)(1{,}414)^2 = 17{,}32 \text{ W}$$

Con $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_2 = 20\underline{/0°}$,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{23{,}4\underline{/-69{,}4°}}{(4{,}23 + j5{,}34 + 20)} = 0{,}940\underline{/-81{,}8°} \quad \text{y} \quad P_2 = (20)(0{,}940)^2 = 17{,}65 \text{ W}$$

Con $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_3 = 5 - j5$,

$$\mathbf{I}_3 = \frac{23{,}4\underline{/-69{,}4°}}{(4{,}23 + j5{,}34 + 5 - j5)} = 2{,}54\underline{/-71{,}5°} \quad \text{y} \quad P_3 = (5)(2{,}54)^2 = 32{,}3 \text{ W}$$

# Problemas propuestos

**11-17** Obtener el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito activo de la Figura 11-42.
*Sol.* $Z' = 9{,}43\ \Omega$; $V' = 6{,}29$ V $(B+)$.

**11-18** Obtener el circuito equivalente de Norton del correspondiente de la Figura 11-42.
*Sol.* $Z' = 9{,}34\ \Omega$; $I' = 0{,}667$ A.

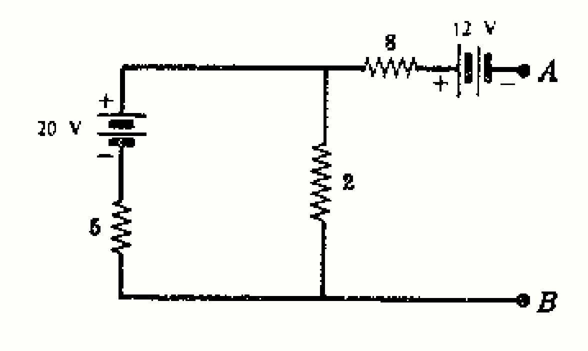



Fig. 11-42

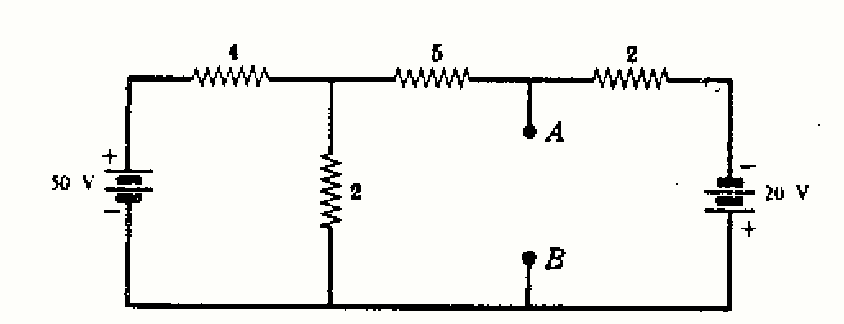



Fig. 11-43

**11-19** Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito activo dado en la Figura 11-43.
*Sol.* $Z' = 1{,}52\ \Omega$; $V' = 11{,}18$ V $(B+)$.

**11-20** Hallar el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-43. *Sol.* $Z' = 1{,}52\ \Omega$; $I' = 7{,}35$ A.

**11-21** Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito puente representado en la Figura 11-44.
*Sol.* $Z' = 55{,}5\ \Omega$; $V' = 0$ V.

**11-22** En el circuito del problema anterior se sustituye la resistencia de 500 ohmios por otra de 475 ohmios. Determinar el circuito equivalente de Thevenin.
*Sol.* $Z' = 55{,}4\ \Omega$; $V' = 0{,}0863$ V $(A+)$.

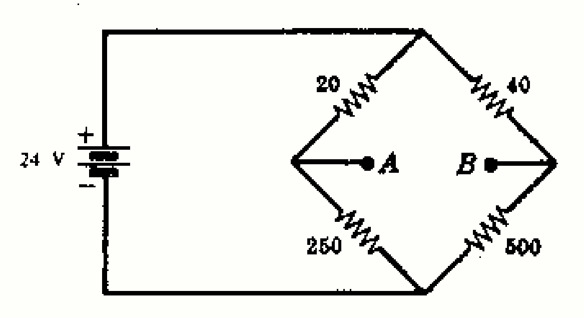



Fig. 11-44

**11-23** Utilizar el teorema de Thevenin en el circuito puente de la Fig. 11-45 para hallar la desviación de un galvanómetro conectado a $AB$ con una resistencia de 100 ohmios y una sensibilidad de 0,5 microamperios por milímetro. *Sol.* $D = 19{,}5$ cm.

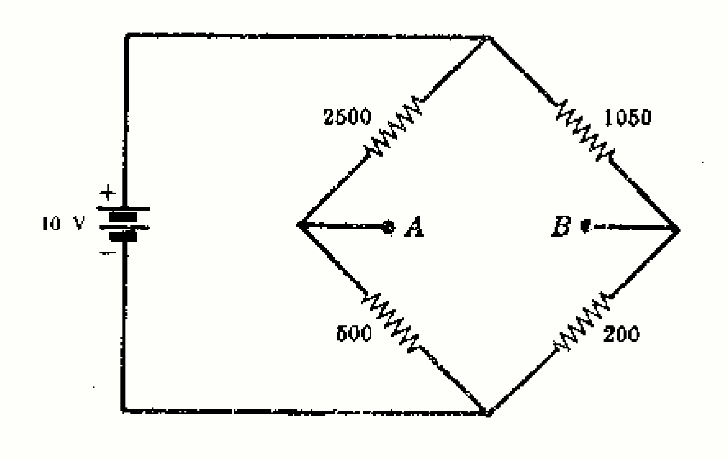



Fig. 11-45

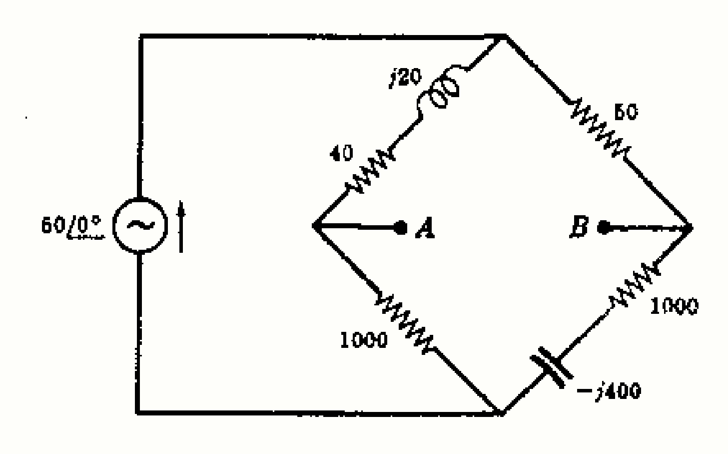



Fig. 11-46

**11-24** Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del puente de alterna de la Figura 11-46.
*Sol.* $Z' = 88{,}7\angle 11{,}55^\circ\ \Omega$; $V' = 0{,}192\angle -43{,}4^\circ$ V.

**11-25** Utilizando el teorema de Thevenin hallar la potencia disipada en una resistencia de 1 ohmio conectada en los terminales $AB$ del circuito de la Figura 11-47. *Sol.* 2,22 W.

**11-26** Repetir el Problema 11-25 utilizando el circuito equivalente de Norton.

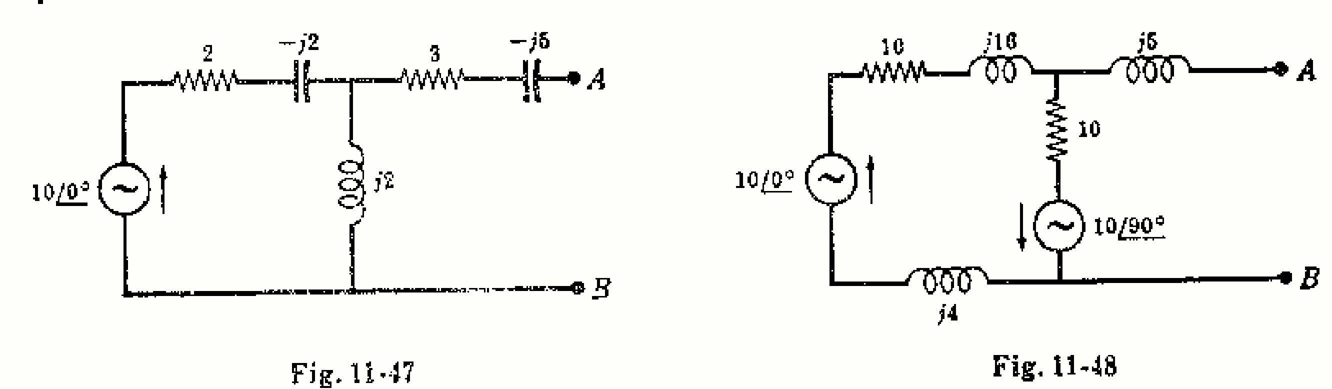



Fig. 11-47 Fig. 11-48

**11-27** Obtener el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito activo de la Figura 11-48.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 10{,}6\underline{/45°}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 11{,}17\underline{/-63{,}4°}$ V.

**11-28** Hallar el circuito equivalente de Norton en los terminales $AB$ del circuito de la Figura 11-48.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 10{,}6\underline{/45°}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 1{,}05\underline{/251{,}6°}$ A.

**11-29** Utilizar el teorema de Thevenin para hallar la potencia disipada en una impedancia de $2 + j4$ ohmios conectada a los terminales $AB$ del circuito activo de la Figura 11-49. *Sol.* 475 W.

**11-30** Repetir el problema anterior utilizando el teorema de Norton.

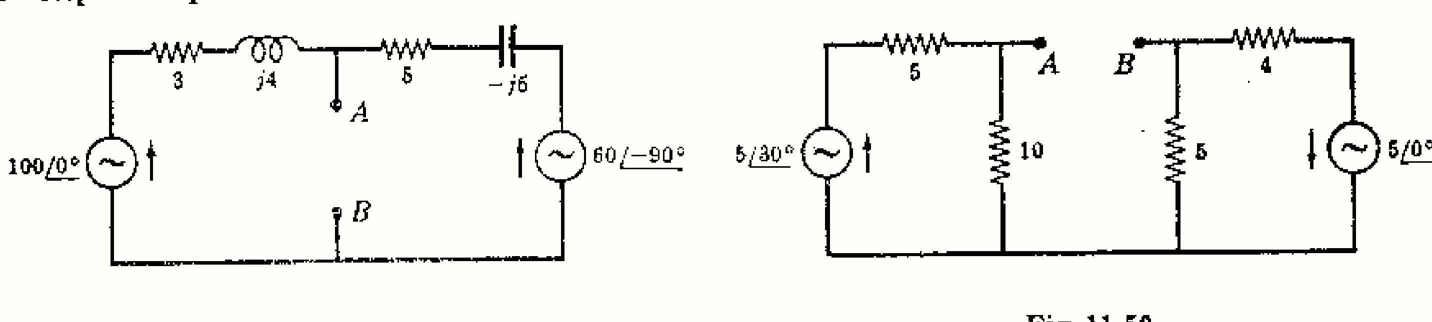



Fig. 11-49 Fig. 11-50

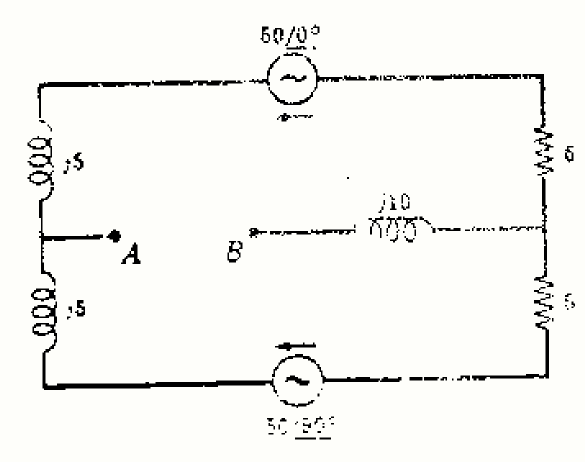
**11-31** Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito activo de la Figura 11-50.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 5{,}55\underline{/0°}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 5{,}9\underline{/16{,}4°}$ V.

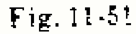
**11-32** Determinar el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-50.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 5{,}55\underline{/0°}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 1{,}06\underline{/16{,}4°}$ A.

**11-33** Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito activo de la Figura 11-51.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 2{,}5 + j12{,}5\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 25\sqrt{2}\underline{/45°}$ V.

**11-34** Hallar el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-51.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 2{,}5 + j12{,}5\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 2{,}77\underline{/-33{,}7°}$ A.

**11-35** En el circuito de la Fig. 11-52 hallar la corriente que pasa por la impedancia $3 + j4$ ohmios sustituyendo, en primer lugar, el circuito en los terminales $AB$ por su equivalente de Thevenin.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 3{,}53\underline{/45°}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 70{,}7\underline{/135°}$ V; $\mathbf{I} = 8{,}3\underline{/85{,}2°}$ A.



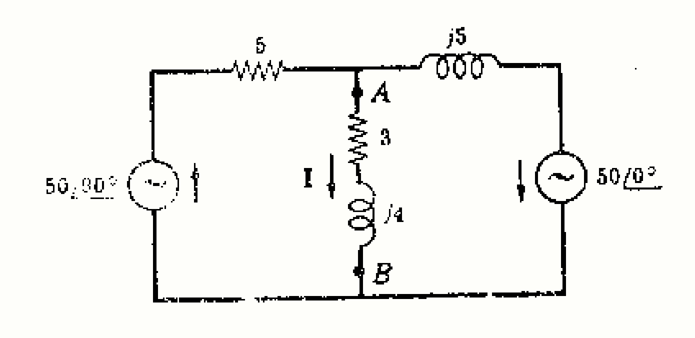




Fig. 11-51 Fig. 11-52

**11-36** Repetir el problema anterior utilizando el teorema de Norton.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 3{,}53\underline{/45^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 20\underline{/90^\circ}$ A; $\mathbf{I} = 8{,}3\underline{/85{,}2^\circ}$ A.

**11-37** En el circuito de la Fig. 11-53 una fuente de intensidad de $15\underline{/54^\circ}$ amperios alimenta en los terminales señalados en el esquema. Sustituir el circuito, en *AB*, por un circuito equivalente de Thevenin.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 11{,}48 + j1{,}19\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 28{,}6\underline{/83{,}8^\circ}$ V.

**11-38** Obtener el circuito equivalente de Norton en los terminales *AB* del circuito de la Figura 11-53.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 11{,}48 + j1{,}19\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 2{,}47\underline{/77{,}9^\circ}$ A.

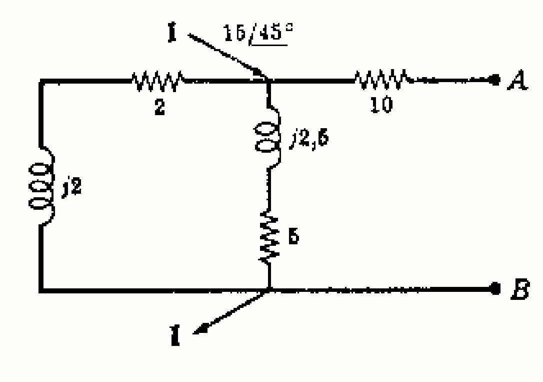



Fig. 11-53

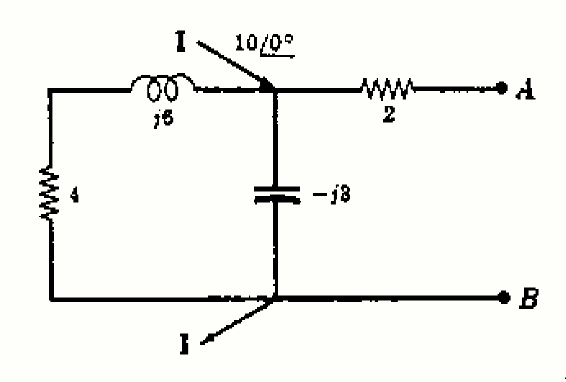



Fig. 11-54

**11-39** Obtener el circuito equivalente de Thevenin en los terminales *AB* del circuito de la Figura 11-54.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 5{,}34\underline{/-49{,}8^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 43{,}3\underline{/-70{,}6^\circ}$ V.

**11-40** Obtener el circuito equivalente de Norton de la Figura 11-54.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 5{,}34\underline{/-49{,}8^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 8{,}1\underline{/-20{,}8^\circ}$ A.

**11-41** Utilizando el teorema de Thevenin hallar la potencia disipada en una impedancia $\mathbf{Z} = 10\underline{/60^\circ}$ ohmios conectada a los terminales *AB* del circuito de la Figura 11-55. *Sol.* 23 W.

**11-42** Repetir el problema anterior empleando el teorema de Norton.

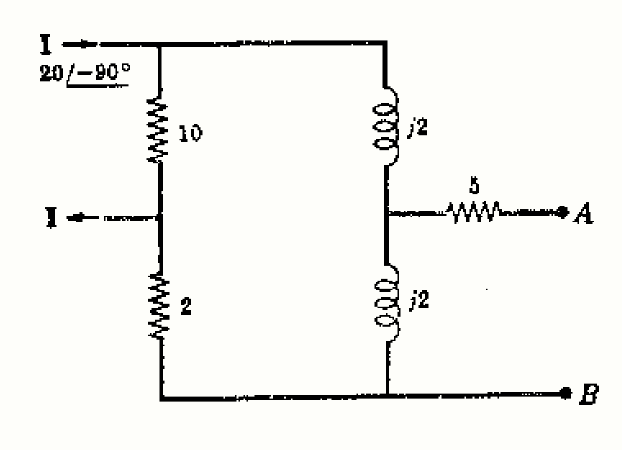



Fig. 11-55

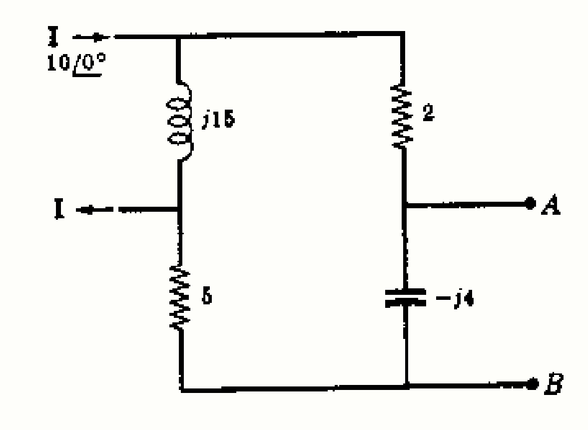



Fig. 11-56

**11-43** Obtener el circuito equivalente de Thevenin del circuito activo de la Figura 11-56.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 5{,}09\underline{/-82{,}5^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 46{,}2\underline{/-57{,}5^\circ}$ V.

**11-44** Hallar el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-56.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 5{,}09\underline{/-82{,}5^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 9{,}05\underline{/25^\circ}$ A.

**11-45** Determinar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales *AB* del circuito activo de la Figura 11-57.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 6{,}2\underline{/51{,}8^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 62{,}6\underline{/44{,}17^\circ}$ V.

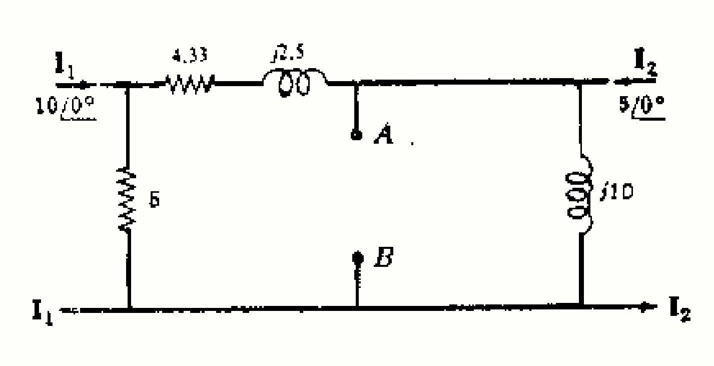



Fig. 11-57

**11-46** Obtener el circuito equivalente de Norton de la Figura 11-57.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 6{,}2\underline{/51{,}8^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 10{,}1\underline{/-7{,}63^\circ}$ A.

**11-47** El circuito activo de la Fig. 11-58 contiene una fuente de intensidad de $4\underline{/45^\circ}$ amperios y una fuente de tensión de $25\underline{/90^\circ}$ voltios. Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales *AB*.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 3{,}68\underline{/36^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 22{,}2\underline{/98^\circ}$ V.

**11-48** Obtener el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-58.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 3{,}68\underline{/36^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 6{,}03\underline{/62^\circ}$ A.

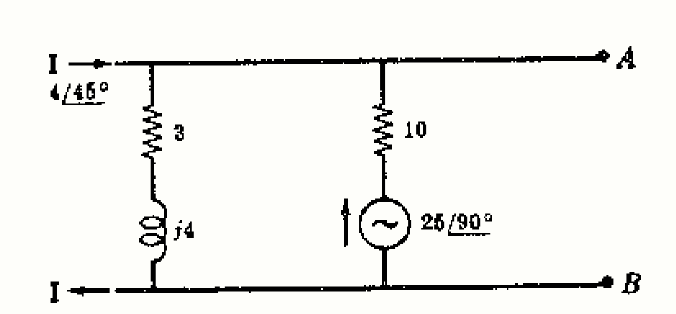



Fig. 11-58

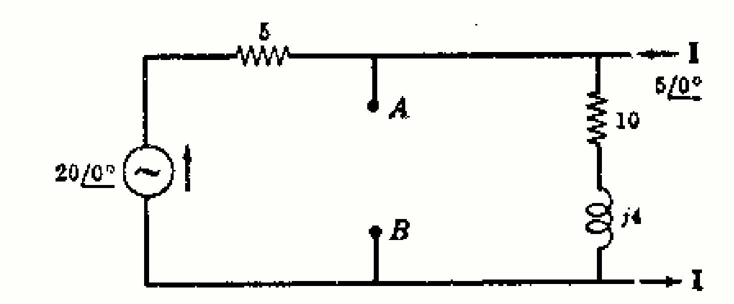



Fig. 11-59

**11-49** Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales *AB* del circuito activo representado en la Figura 11-59.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 3{,}47\underline{/6{,}85^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 31{,}2\underline{/6{,}89^\circ}$ V.

**11-50** Obtener el circuito equivalente de Norton del circuito de la Figura 11-59.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 3{,}47\underline{/6{,}85^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 9{,}0\underline{/0^\circ}$ A.

# Capítulo 12

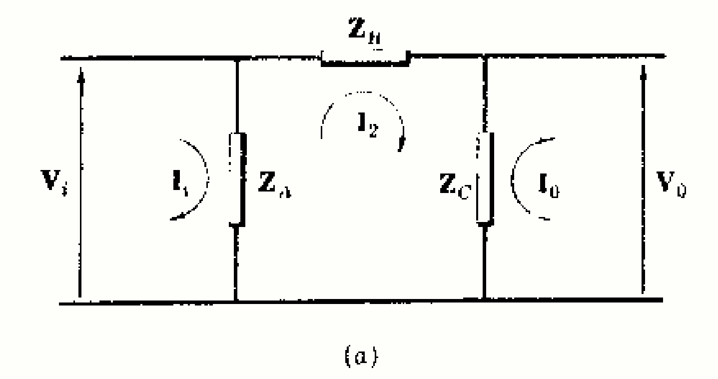
## Teoremas generales de circuitos

### INTRODUCCION

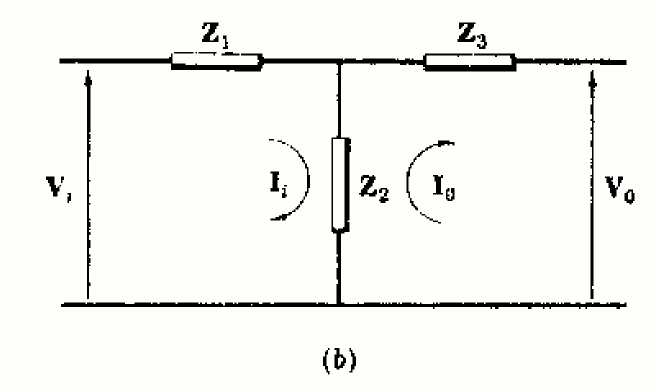
Los métodos de las corrientes en las mallas y de las tensiones en los nudos permiten resolver la mayor parte de los problemas de circuitos. El estudio de los teoremas de Thevenin y Norton en el Capítulo 11 ha demostrado también su eficacia en el ahorro de tiempo de los cálculos numéricos necesarios en el caso de que haya que conectar, separadamente, a un par de terminales diversas impedancias. Análogamente, los teoremas que van a estudiarse en este capítulo tienen como objeto simplificar la resolución de algunos tipos especiales de problemas de circuitos. Desde este punto de vista, puede considerarse este capítulo como una ampliación del Capítulo 11.

### TRANSFORMACION DE ESTRELLA-TRIANGULO (Y − Δ)

El circuito pasivo de tres terminales formado por las tres impedancias $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$, $\mathbf{Z}_C$, dispuestas en la forma representada en la Fig. 12-1(*a*), constituyen lo que se llama una conexión en triángulo (conexión-Δ). Se llama conexión en estrella (conexión-Y) al circuito pasivo de tres terminales formado por las tres impedancias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, conectadas en la forma representada en la Fig. 12-1(*b*). Los dos circuitos son equivalentes y sus respectivas impedancias de entrada, salida y transferencia son iguales.



(*a*)



(*b*)

Fig. 12-1

Sea $\mathbf{V}_i$ la tensión de entrada y $\mathbf{V}_0$ la correspondiente tensión de salida en cada uno de los circuitos. Elijamos la corriente de entrada, $\mathbf{I}_i$, y de salida, $\mathbf{I}_0$, con el sentido de las agujas del reloj en los dos circuitos y sea $\mathbf{I}_2$ la corriente en la malla central de la conexión-Δ, con el sentido marcado.

La forma matricial del sistema de ecuaciones en las corrientes de malla del circuito de conexión-Δ es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_A & -\mathbf{Z}_A & 0 \\ -\mathbf{Z}_A & \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C & -\mathbf{Z}_C \\ 0 & -\mathbf{Z}_C & \mathbf{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ 0 \\ -\mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

Las impedancias de entrada, salida y transferencia son

$$Z_{\text{entrada}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B}$$

$$Z_{\text{salida}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C}$$

$$Z_{\text{transferencia es}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = Z_B$$

El sistema de ecuaciones en las corrientes de malla del circuito con conexión-Y, Fig. 12-1(*b*), son

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

Las impedancias de entrada, salida y transferencia son

$$Z_{\text{entrada}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{\text{salida}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_{\text{transferencia es}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}$$

Igualando las impedancias de los circuitos en triángulo y en estrella se tiene,

$$\frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (1)$$

$$\frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1 + Z_2} \quad (2)$$

$$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2} \quad (3)$$

Sustituyendo en (*1*) y (*2*) la expresión de $Z_B$ en (*3*) y despejando $Z_A$ y $Z_C$ resulta

$$(4) \quad Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}, \qquad (5) \quad Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1}$$

Por consiguiente, la conexión en estrella de $Z_1$, $Z_2$ y $Z_3$ puede sustituirse por la conexión en triángulo de $Z_A$, $Z_B$ y $Z_C$, de acuerdo con las Ecuaciones (*3*), (*4*) y (*5*).

Para hacer la transformación de Δ a Y se suman las ecuaciones (*3*), (*4*) y (*5*) y se halla la inversa.

$$\frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{Z_1Z_2Z_3}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)^2} \quad (6)$$

Multiplicando ahora el primer miembro de (*6*) por $Z_AZ_B$ y el segundo miembro por las expresiones de $Z_A$ y $Z_B$ en (*4*) y (*3*),

$$\left(\frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C}\right) Z_A Z_B = \frac{Z_1Z_2Z_3}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)^2} \left(\frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}\right)\left(\frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}\right)$$

de donde

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Operando en forma análoga se pueden hallar las expresiones para $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ en función de $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$. Seguidamente presentamos una recapitulación de los resultados completos de las transformaciones estrella-triángulo e inversa.

**Transformación Y → Δ**

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}$$

**Transformación Δ → Y**

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

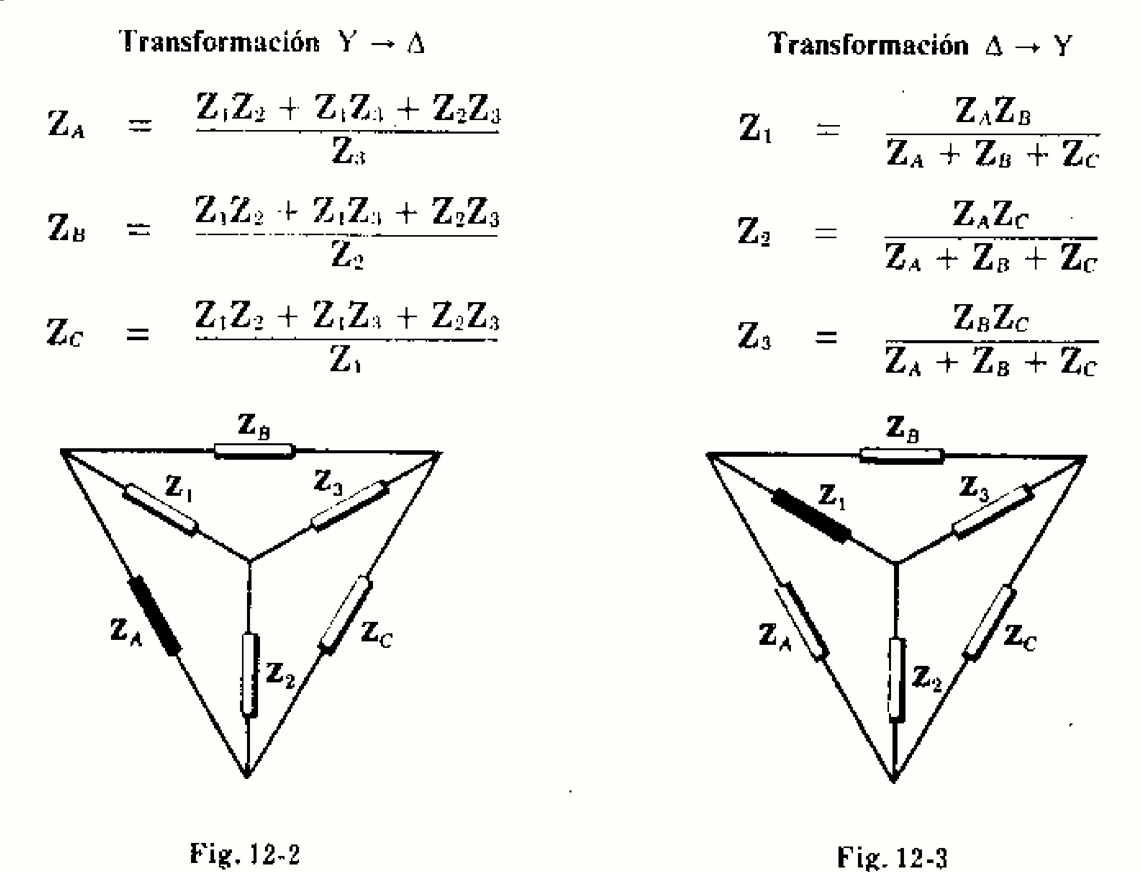



Fig. 12-2 Fig. 12-3

Para determinar las relaciones anteriores son útiles las siguientes reglas mnemotécnicas.

1. Transformación estrella-triángulo.
   Cualquier impedancia del circuito en Δ es igual a la suma de los productos de todos los pares posibles de impedancias Y dividida por la impedancia opuesta del circuito en Y.

   Así, por ejemplo, en la Fig. 12-2, $\mathbf{Z}_A$ viene dada por la suma de los tres productos binarios dividida por $\mathbf{Z}_3$, que es la impedancia opuesta del circuito Y.

2. Transformación triángulo-estrella.
   Cualquier impedancia del circuito en Y es igual al producto de las dos impedancias adyacentes del circuito en Δ dividido por la suma de las tres impedancias de dicho circuito.

   Así, por ejemplo, en la Fig. 12-3, $\mathbf{Z}_1$ viene dado por el producto $\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B$, impedancias Δ adyacentes, dividido por la suma de las tres impedancias del circuito Δ.

## TEOREMA DE SUPERPOSICION

El teorema de superposición establece que la respuesta en cualquier elemento de un circuito lineal bilateral que contenga dos o más fuentes es la suma de las respuestas obtenidas para cada una de las fuentes, actuando separadamente y con todas las demás fuentes iguales a cero.

Este principio de superposición estaba realmente implícito en los dos métodos de análisis por las corrientes en las mallas y las tensiones en los nudos. Dichas corrientes y las tensiones venían determinadas por cocientes de dos determinantes (véanse Capítulos 9 y 10). El desarrollo de los determinantes del denominador por los elementos de la columna que contiene las fuentes da lugar a ecuaciones del tipo siguiente:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + \mathbf{V}_2\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} + \mathbf{V}_3\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Z} + \cdots \tag{7}$$

y

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} + \mathbf{I}_2\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y} + \mathbf{I}_3\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y} + \cdots \tag{8}$$

Los términos de (*7*) son las intensidades componentes de la corriente de malla $\mathbf{I}_1$ debidas a las tensiones de alimentación $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, etc. Los términos de (*8*) son las componentes de la tensión de nudo $\mathbf{V}_1$ debidas a las corrientes de excitación $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, etc.

Si se eligen las corrientes en las mallas de manera que todas las fuentes estén en ramas no acopladas, los términos de (*7*) serán idénticos a las corrientes que resultarían si las fuentes actuasen separadamente. De forma análoga, si las fuentes de intensidad de un circuito que ha de resolverse por el método de los nudos tienen el mismo punto de retorno, tomando este punto como referencia, los términos de (*8*) serán idénticos a las tensiones que se tendrían en los nudos si cada fuente actuase separadamente.

El principio de superposición se aplica para determinar las corrientes y las tensiones en los nudos que están relacionados linealmente con las fuentes que actúan en el circuito. La potencia no se puede hallar por superposición, ya que la relación entre la potencia y la corriente o la tensión es cuadrática.

## TEOREMA DE RECIPROCIDAD

El teorema de reciprocidad establece que en un circuito lineal, bilateral, *con una sola fuente*, la relación de la excitación a la respuesta es constante al intercambiar las posiciones de excitación y respuesta.

El teorema se puede demostrar en el caso de corrientes en las mallas con una fuente única de tensión en el circuito, considerando la ecuación siguiente para la corriente de malla $\mathbf{I}_r$

$$\mathbf{I}_r \quad = \quad \mathbf{V}_1 \frac{\Delta_{1r}}{\Delta_z} + \mathbf{V}_2 \frac{\Delta_{2r}}{\Delta_z} + \cdots + \mathbf{V}_r \frac{\Delta_{rr}}{\Delta_z} + \mathbf{V}_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z} + \cdots$$

Sea $\mathbf{V}_s$ la única fuente en el circuito. Entonces,

$$\mathbf{I}_r \quad = \quad \mathbf{V}_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z}$$

El cociente de la excitación a la respuesta es

$$\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_r} \quad = \quad \frac{\Delta_z}{\Delta_{sr}} \quad = \quad \mathbf{Z}_{\text{transferencia } sr} \qquad (9)$$

Ahora bien, al cambiar las posiciones de la excitación y la respuesta, la fuente será $\mathbf{V}_r$ y la corriente $\mathbf{I}_s$.

$$\mathbf{I}_s \quad = \quad \mathbf{V}_r \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}$$

La relación excitación-respuesta es, ahora,

$$\frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{I}_s} \quad = \quad \frac{\Delta_z}{\Delta_{rs}} \quad = \quad \mathbf{Z}_{\text{transferencia } rs} \qquad (10)$$

Las dos impedancias de transferencia de (*9*) y (*10*) son iguales en todo circuito lineal bilateral, ya que en tales circuitos la matriz de impedancias $[\mathbf{Z}]$ es simétrica respecto de la diagonal principal y los adjuntos $\Delta_{sr}$ y $\Delta_{rs}$ son iguales. Por tanto, la corriente en la malla $r$ originada por una fuente de tensión en la malla $s$ es igual que la corriente en la malla $s$ cuando la fuente de tensión se traslada a la malla $r$. Debe observarse que *las corrientes en otras partes del circuito no se mantendrán iguales.*

El teorema de reciprocidad se aplica también a circuitos que contengan una sola fuente de intensidad. En este caso, el teorema establece que la tensión resultante en un par de terminales $m$ $n$ originada por una fuente de intensidad que actúa en los terminales $a$ $b$ es igual a la tensión en los terminales $a$ $b$ cuando la fuente se traslada a los terminales $m$ $n$. Debe observarse que *las tensiones en otros puntos del circuito no se mantendrán iguales.* (Véase Problema 12-9.)

## TEOREMA DE COMPENSACION

Una impedancia **Z** de un circuito, por la que circula una corriente de intensidad **I**, tiene una caída de tensión **ZI**. De acuerdo con el teorema de compensación, esta impedancia se puede sustituir por una f.e.m. de *compensación*, cuyo módulo y fase sean las de **ZI**. De igual modo, si la tensión en bornes de un elemento o rama de un circuito que contiene una impedancia **Z** es **V**, dicho elemento o rama se puede sustituir por una fuente de intensidad $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$. Las corrientes y tensiones en todas las demás partes del circuito permanecen invariables después de la sustitución de la fuente de compensación. El teorema de compensación recibe también el nombre de teorema de sustitución.

En la Fig. 12-4(*a*) una rama de un circuito contiene las impedancias $\mathbf{Z}_A$ y $\mathbf{Z}_B$. Si la corriente en esta rama es $\mathbf{I}_1$, la caída de tensión en $\mathbf{Z}_A$ es $\mathbf{Z}_A\mathbf{I}_1$ con la polaridad indicada. En la Fig. 12-4(*b*) puede verse la fuente de compensación $\mathbf{V}_c = \mathbf{Z}_A\mathbf{I}_1$ que sustituye a $\mathbf{Z}_A$. La polaridad de $\mathbf{V}_c$ ha de ser la señalada, puesto que la flecha convencional apunta hacia el terminal positivo.

Si en el circuito se produce un cambio cualquiera que afecte a $\mathbf{I}_1$, la fuente de compensación ha de variar en consonancia. Por esta razón, *la fuente de compensación* $\mathbf{V}_c$ *se denomina fuente dependiente.*

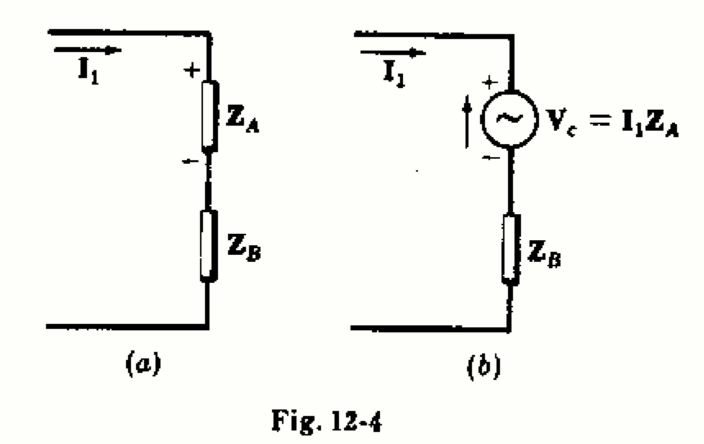


Fig. 12-4

El teorema de compensación es útil para determinar las variaciones de corriente y tensión en un elemento de un circuito cuando varía el valor de su impedancia. Esta aplicación se presenta en los circuitos puente y potenciométricos cuando una ligera variación en una impedancia da lugar a un desplazamiento de las condiciones de equilibrio.

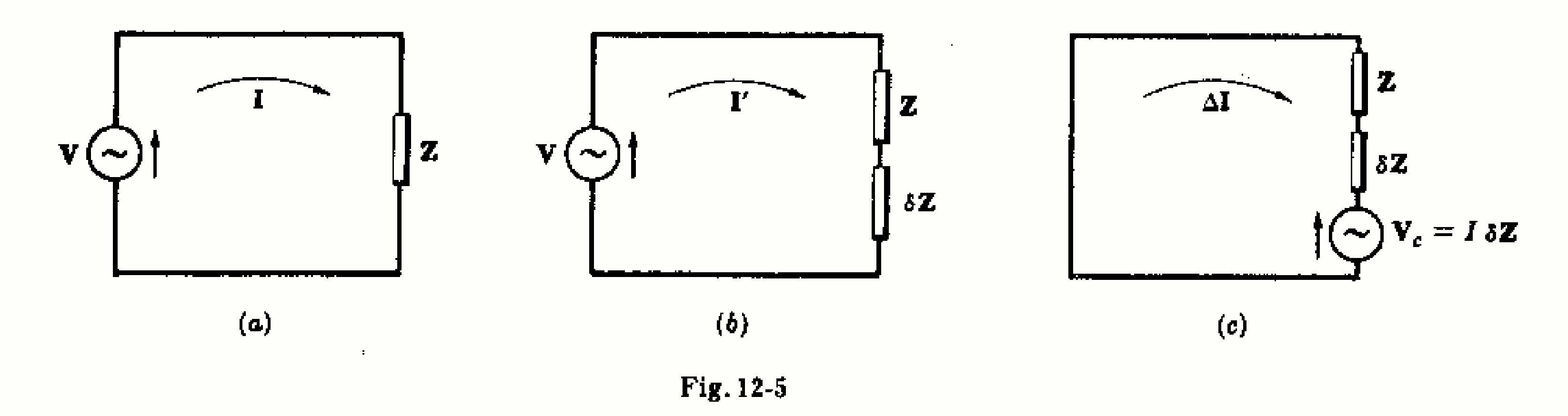


Fig. 12-5

En la Fig. 12-5(*a*) la fuente **V** aplicada a un circuito origina una corriente $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$. En la Fig. 12-5(*b*) la impedancia del circuito se ha modificado a $(\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z})$. Entonces, la intensidad de la corriente es $\mathbf{I}' = \mathbf{V}/(\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z})$. Ahora bien, una fuente de tensión de compensación $\mathbf{V}_c = (\delta\mathbf{Z})\mathbf{I}$, actuando en el circuito con las impedancias **Z** y $\delta\mathbf{Z}$ y *con la fuente original puesta igual a cero*, da lugar a la corriente $\Delta\mathbf{I}$ [Fig. 12-5(*c*)]. $\Delta\mathbf{I}$ es la variación de la corriente originada por la variación $\delta\mathbf{Z}$ en la impedancia del circuito. Por el teorema de superposición $\mathbf{I} + \Delta\mathbf{I} = \mathbf{I}'$ o bien $\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I}' - \mathbf{I}$.

**Ejemplo.**

En el circuito de la Fig. 12-6 se sustituye la impedancia $3 + j4$ por $5 + j5$, esto es, $\delta\mathbf{Z} = 2 + j1$. Determinar la variación de la intensidad de corriente por cálculo directo y comprobar el resultado aplicando el teorema de compensación.

Antes del cambio, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (50\underline{/0^\circ})/(5\underline{/53,1^\circ}) = 10\underline{/-53,1^\circ}$. Al añadir $\delta\mathbf{Z}$ al circuito, Fig. 12-7(*a*), se tiene

$$\mathbf{I}' = \mathbf{V}/(\mathbf{Z}+\delta\mathbf{Z}) = (50\underline{/0^\circ})/(5+j5) = 7{,}07\underline{/-45^\circ}$$

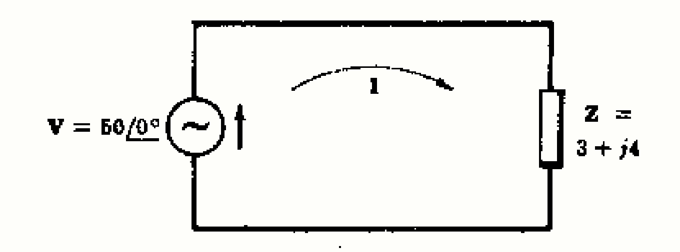
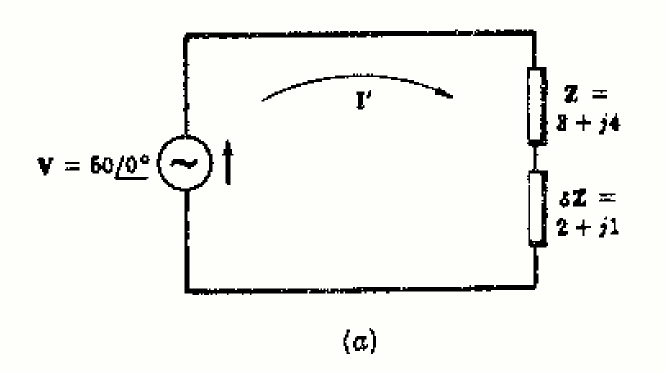


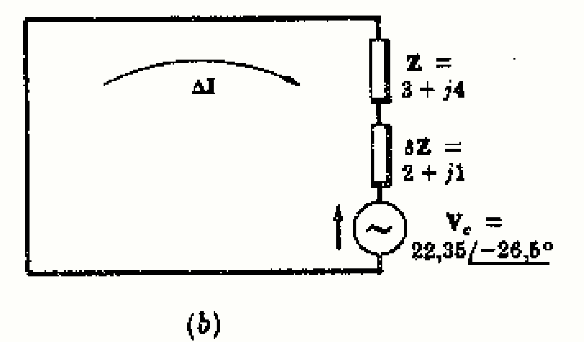
Fig. 12-6

La variación de corriente es

$$\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I}' - \mathbf{I} = (5 - j5) - (6 - j8) = -1 + j3 = 3{,}16\underline{/108{,}45^\circ}$$




(a)




(b)

Fig. 12-7

Aplicando el teorema de compensación, la fuente de compensación $\mathbf{V}_c = (\delta\mathbf{Z})\mathbf{I} = (2 + j1)(10\underline{/-53{,}1^\circ}) = 22{,}35\underline{/-26{,}5^\circ}$. Insertando la fuente en el circuito que contiene $\mathbf{Z}$ y $\delta\mathbf{Z}$ y haciendo igual a cero la fuente $50\underline{/0^\circ}$, Fig. 12-7(*b*), la variación de corriente será

$$\Delta\mathbf{I} = -\frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z}} = -\frac{22.35\underline{/-26.5^\circ}}{5 + j5} = 3.16\underline{/108{,}45^\circ}$$

Por consiguiente, cuando se cambia la impedancia de un circuito y se desea conocer el cambio correspondiente en la intensidad $\Delta\mathbf{I}$, se obtiene haciendo actuar la fuente de compensación $\mathbf{V}_c$ en el circuito, igualando a cero el resto.

## TEOREMAS DE TRANSFERENCIA DE LA POTENCIA MAXIMA

El siguiente teorema de transferencia de la potencia máxima determina el valor de las impedancias de carga que dan lugar a la transferencia de un máximo de potencia entre los terminales de un circuito activo.

Se considera una combinación en serie de una fuente y una impedancia compleja fija suministrando potencia a una carga formada por una resistencia variable o por una impedancia compleja también variable.

*Caso 1.* Carga: Resistencia variable $R_L$ (Figura 12-8).

La corriente en el circuito es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{(R_g + R_L) + jX_g}$$

$$I = |\mathbf{I}| = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}}$$

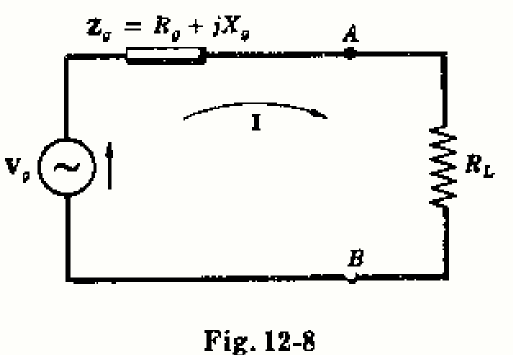



Fig. 12-8

La potencia suministrada a $R_L$ es, entonces,

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}$$

Para determinar el valor de $R_L$ para que la potencia transferida a la carga sea máxima, se hace la primera derivada $dP/dR_L$ igual a cero.

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{d}{dR_L}\left[\frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}\right] = V_g^2\left\{\frac{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2] - R_L(2)(R_g + R_L)}{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2]^2}\right\} = 0$$

o bien $$R_g^2 + 2R_gR_L + R_L^2 + X_g^2 - 2R_LR_g - 2R_L^2 = 0$$

y $$R_g^2 + X_g^2 = R_L^2$$

De donde
$$R_L = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} = |\mathbf{Z}_g|$$

En el caso de una resistencia pura variable se transmite la potencia máxima entre los terminales de un circuito activo cuando la resistencia de carga es igual al valor absoluto de la impedancia del circuito.

Si la componente reactiva de la impedancia en serie con la fuente es cero, o sea, $X_g = 0$, se transfiere la potencia máxima cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de la fuente, esto es, $R_L = R_g$.

*Caso 2.* Carga: Impedancia $\mathbf{Z}_L$ con resistencia y reactancia variables (Figura 12-9).

La corriente en el circuito es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{(R_g + R_L) + j(X_g + X_L)}$$

$$I = |\mathbf{I}| = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2}}$$

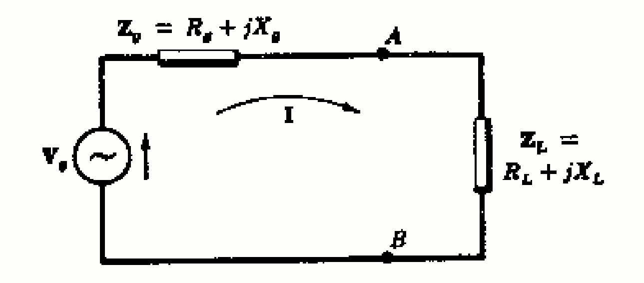



Fig. 12-9

La potencia suministrada por la fuente es

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2} \qquad (11)$$

Si $R_L$ en (*11*) se mantiene constante, el valor de $P$ es máximo cuando $X_g = -X_L$, con lo que la Ecuación (*11*) se convierte en

$$P = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2}$$

Consideremos ahora que $R_L$ es variable. Como se vio en el Caso 1, se suministra la potencia máxima a la carga cuando $R_L = R_g$. Si $R_L = R_g$ y $X_L = -X_g$, $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_g^*$.

Cuando la impedancia de carga está formada por una resistencia y una reactancia variables, la potencia transferida en los terminales del circuito activo es máxima si la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ es igual al complejo conjugado de la impedancia del circuito $\mathbf{Z}_g$.

*Caso 3.* Carga: Impedancia $\mathbf{Z}_L$ con resistencia variable y reactancia fija (Figura 12-10).

Con la condición $X_L$ constante se obtienen las mismas ecuaciones para la corriente $\mathbf{I}$ y para la potencia $P$ que en el Caso 2.

Igualando a cero la primera derivada de $P$ respecto de $R_L$, se deduce

$$R_L^2 = R_g^2 + (X_g + X_L)^2$$

y

$$R_L = |\mathbf{Z}_g + jX_L|$$

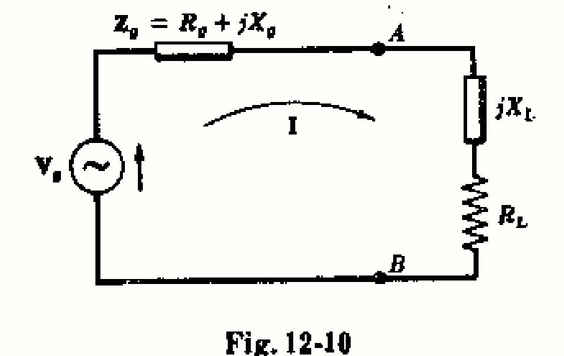



Fig. 12-10

Como $\mathbf{Z}_g$ y $X_L$ son magnitudes fijas se pueden combinar en una única impedancia. Entonces, con $R_L$ variable, el Caso 3 se reduce al Caso 1 y la potencia máxima se obtiene cuando $R_L$ es igual al valor absoluto de la impedancia del circuito.

# Problemas resueltos

**12-1** Determinar el circuito equivalente en triángulo para las impedancias conectadas en estrella de la Figura 12-11.

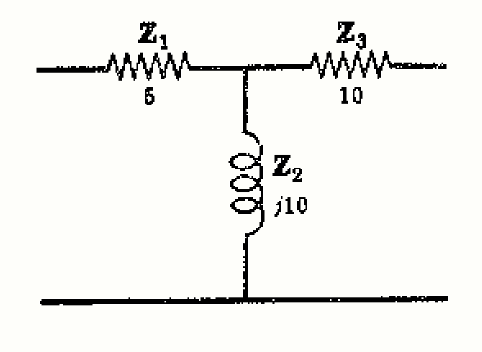



Fig. 12-11

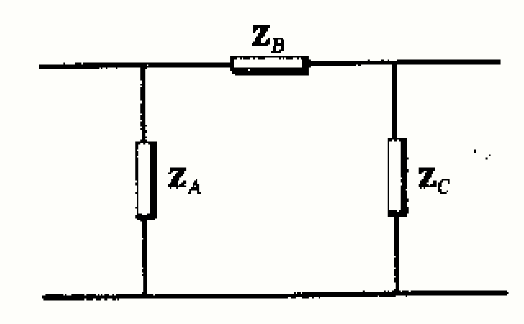



Fig. 12-12

El circuito Δ equivalente contendrá las impedancias $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$ en la forma representada en la Fig. 12-12. En estas condiciones,

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3} = \frac{5(j10) + 5(10) + 10(j10)}{10} = \frac{50 + j150}{10} = 5 + j15$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2} = \frac{50 + j150}{j10} = 15 - j5$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50 + j150}{5} = 10 + j30$$

Como comprobación se puede hacer la transformación inversa.

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(5 + j15)(15 - j5)}{5 + j15 + 15 - j5 + 10 + j30} = \frac{150 + j200}{30 + j40} = 5$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(5 + j15)(10 + j30)}{30 + j40} = j10$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(15 - j5)(10 + j30)}{30 + j40} = 10$$

**12-2** Una conexión Δ contiene tres impedancias iguales $\mathbf{Z}_\Delta = 15\angle 30^\circ$. Hallar las impedancias de la conexión Y equivalente.

$\mathbf{Z}_1 = \dfrac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$, siendo $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}_\Delta$. Por tanto, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_\Delta/3 = (15\angle 30^\circ)/3 = 5\angle 30^\circ$.

De igual forma, $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 5\angle 30^\circ$. Por consiguiente, cualquier circuito Δ con tres impedancias iguales tiene como equivalente un circuito en que las impedancias son la tercera parte de las del circuito Y.

Recíprocamente, cuando todas las impedancias de un circuito en Y son iguales, las del circuito equivalente en Δ son el triple de las del circuito Y.

**12-3** Demostrar que un circuito pasivo de varias mallas con tres terminales puede sustituirse por una conexión en Δ de tres impedancias.

Se aplica una tensión $\mathbf{V}_1$ a los terminales de la izquierda, como en la Fig. 12-13, y se designa por $\mathbf{I}_1$ a la corriente que entra en el circuito y de igual forma en los terminales de la derecha $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$. Como el circuito es pasivo, todas las demás tensiones de excitación son nulas.

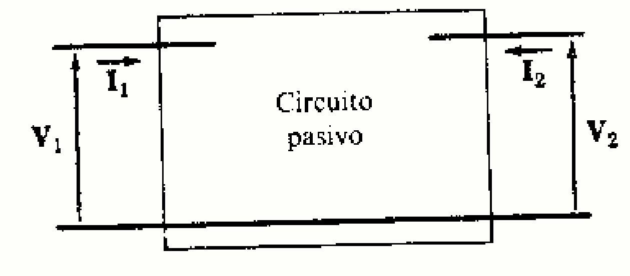



Fig. 12-13

El sistema de ecuaciones en las corrientes de malla en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & \dots & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde $$I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \quad \text{y} \quad I_2 = V_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$$

Expresando ahora estas dos ecuaciones simultáneas en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación es análoga a la que resulta de un circuito de tres nudos en el que se ha tomado uno de ellos como referencia. Un circuito de tal tipo es el de la Fig. 12-14, con $Z_A$, $Z_B$ y $Z_C$ en conexión Δ. Se insertan $V_1$, $I_1$, $V_2$ e $I_2$ con las mismas direcciones que en la Fig. 12-13, y escribiendo las correspondientes ecuaciones matriciales del método de las tensiones en los nudos se tiene

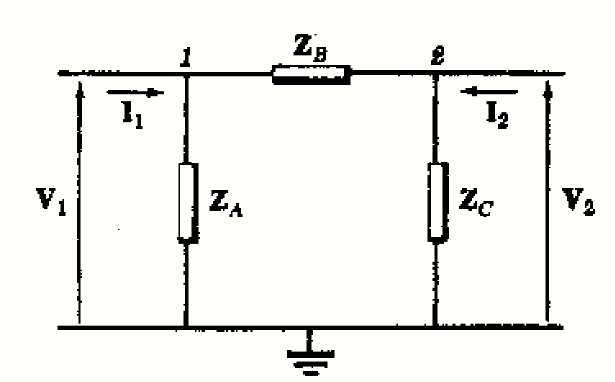


Fig. 12-14

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}\right) & -\frac{1}{Z_B} \\ -\frac{1}{Z_B} & \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes de las dos matrices de coeficientes,

$$(1)\ \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}\right) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}, \qquad (2)\ \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}, \qquad (3)\ -\frac{1}{Z_B} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

Sustituyendo (3) en (1) y (2) se obtiene

$$Z_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}}, \qquad Z_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}}, \qquad Z_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}}$$

Se ha visto, pues, cómo siempre es posible matemáticamente la transformación de un circuito de tres terminales en el circuito equivalente Y o Δ. Sin embargo, los elementos del circuito equivalente pueden no ser físicamente realizables. (Véase Problema 12-4.)

**12-4** Aplicar los resultados del Problema 12-3 al circuito representado en la Fig. 12-15 para obtener el circuito equivalente conectado en triángulo.

Eligiendo las corrientes en las mallas como se ve en el esquema,

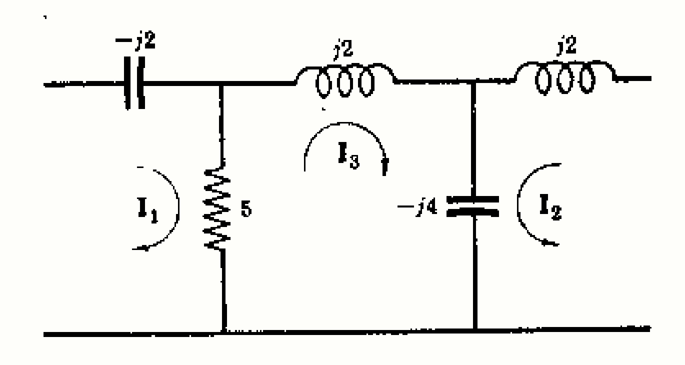


Fig. 12-15

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5-j2 & 0 & -5 \\ 0 & -j2 & -j4 \\ -5 & -j4 & 5-j2 \end{vmatrix} = 40 - j24 = 46{,}6\underline{/-31^\circ}$$

y

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -j2 & -j4 \\ -j4 & 5-j2 \end{vmatrix} = 12 - j10, \qquad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 5-j2 & -5 \\ -5 & 5-j2 \end{vmatrix} = -4 - j20,$$

$$\Delta_{21} = (-)\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -j4 & 5-j2 \end{vmatrix} = j20$$

Utilizando las expresiones del Problema 12-3,

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}+\Delta_{21}} = \frac{46{,}6\angle{-31^\circ}}{12 - j10 + j20} = 2{,}98\angle{-70{,}8^\circ}$$

$$\mathbf{Z}_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}} = -\frac{46{,}6\angle{-31^\circ}}{j20} = 2{,}33\angle{59^\circ}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22}+\Delta_{21}} = \frac{46{,}6\angle{-31^\circ}}{-4 - j20 + j20} = 11{,}65\angle{149^\circ}$$

Obsérvese que la impedancia $\mathbf{Z}_A$ puede realizarse con una resistencia y una reactancia capacitiva en serie, y $\mathbf{Z}_B$ con una resistencia y una reactancia inductiva en serie. Sin embargo, $\mathbf{Z}_C$ exigiría una resistencia negativa. Por tanto, no podría construirse el circuito calculado matemáticamente.

**12-5** Dado el circuito de la Fig. 12-16, determinar la corriente en la resistencia de 2 ohmios empleando el principio de superposición.

Sea $I'$ la corriente en la resistencia de 2 Ω debida a $V_1$ cuando se hace $V_2 = 0$, e $I''$ la corriente en la misma rama debida a $V_2$ cuando se hace $V_1 = 0$. Eligiendo las corrientes en las mallas como en la Fig. 12-16 y hallando $I'$ e $I''$,

$$I' = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & 5 & 0 \\ V_1 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{10\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 1{,}075 \text{ A}$$

$$I'' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -V_2 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = \frac{-(-20)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 2{,}48 \text{ A}$$

Aplicando el principio de superposición, la corriente $I_1$ debida a la acción simultánea de las dos fuentes es

$$I_1 = I' + I'' = 1{,}075 + 2{,}48 = 3{,}555 \text{ A}$$

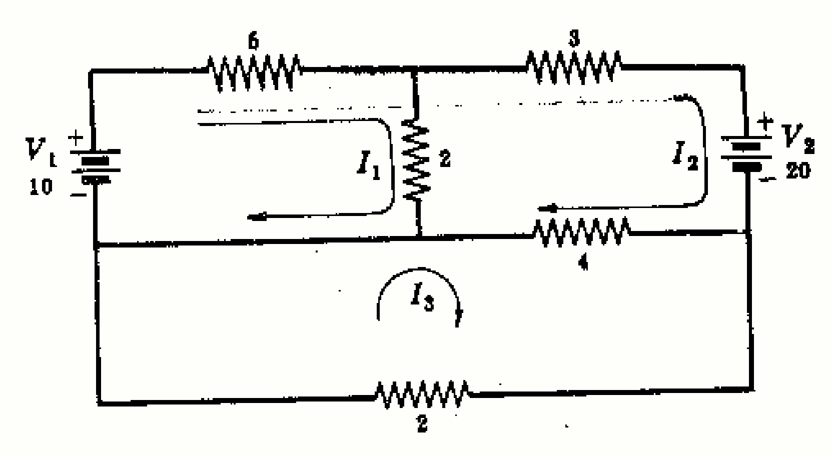



Fig. 12-16

**12-6** Aplicar el teorema de superposición al circuito de la Fig. 12-17 y obtener la intensidad por la impedancia de 3 + $j4$ ohmios.

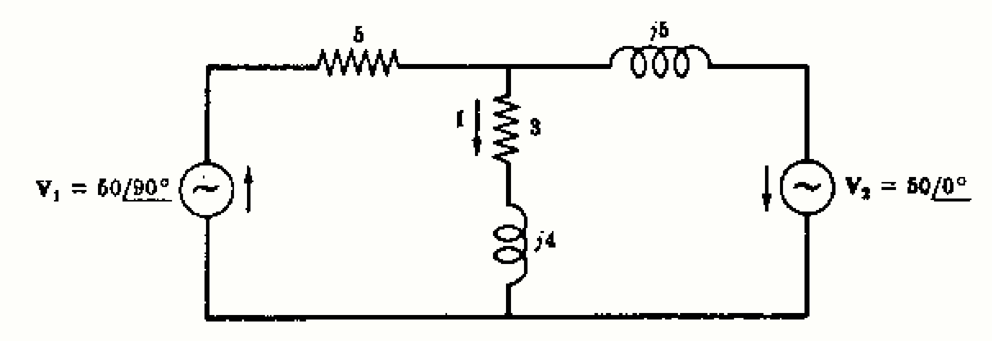



**Fig. 12-17**

Sea $\mathbf{V}_2 = 0$ y $\mathbf{V}_1$ la única fuente que hay en el circuito. Entonces,

$$\mathbf{Z}_{T_1} = 5 + \frac{(3+j4)j5}{3+j9} = 5{,}83 + j2{,}5 = 6{,}35\underline{/23{,}2^\circ}$$

y
$$\mathbf{I}_{T_1} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{T_1}} = \frac{50\underline{/90^\circ}}{6{,}35\underline{/23{,}2^\circ}} = 7{,}87\underline{/66{,}8^\circ}$$

La corriente en la rama de 3 + $j4$ Ω debida a $\mathbf{V}_1$ solamente es

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{T_1}\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 7{,}87\underline{/66{,}8^\circ}\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 4{,}15\underline{/85{,}3^\circ}$$

Haciendo ahora $\mathbf{V}_1 = 0$ y dejando como única fuente a $\mathbf{V}_2$,

$$\mathbf{Z}_{T_2} = j5 + \frac{5(3+j4)}{8+j4} = 2{,}5 + j6{,}25 = 6{,}74\underline{/68{,}2^\circ}$$

y
$$\mathbf{I}_{T_2} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_{T_2}} = \frac{50\underline{/0^\circ}}{6{,}74\underline{/68{,}2^\circ}} = 7{,}42\underline{/-68{,}2^\circ}$$

La corriente en la rama de 3 + $j4$ Ω debida solamente a $\mathbf{V}_2$ es

$$\mathbf{I}_2 = -(7{,}42\underline{/-68{,}2^\circ})\left(\frac{5}{8+j4}\right) = 4{,}15\underline{/85{,}3^\circ}$$

en la que el signo menos da a $\mathbf{I}_2$ el mismo sentido que la corriente $\mathbf{I}$ del diagrama.

La corriente total en la rama de 3 + $j4$ Ω es

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 4{,}15\underline{/85{,}3^\circ} + 4{,}15\underline{/85{,}3^\circ} = 8{,}30\underline{/85{,}3^\circ}$$

**12-7** Aplicar el teorema de superposición al circuito de la Fig. 12-18 para hallar la tensión $V_{AB}$.

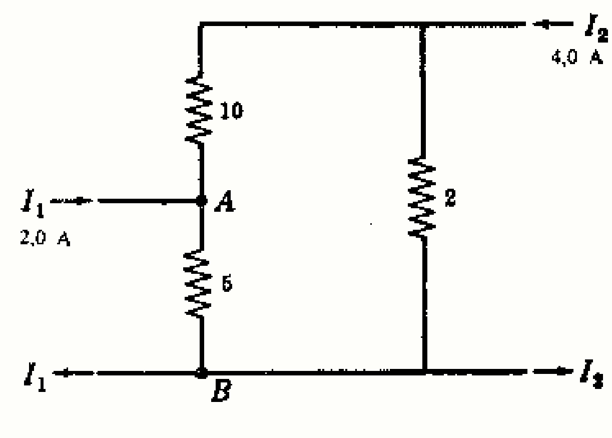



**Fig. 12-18**

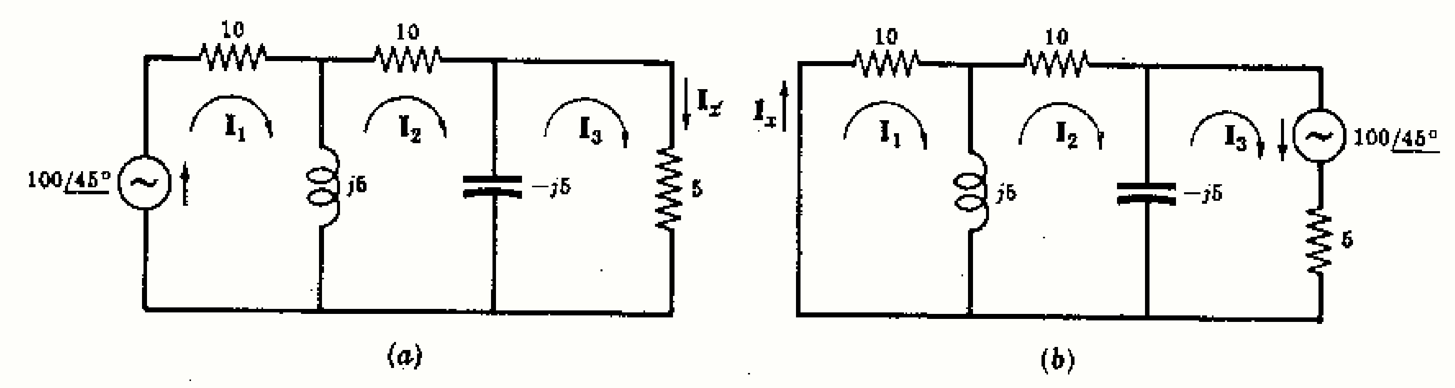
Si se supone que la fuente $I_1 = 2$ A actúa en el circuito y que $I_2 = 0$, $V'_{AB} = \frac{5(12)}{17}2 = 7{,}06$ V.

Si se hace ahora $I_1 = 0$ y actúa $I_2 = 4$ A en el circuito, la corriente en la resistencia de 5 Ω es $I_5 = 4(2/17) = 8/17$ A. La tensión será $V''_{AB} = 5(8/17) = 2{,}35$ V.

La tensión $V_{AB}$ aplicadas las dos fuentes es

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = 7{,}06 + 2{,}35 = 9{,}41 \text{ V}$$

**12-8** En el circuito de una sola fuente representado en la Fig. 12-19(*a*), la fuente de tensión $100\angle 45^\circ$ voltios origina una corriente $\mathbf{I}_x$ en la rama de 5 ohmios. Hallar $\mathbf{I}_x$ y comprobar, para este circuito, el teorema de reciprocidad.



(*a*) (*b*)

**Fig. 12-19**

Las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ se han señalado en la Fig. 12-19(*a*). La intensidad pedida $\mathbf{I}_x$ es la corriente $\mathbf{I}_3$.

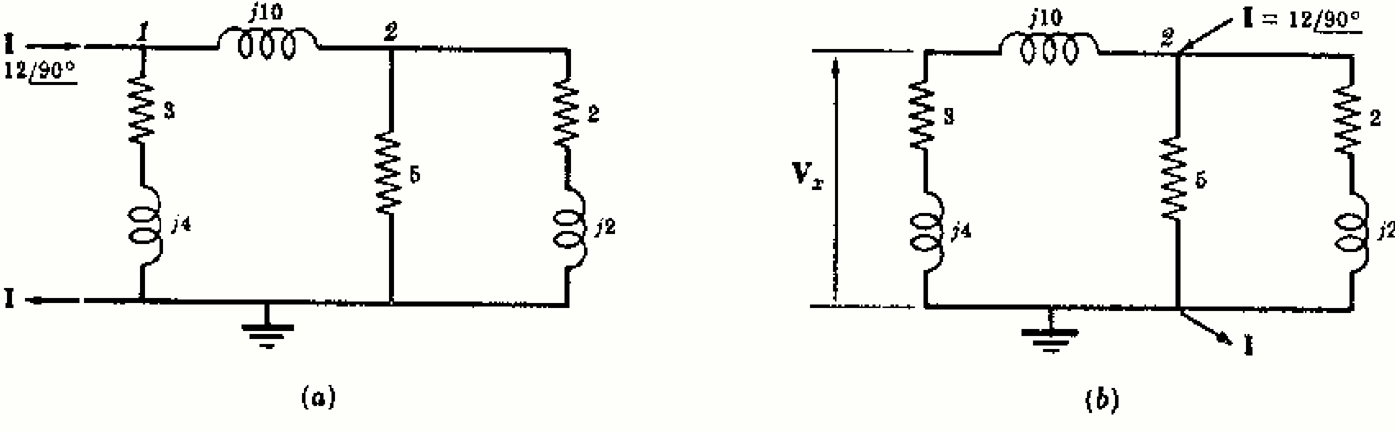
$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j5 & -j5 & 100\angle 45^\circ \\ -j5 & 10 & 0 \\ 0 & j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 10 & j5 \\ 0 & j5 & 5-j5 \end{vmatrix}} = 100\angle 45^\circ \left(\frac{25}{1155\angle -12{,}5^\circ}\right) = 2{,}16\angle 57{,}5^\circ \qquad (1)$$

Aplicando ahora el teorema de reciprocidad por intercambio de las posiciones de excitación y respuesta, Fig. 12-19(*b*), y empleando los sentidos a derechas, teniendo en cuenta que $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_1$.

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -j5 & 0 \\ 0 & 10 & j5 \\ 100\angle 45^\circ & j5 & 5-j5 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 100\angle 45^\circ \left(\frac{25}{1155\angle -12{,}5^\circ}\right) = 2{,}16\angle 57{,}5^\circ \qquad (2)$$

Comparando los resultados (*1*) y (*2*) se deduce que $\mathbf{I}_x$ es igual en ambas ecuaciones, quedando comprobado el teorema de reciprocidad.

**12-9** El circuito de la Fig. 12-20(*a*) contiene una sola fuente de intensidad $\mathbf{I} = 12\angle 90^\circ$ amperios. Determinar la tensión $\mathbf{V}_2$ en el nudo *2*. Aplicar el teorema de reciprocidad y comparar los resultados.



(*a*) (*b*)

**Fig. 12-20**

El sistema de ecuaciones nodales del circuito de la Fig. 12-20(*a*), escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3+j4}+\frac{1}{j10}\right) & -\frac{1}{j10} \\ -\frac{1}{j10} & \left(\frac{1}{j10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2+j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\angle 90^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}12 - j0{,}26 & 12\angle 90^\circ \\ j0{,}1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}12 - j0{,}26 & j0{,}1 \\ j0{,}1 & 0{,}45 - j0{,}35 \end{vmatrix}} = 12\angle 90^\circ \left(\frac{-j0{,}1}{0{,}161\angle 260{,}35^\circ}\right) = 7{,}45\angle 99{,}65^\circ$$

Utilizando el teorema de reciprocidad se aplica la corriente **I** entre el nudo *2* y el nudo de referencia en el circuito de la Fig. 12-20(*b*). Se calcula la tensión en los terminales por los que la fuente de intensidad alimentaba. Como solo hay dos nudos en este circuito, solo hace falta una ecuación nodal.

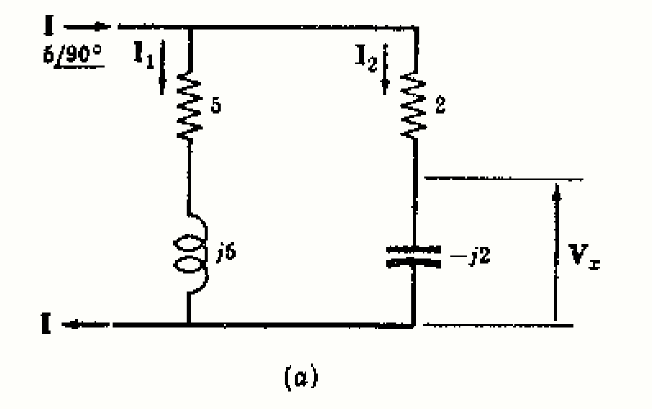
$$\left(\frac{1}{3+j14}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2+j2}\right)\mathbf{V}_2 = 12\angle 90^\circ \qquad \text{de donde} \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{12\angle 90^\circ}{0{,}563\angle -34{,}4^\circ} = 21{,}3\angle 124{,}4^\circ$$

Por tanto, la tensión $\mathbf{V}_x$ es

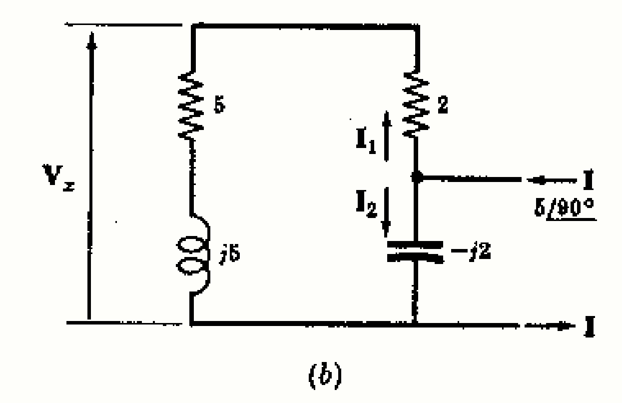
$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_2\left(\frac{3+j4}{3+j4+j10}\right) = 21{,}3\angle 124{,}4^\circ\left(\frac{3+j4}{3+j14}\right) = 7{,}46\angle 99{,}6^\circ$$

Comparando los valores calculados de $\mathbf{V}_2$ en el circuito de la Fig. 12-20(*a*) y $\mathbf{V}_x$ en el circuito de la Figura 12-20(*b*) vemos que son iguales, probándose así el teorema de reciprocidad. Obsérvese también que $\mathbf{V}_2$ no es la misma después del intercambio de las posiciones de excitación y respuesta.

**12-10** Determinar, en el circuito de una sola fuente de intensidad de la Fig. 12-21(*a*), la tensión $\mathbf{V}_x$. Intercambiar la fuente de intensidad y la tensión resultante $\mathbf{V}_x$. ¿Se verifica el teorema de reciprocidad?




(*a*)




(*b*)

**Fig. 12-21**

En la Fig. 12-21(*a*) $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}\left(\frac{5+j5}{7+j3}\right) = 5\angle 90^\circ\left(\frac{5+j5}{7+j3}\right) = 4{,}64\angle 111{,}8^\circ$. La tensión será, por tanto, $\mathbf{V}_x = (-j2)\mathbf{I}_2 = 4{,}64\angle 111{,}8^\circ\,(2\angle -90^\circ) = 9{,}28\angle 21{,}8^\circ$ V.

La fuente de intensidad **I** y los terminales en los que la tensión $\mathbf{V}_x$ se mide, se han intercambiado en la Fig. 12-21(*b*). Con esto, la corriente vale $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}\left(\frac{-j2}{7+j3}\right) = 5\angle 90^\circ\left(\frac{-j2}{7+j3}\right) = 1{,}31\angle -23{,}2^\circ$. Puesto que $\mathbf{V}_x = 1{,}31\angle -23{,}2^\circ\,(5+j5) = 9{,}27\angle 21{,}8^\circ$ V, como antes, ha quedado comprobado el teorema de reciprocidad.

**12-11** En el circuito de la Fig. 12-22(*a*) sustituir la reactancia $j4$ por una f.e.m. de compensación.

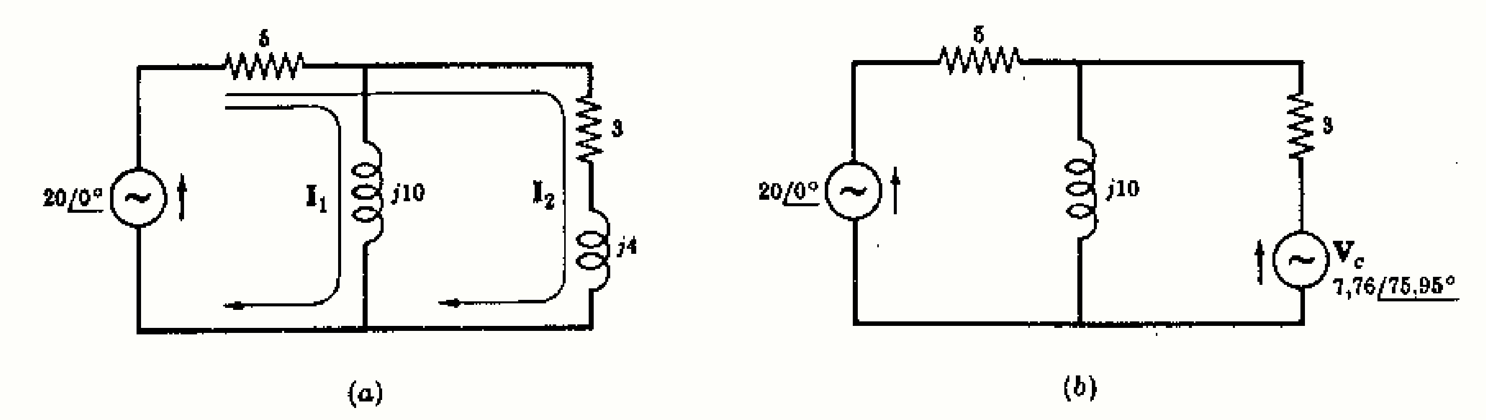



**Fig. 12-22**

Elegir las corrientes de malla $I_1$ e $I_2$ como en la figura y despejar $I_2$, intensidad de corriente en la reactancia $j4$.

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j10 & 20 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j10 & 5 \\ 5 & 8+j4 \end{vmatrix}} = \frac{20(j10)}{103\underline{/104,05^\circ}} = 1,94\underline{/-14,05^\circ}$$

La fuente de compensación $V_c = (j4)I_2 = (j4)1,94\underline{/-14,05^\circ} = 7,76\underline{/75,95^\circ}$. El circuito es el de la Figura 12-22(*b*) con la fuente de compensación en lugar de la reactancia $j4$. Para demostrar que son equivalentes ambos circuitos, puede hallarse una corriente en las ramas de cada circuito y comparar los resultados.

**12-12** Sustituir, en el circuito de la Fig. 12-23(*a*), la asociación en paralelo de las impedancias $j10$ y $3 + j4$ por una fuente de compensación.

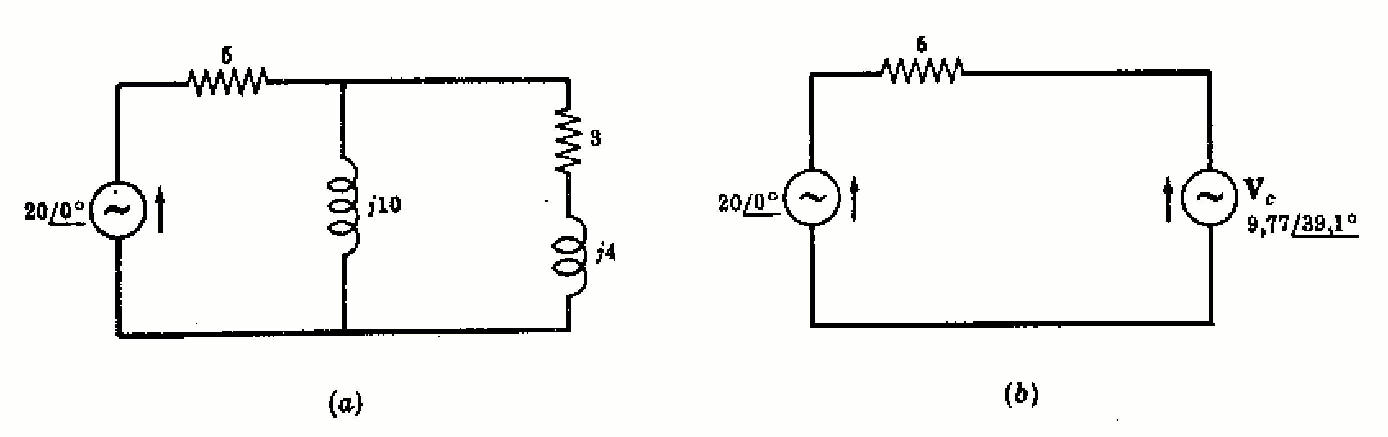



**Fig. 12-23**

La impedancia equivalente de las impedancias en paralelo es $Z_{eq} = \dfrac{j10(3+j4)}{3+j14} = 1,46 + j3,17 = 3,50\underline{/65,3^\circ}$. En consecuencia,

$$Z_T = 5 + 1,46 + j3,17 = 7,18\underline{/26,2^\circ} \quad \text{e} \quad I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{20\underline{/0^\circ}}{7,18\underline{/26,2^\circ}} = 2,79\underline{/-26,2^\circ}$$

La fuente de compensación será

$$V_c = Z_{eq}I_T = 2,79\underline{/-26,2^\circ}\,(3,50\underline{/65,3^\circ}) = 9,77\underline{/39,1^\circ}$$

El circuito, con la fuente de compensación correctamente polarizada, se ha representado en la Figura 12-23(*b*).

**12-13** Se cambia, en el circuito de la Fig. 12-24(*a*), la impedancia de $3 + j4$ ohmios por otra de $4 + j4$ ohmios, Fig. 12-24(*b*). Hallar la corriente por la resistencia de 10 ohmios antes y después de la sustitución. Aplicar, por último, el teorema de compensación para hallar la diferencia de las dos corrientes por dicha resistencia.

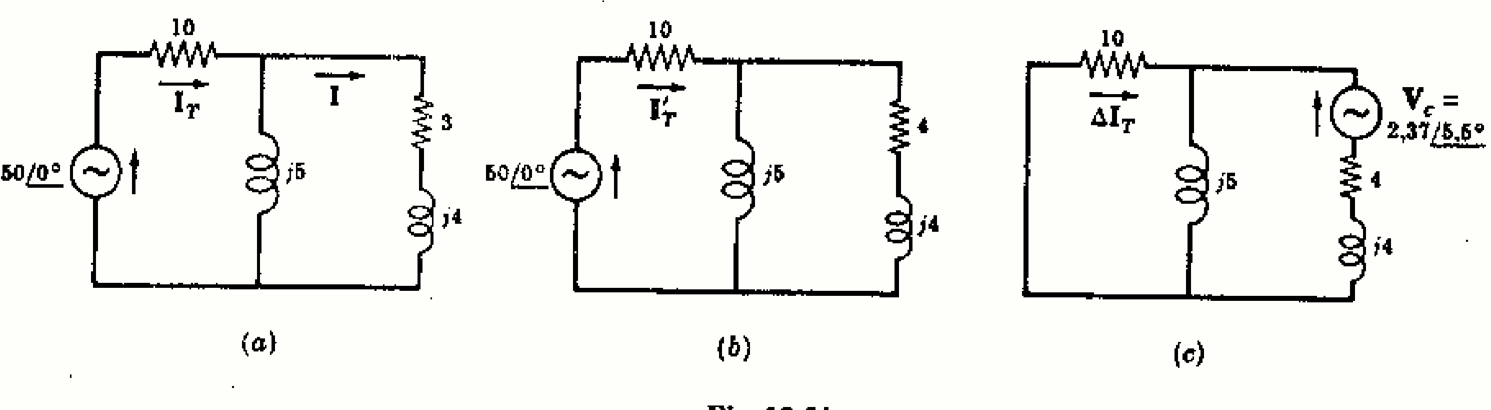



**Fig. 12-24**

Antes del cambio de la impedancia $3 + j4$ [Fig. 12-24(*a*)],

$$\mathbf{Z}_T = 10 + \frac{j5(3+j4)}{3+j9} = 11,1/\underline{13°} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{50/\underline{0°}}{11,1/\underline{13°}} = 4,50/\underline{-13°}$$

Después del cambio [Fig. 12-24(*b*)],

$$\mathbf{Z}'_T = 10 + \frac{j5(4+j4)}{4+j9} = 11,03 + j2,68 = 11,35/\underline{13,65°} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}'_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}'_T} = 4,41/\underline{-13,65°}$$

La fuente de tensión de compensación es $\mathbf{V}_c = (\delta\mathbf{Z})\mathbf{I}$, en la que $\mathbf{I}$ es la intensidad de corriente inicial en la rama $3 + j4$

$$\mathbf{I} \;=\; \mathbf{I}_T\left(\frac{j5}{3+j9}\right) \;=\; 4,5/\underline{-13°}\left(\frac{j5}{3+j9}\right) \;=\; 2,37/\underline{5,5°}$$

y $\delta\mathbf{Z}(4 + j4) - (3 + j4) = 1$. Entonces, $\mathbf{V}_c = (1)2,37/\underline{5,5°} = 2,37/\underline{5,5°}$ con sentido opuesto al de la corriente $\mathbf{I}$.

La variación de corriente $\Delta\mathbf{I}_T$ se halla igualando a cero la fuente inicial de tensión y dejando actuar como única fuente del circuito a $\mathbf{V}_c$, Fig. 12-24(*c*). Con ello, y para este circuito, se tiene $\mathbf{Z}''_T = 4 + j4 + \dfrac{j5(10)}{10+j5} = 10/\underline{53,1°}$ y

$$\Delta\mathbf{I}_T \;=\; -\left(\frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}_T}\right)\left(\frac{j5}{10+j5}\right) \;=\; -\left(\frac{2,37/\underline{5,5°}}{10/\underline{53,1°}}\right)\left(\frac{j5}{10+j5}\right) \;=\; 0,1055/\underline{195,8}$$

Comparando $\Delta I_T$ con la diferencia entre $I'_T$ e $I_T$

$$\mathbf{I}'_T - \mathbf{I}_T = (4,41/\underline{-13,65°}) - (4,50/\underline{-13°}) = -0,10 - j0,03 = 0,1045/\underline{196,7°}$$

Obsérvese que los dos valores de $\Delta\mathbf{I}_T$ no son exactamente iguales. El valor de $\Delta\mathbf{I}_T$ calculado utilizando la tensión de compensación $\mathbf{V}_c$ es más exacto que el calculado restando la corriente inicial $\mathbf{I}_T$ de $\mathbf{I}'_T$. Esto es cierto cuando la impedancia de carga es pequeña. Como se ha visto antes, ello da lugar a una variación pequeña de la corriente, introduciendo, por tanto, un error al calcular la diferencia de las dos magnitudes que son casi iguales.

**12-14** Calcular la variación de la intensidad de corriente en el circuito serie de la Fig. 12-25(*a*) al reducir el valor de la reactancia a $j35$.

Sean $\mathbf{I}$ e $\mathbf{I}'$ las corrientes respectivas en el circuito antes y después del cambio de reactancia, Figs. 12-25(*a*) y (*b*). Entonces,

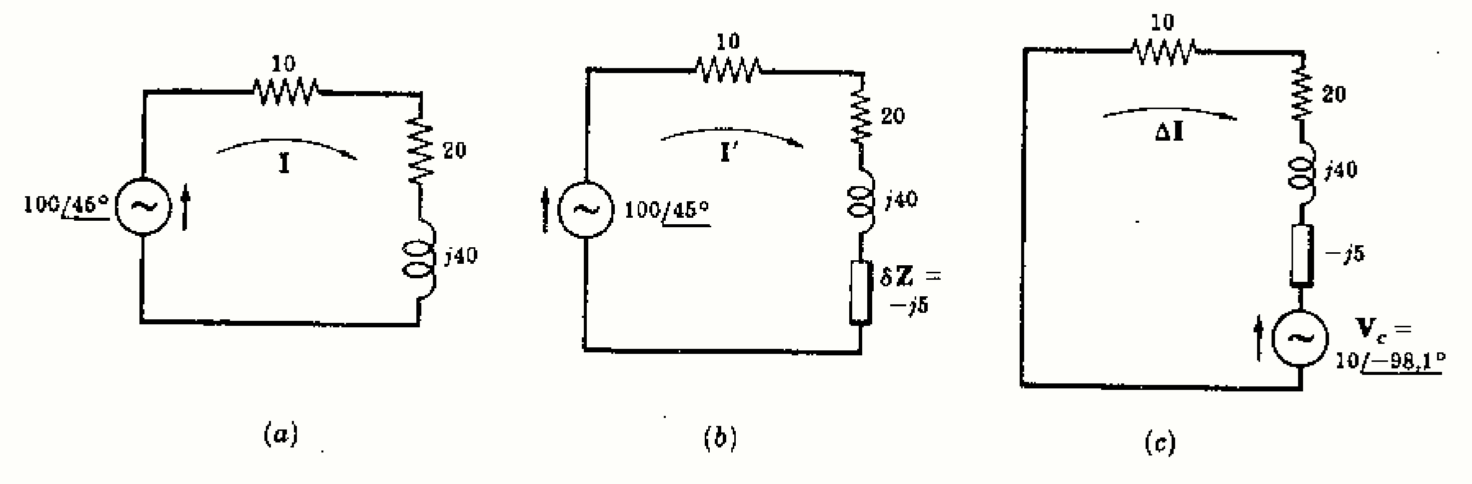



Fig. 12-25

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\angle 45^\circ}{50\angle 53{,}1^\circ} = 2{,}0\angle -8{,}1^\circ, \qquad \mathbf{I}' = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}+\delta\mathbf{Z}} = \frac{100\angle 45^\circ}{30+j35} = 2{,}17\angle -4{,}4^\circ$$

y
$$\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I}' - \mathbf{I} = 2{,}17\angle -4{,}4^\circ - 2{,}0\angle -8{,}1^\circ = 0{,}223\angle 31{,}6^\circ$$

Si se calcula $\Delta I$ mediante el teorema de compensación, se tiene $\mathbf{V}_c = (\delta\mathbf{Z})\mathbf{I} = (-j5)2{,}0\angle -8{,}1^\circ = 10\angle -98{,}1^\circ$ con el sentido de la Fig. 12-25(*c*). La variación de corriente es

$$\Delta\mathbf{I} = -\mathbf{V}_c/(\mathbf{Z}+\delta\mathbf{Z}) = -(10\angle -98{,}1^\circ)/(30+j35) = (10\angle 81{,}9^\circ)/(46{,}1\angle 49{,}4^\circ) = 0{,}217\angle 32{,}5^\circ$$

**12-15** En el circuito de la Fig. 12-26 la carga **Z** está formada por una resistencia pura $R_L$. Hallar el valor de $R_L$ para el cual la fuente suministra la potencia máxima a la carga. Calcular la potencia máxima $P$

La transferencia máxima de potencia tiene lugar cuando

$$R_L = |\mathbf{Z}_g| = |10 + j20| = 22{,}4\ \Omega$$

Ahora bien, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/(\mathbf{Z}_g + R) = (50\angle 0^\circ)/(10 + j20 + 22{,}4) = 1{,}31\angle -31{,}7^\circ$ y la potencia máxima suministrada a la carga es $P = R_L I^2 = (1{,}31)^2 22{,}4 = 38{,}5$ W.

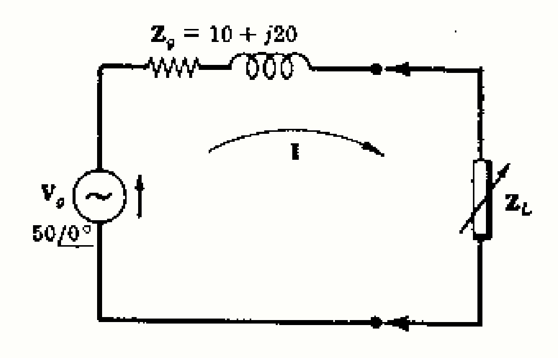



Fig. 12-26

**12-16** Si la carga en el circuito de la Fig. 12-26 es una impedancia compleja $\mathbf{Z}_L$, que es variable en $R_L$ y $X_L$, determinar el valor de $\mathbf{Z}_L$ que da lugar a la máxima transferencia de potencia. Calcular el valor de la potencia máxima.

La máxima transferencia tiene lugar cuando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_g^*$. Como $\mathbf{Z}_g = 10 + j20$, resulta $\mathbf{Z}_L = 10 - j20$.

La impedancia total del circuito es $\mathbf{Z}_T = (10 + j20) + (10 - j20) = 20$. Por tanto, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_T = (50\angle 0^\circ)/20 = 2{,}5\angle 0^\circ$ y $P = R_L I^2 = 10(2{,}5)^2 = 62{,}5$ W.

**12-17** En el circuito de la Fig. 12-27 la carga conectada entre los terminales $AB$ está formada por una resistencia variable $R_L$ y una reactancia capacitiva $X_C$ que varía entre 2 y 8 ohmios. Determinar los valores de $R_L$ y $X_C$ que dan lugar a la transferencia de la potencia máxima. Calcular la potencia máxima suministrada a la carga.

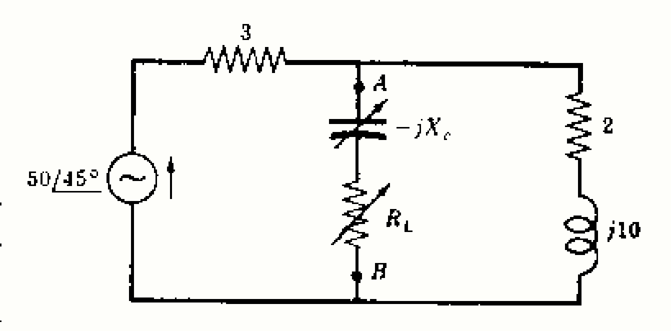



Fig. 12-27

La tensión equivalente de Thevenin, en los terminales $AB$, es $\mathbf{V}' = \dfrac{50\angle 45^\circ}{5 + j10}(2 + j10) = 45{,}6\angle 60{,}3^\circ$.
La impedancia del circuito activo conectado a los terminales $AB$ es $\mathbf{Z}' = 3(2 + j10)/(5 + j10) = 2{,}64 + j0{,}72$.

En el circuito dado, la transferencia de potencia máxima se produce con una impedancia $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}'^* = 2{,}64 - j0{,}72$. En las condiciones del problema, $X_C$ es ajustable entre 2 y 8 Ω. En consecuencia, el valor más próximo de $X_C$ es 2 Ω y

$$R_L = |\mathbf{Z}_g - jX_C| = |2{,}64 + j0{,}72 - j2| = |2{,}64 - j1{,}28| = 2{,}93\ \Omega$$

Ahora bien, $\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}_L = (2{,}64 + 2{,}93) + j(0{,}72 - 2) = 5{,}57 - j1{,}28 = 5{,}70\angle -13^\circ$, con lo cual

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{Z}_T} = \frac{45{,}6\angle 60{,}3^\circ}{5{,}70\angle -13^\circ} = 8{,}0\angle 73{,}3^\circ \quad \text{y} \quad P = R_L I^2 = 2{,}93(8{,}0)^2 = 187{,}5\ \text{W}$$

**12-18** En el circuito de la Fig. 12-28, $R_g$ es variable entre 2 y 55 ohmios. ¿Con qué valor de $R_g$ se obtiene la máxima transferencia de potencia a los terminales $AB$?

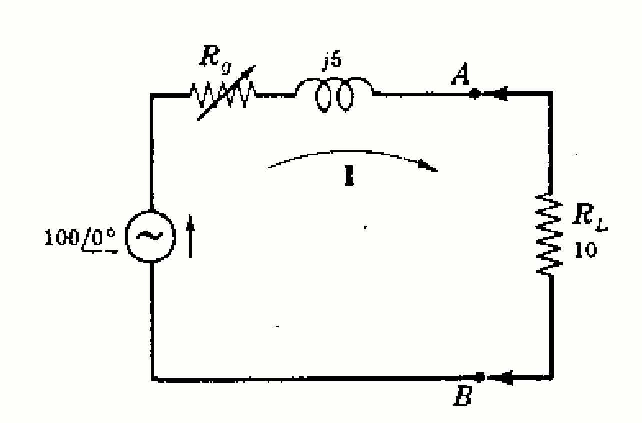


Fig. 12-28

En el circuito dado, la resistencia de carga $R_L$ es fija. Por tanto, *no son aplicables los teoremas de transferencia de la potencia máxima*. Es obvio que la corriente será máxima cuando $R_g$ sea mínima.

Poniendo, pues, $R_g = 2\ \Omega$,

$$\mathbf{Z}_T = (2 + j5 + 10) = 13\angle 22{,}6^\circ$$

e

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_T = 100\angle 0^\circ/(13\angle 22{,}6^\circ) = 7{,}7\angle -22{,}6^\circ$$

La potencia máxima es $P = 10(7{,}7)^2 = 593$ W.

# Problemas propuestos

**12-19** Obtener el equivalente en Y del circuito conectado en Δ de la Figura 12-29.
*Sol.* $(0{,}5 - j0{,}5)$, $(3 - j1)$, $(1 + j3)$.

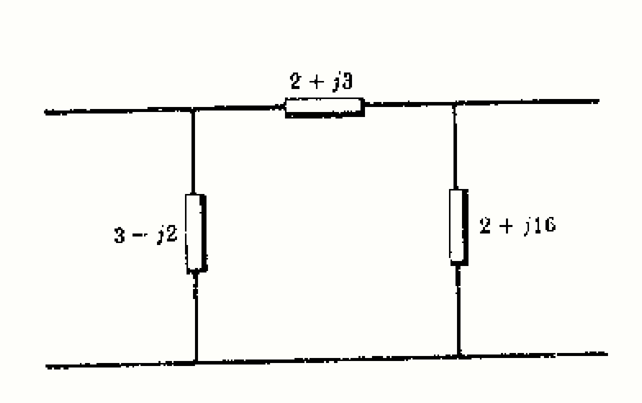


Fig. 12-29

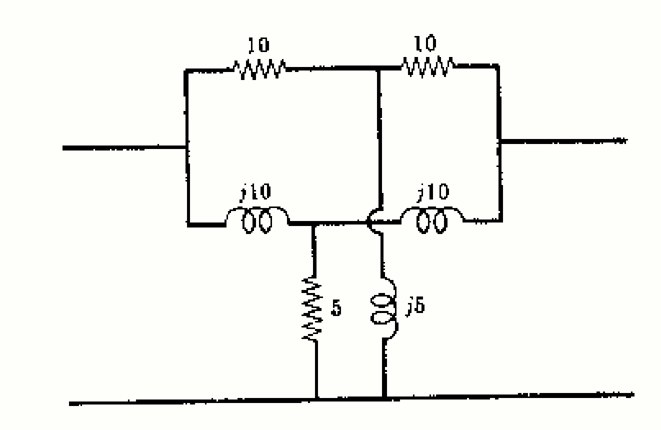


Fig. 12-30

**12-20** El circuito de la Fig. 12-30 está formado por dos circuitos en estrella asociados en paralelo. Obtener el circuito simple, con conexión en triángulo, equivalente. *Sol.* $(5 + j5)$, $\infty$, $(5 + j5)$.

**12-21** En la Fig. 12-31 un circuito equilibrado con conexión en Δ y $\mathbf{Z} = 10\underline{/30^\circ}$ está en paralelo con otro circuito en Y, equilibrado, con $\mathbf{Z} = 4\underline{/-45^\circ}$. Obtener el equivalente en Y. *Sol.* $\mathbf{Z} = 2{,}29\underline{/-3{,}5}$.

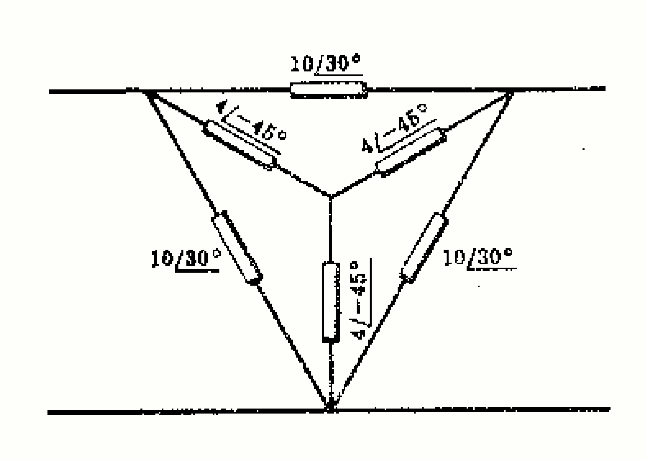



Fig. 12-31

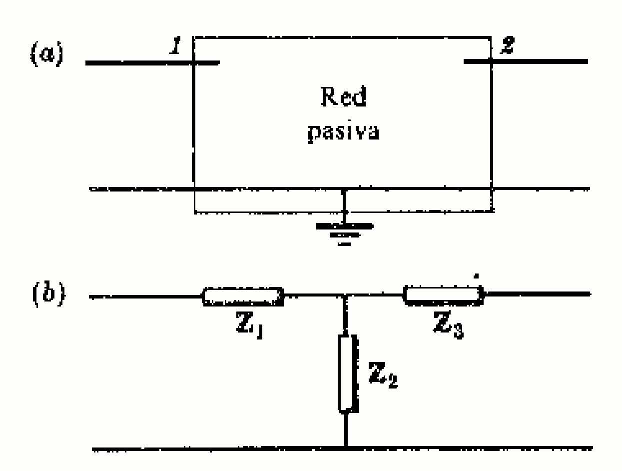



Fig. 12-32

**12-22** Demostrar que el circuito pasivo general de tres terminales de la Fig. 12-32(*a*) puede sustituirse por un circuito conectado en Y, como el de la Fig. 12-32(*b*), en el que $\mathbf{Z}_1 = (\Delta_{11} - \Delta_{12})/\Delta_Y$, $\mathbf{Z}_2 = \Delta_{12}/\Delta_Y$ y $\mathbf{Z}_3 = (\Delta_{22} - \Delta_{12})/\Delta_Y$. ($\Delta_Y$ y los adjuntos se refieren a las ecuaciones de las tensiones en los nudos en forma matricial.)

**12-23** Sustituir el circuito representado en la Fig. 12-33 por su conexión Y equivalente utilizando los métodos desarrollados en el Problema 12-22. *Sol.* $(12 + j1)$, $(-1 + j2)$, $(4 + j1)$.

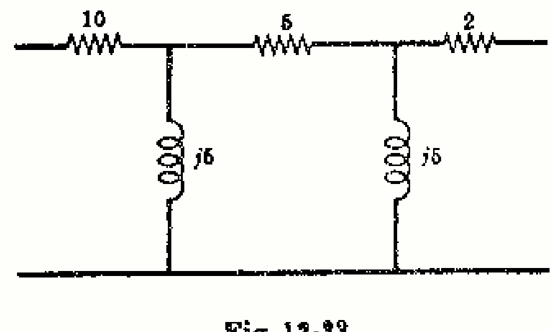



Fig. 12-33

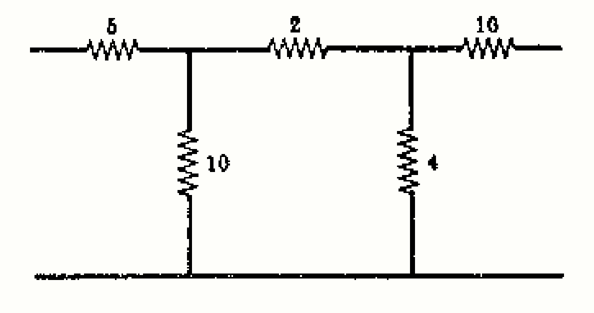



Fig. 12-34

**12-24** Obtener la conexión en Y de tres impedancias equivalentes al circuito de la Figura 12-34. *Sol.* 6,25; 2,5; 10,5.

**12-25** Hallar el circuito equivalente en triángulo del circuito de la Figura 12-34. *Sol.* 10,25; 43; 17,2.

**12-26** Hallar el circuito equivalente, conexión en Δ, del circuito de la Figura 12-35. *Sol.* $(3 - j2)$, $(2 + j3)$, $(2 + j16)$.

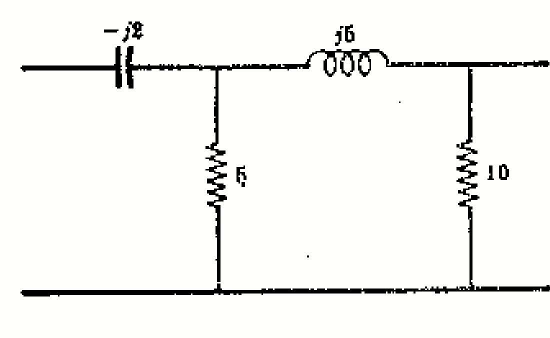



Fig. 12-35

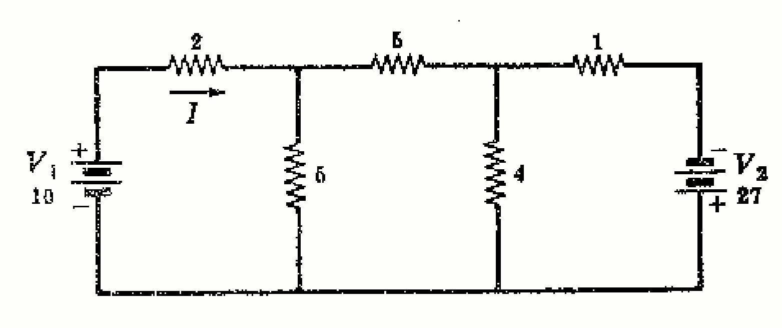



Fig. 12-36

**12-27** Determinar la corriente por la resistencia de 2 ohmios del circuito de la Fig. 12-36 utilizando el teorema de superposición. *Sol.* $I = 4{,}27$ A.

**12-28** En el circuito de la Fig. 12-36 se cambia la tensión de la fuente $V_2$ al valor 8,93 voltios, positivo en el terminal superior. Obtener la corriente por la resistencia de 2 ohmios aplicando el teorema de superposición.
*Sol.* $I = 1{,}43$ A.

**12-29** Obtener, en el circuito de la Fig. 12-37, la intensidad de corriente por la resistencia de 5 ohmios debida a cada una de las fuentes de tensión. *Sol.* 2,27 y 3,41 A.

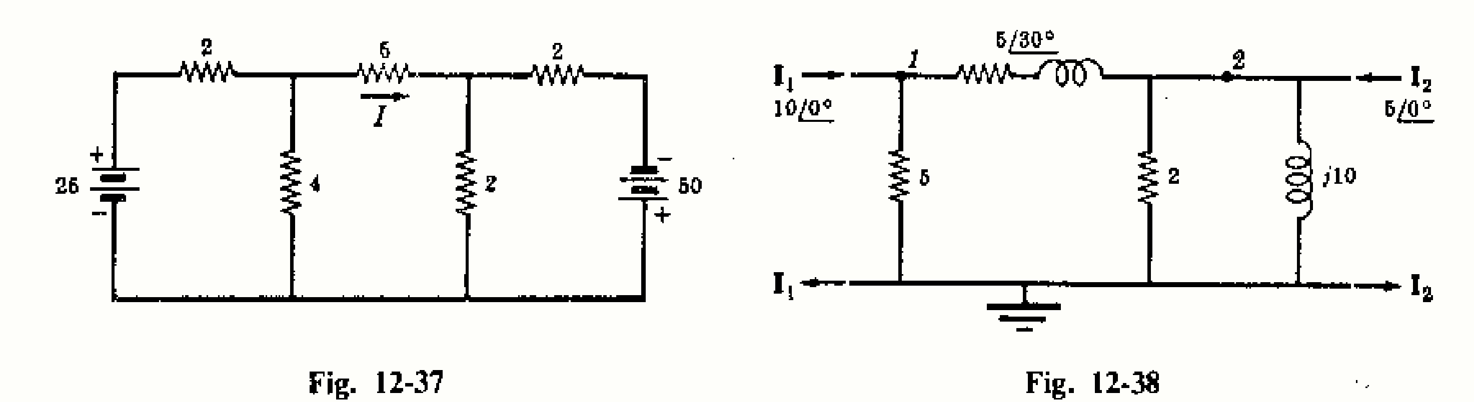



Fig. 12-37 Fig. 12-38

**12-30** En el circuito de la Fig. 12-38 determinar las componentes de la tensión del nudo $\mathbf{V}_2$ debidas a cada una de las fuentes de intensidad. *Sol.* $8{,}48\angle{-2{,}8^\circ}$ ; $8{,}20\angle{12{,}2^\circ}$ .

**12-31** Hallar, en el circuito representado en la Fig. 12-39, la intensidad de corriente por la resistencia de 4 ohmios debida a cada una de las fuentes de tensión. *Sol.* $3{,}24\angle{60{,}95^\circ}$ ; $6{,}16\angle{-142{,}2^\circ}$ .

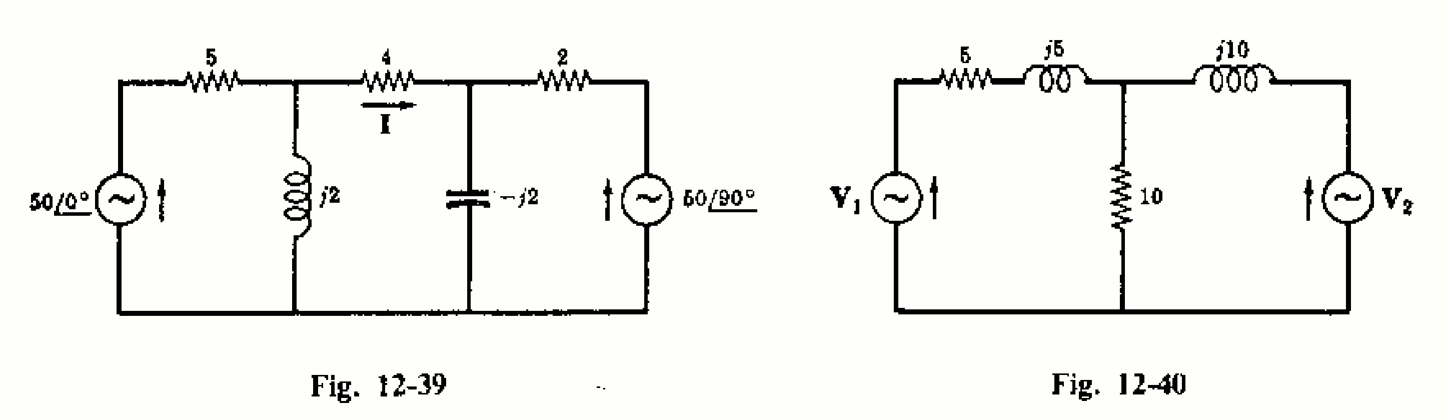



Fig. 12-39 Fig. 12-40

**12-32** Supóngase que en el circuito de la Fig. 12-40 las fuentes de tensión actúan por separado. Si las corrientes respectivas por la resistencia de 10 ohmios son iguales, ¿cuál es el valor de la relación $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$?
*Sol.* $0{,}707\angle{-45^\circ}$ .

**12-33** En el circuito de la Fig. 12-41 obtener las componentes de la tensión del nudo $\mathbf{V}_2$ originadas por cada una de las fuentes de intensidad $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. *Sol.* $5{,}82\angle{-5{,}5}$ ; $9{,}22\angle{72{,}9^\circ}$ .

**12-34** Con referencia al mismo circuito del problema anterior se ha cambiado la fuente de intensidad $\mathbf{I}_2$ al valor $3{,}16\angle{191{,}6^\circ}$ amperios. Determinar la tensión del nudo $\mathbf{V}_2$ por medio del teorema de superposición.

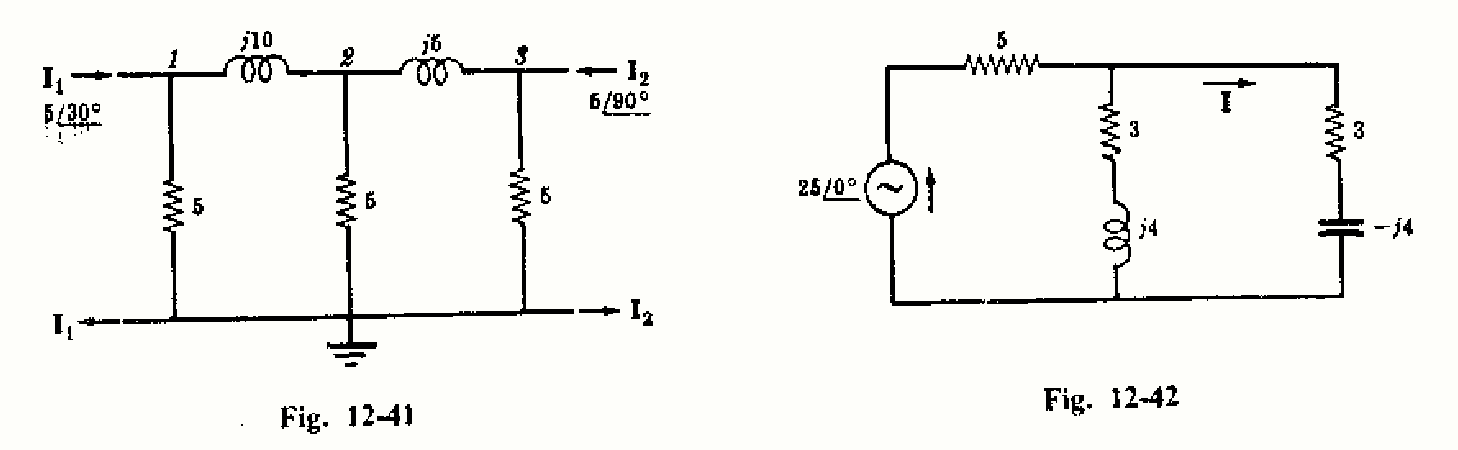



Fig. 12-41 Fig. 12-42

**12-35** Determinar, en el circuito de la Fig. 12-42, la intensidad de corriente **I** por la impedancia $3 - j4$ ohmios. Aplicar el teorema de reciprocidad y comparar las dos corrientes. *Sol.* $2{,}27\angle{53{,}2^\circ}$ .

**12-36** Hallar, en el circuito de la Fig. 12-43, la intensidad de corriente **I** por la impedancia $2 - j2$ ohmios. Aplicar el teorema de reciprocidad y comparar las dos corrientes. *Sol.* $10{,}1\underline{/129{,}1^\circ}$ A.

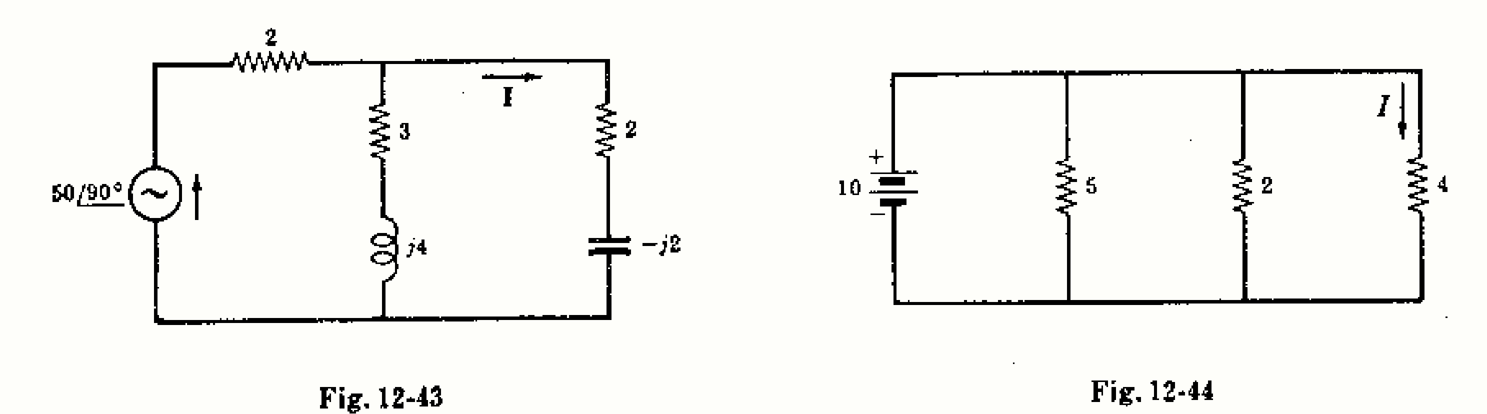



Fig. 12-43 Fig. 12-44

**12-37** Hallar la intensidad de corriente por la resistencia de 4 ohmios del circuito de la Fig. 12-44. Aplicar el teorema de reciprocidad y comparar las dos corrientes. ¿Qué cambio sufre la corriente en las ramas de 5 y 2 ohmios? *Sol.* 2,5 A. Después de aplicar el teorema de reciprocidad, las corrientes en las ramas de 2 y 5 Ω son cero. Previamente las intensidades eran 5 y 2 A, respectivamente.

**12-38** Determinar la intensidad de corriente por la resistencia de 5 ohmios del circuito de la Fig. 12-45. Aplicar el teorema de reciprocidad y comparar las dos corrientes. *Sol.* $0{,}270\underline{/53{,}75^\circ}$ A.

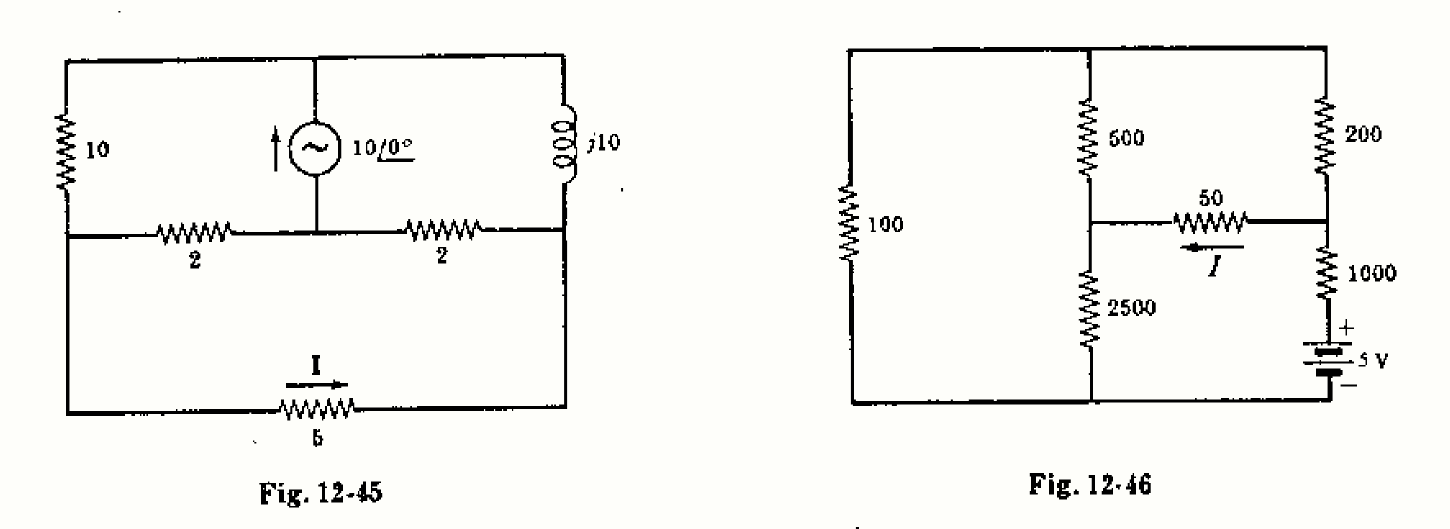



Fig. 12-45 Fig. 12-46

**12-39** Calcular, en el circuito de la Fig. 12-46, la intensidad de corriente *I* por la resistencia de 50 ohmios. Comprobar el teorema de reciprocidad por intercambio de la fuente de tensión y de la corriente resultante *I*. *Sol.* 1,32 mA.

**12-40** En el circuito de la Fig. 12-47 hallar la tensión $\mathbf{V}_x$. Aplicar después el teorema de reciprocidad y comparar las dos tensiones. *Sol.* $35\underline{/-12{,}1^\circ}$ V.

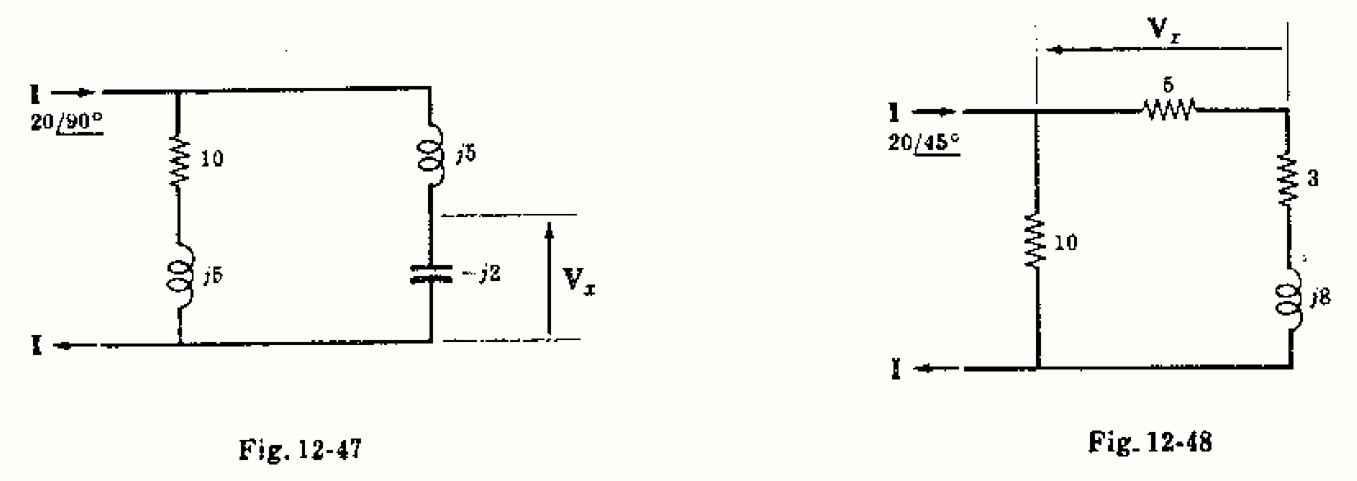



Fig. 12-47 Fig. 12-48

**12-41** Hallar el valor de $\mathbf{V}_x$ en el circuito de la Fig. 12-48. Comprobar después el teorema de reciprocidad. *Sol.* $50{,}8\underline{/21^\circ}$ V.

**12-42** En el circuito representado en la Fig. 12-49 determinar la tensión $\mathbf{V}_x$. Intercambiar la posición de la fuente de intensidad y la tensión $\mathbf{V}_x$ y comprobar el teorema de reciprocidad. *Sol.* $2{,}53\underline{/-162{,}3^\circ}$ V.

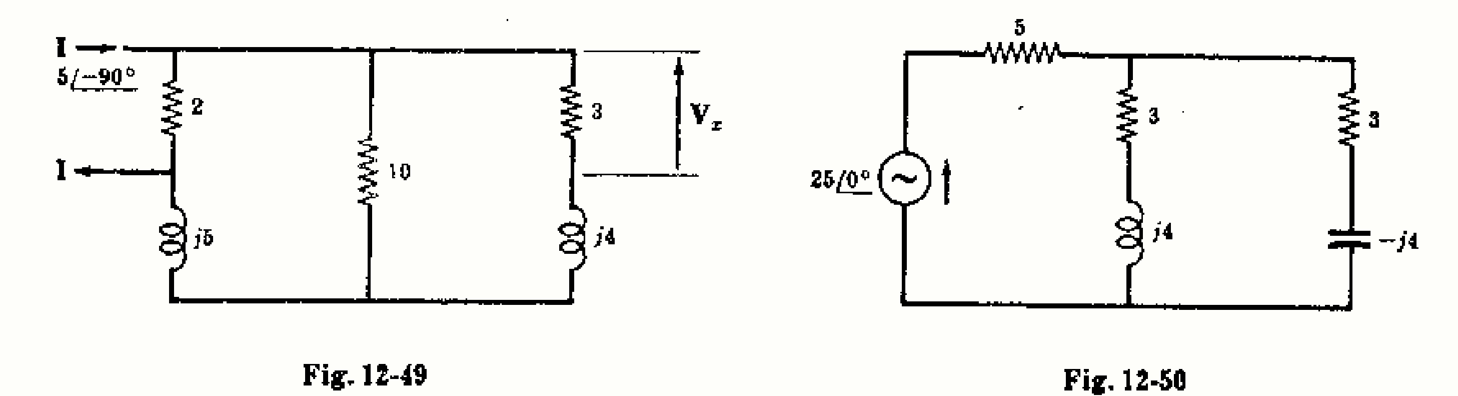



Fig. 12-49 Fig. 12-50

**12-43** Sustituir, en el circuito de la Fig. 12-50, las impedancias en paralelo $3 + j4$ y $3 - j4$ ohmios por una fuente de tensión de compensación. Como comprobación, hallar la intensidad de corriente por la resistencia de 5 ohmios antes y después de la sustitución. *Sol.* $\mathbf{V}_c = 11{,}35\underline{/0^\circ}$ V; $\mathbf{I} = 2{,}73\underline{/0^\circ}$ A.

**12-44** En el circuito de la Fig. 12-50 sustituir la resistencia de 5 ohmios por una fuente de tensión de compensación y hallar la corriente total desde la fuente de $25\underline{/0^\circ}$ antes y después de la sustitución.
*Sol.* $\mathbf{V}_c = 13{,}65\underline{/0^\circ}$ V; $\mathbf{I} = 2{,}73\underline{/0^\circ}$ A.

**12-45** Remplazar, en el circuito de la Fig. 12-51, cada una de las asociaciones de resistencias en paralelo por una fuente de tensión de compensación y hallar la salida total de corriente de la fuente de 50 voltios.
*Sol.* 11,35 V; 4,55 V; 3,41 A.

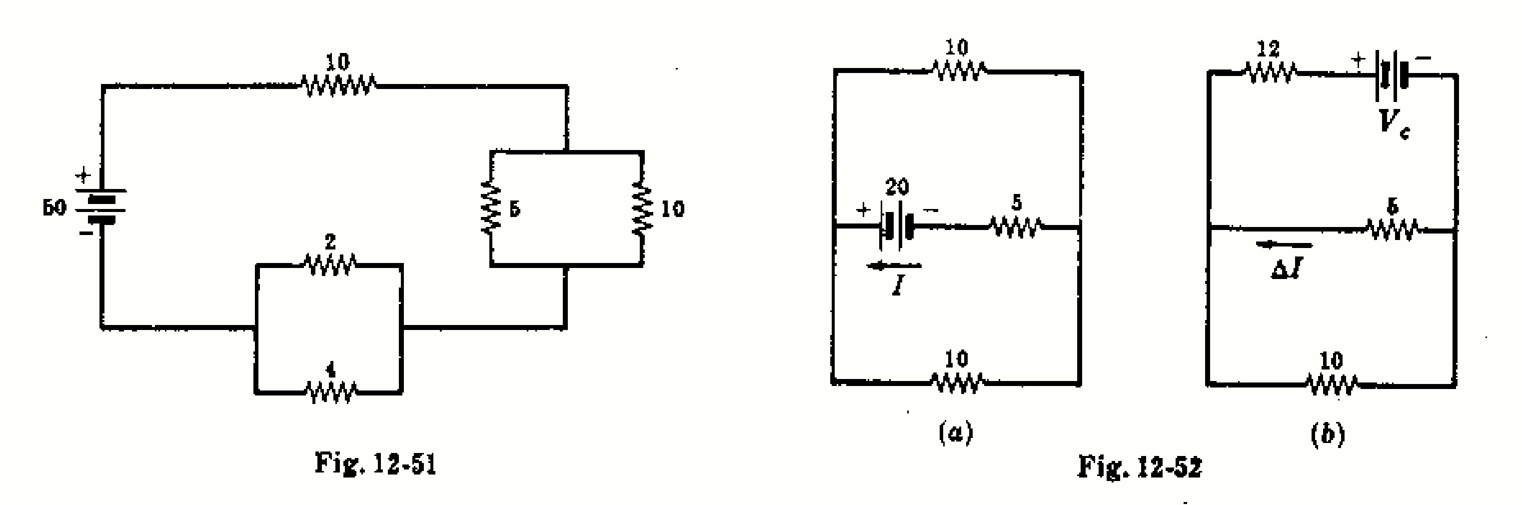



Fig. 12-51 Fig. 12-52

**12-46** En el circuito de la Fig. 12-52(*a*) la fuente de 20 voltios entrega una corriente $I$, como puede verse. Si la resistencia de 10 ohmios se cambia por otra de 12 ohmios, la intensidad suministrada por la fuente pasa a ser $I'$. Hallar la variación $\Delta I = (I' - I)$, mediante la fuente de tensión de compensación en la forma mostrada en la Figura 12-52(*b*). *Sol.* $\Delta I = -0{,}087$ A.

**12-47** En el circuito de la Fig. 12-53(*a*) se cambia la resistencia de 5 ohmios por otra de 8 ohmios. Determinar el cambio $\Delta\mathbf{I}$ que se origina en la corriente que pasa por la impedancia $3 + j4$ ohmios.
*Sol.* $0{,}271\underline{/159{,}5^\circ}$ A.

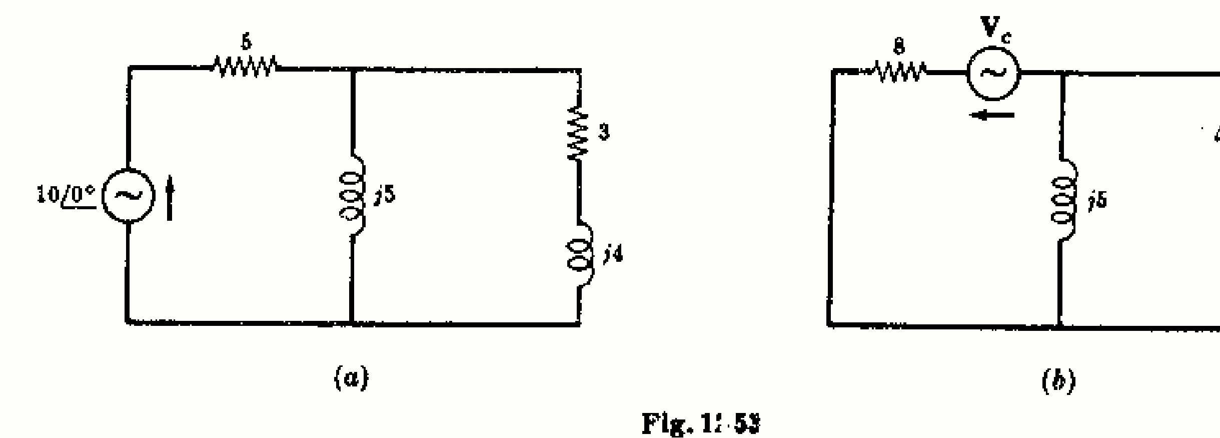
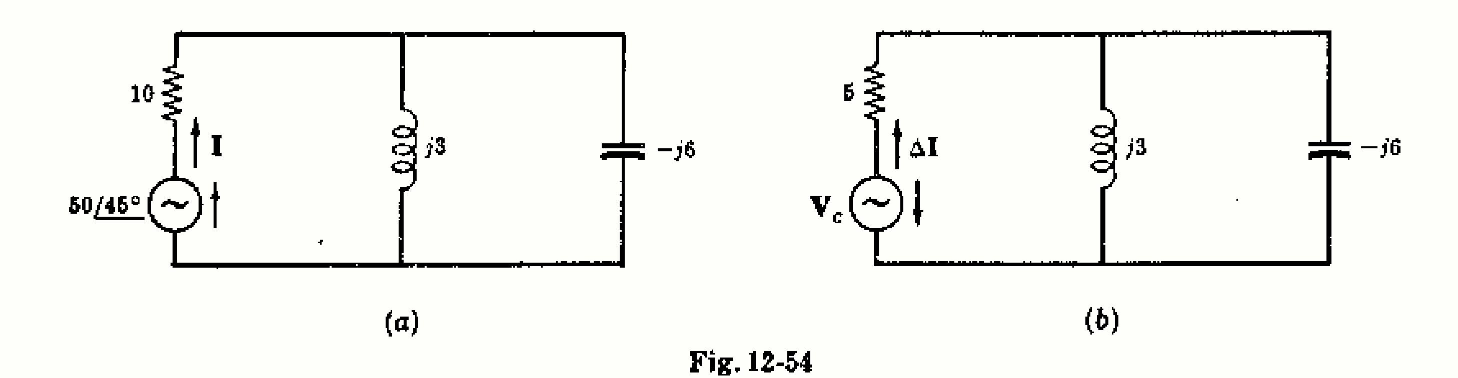



Fig. 12-53

**12-48** En el circuito de la Fig. 12-54($a$) la fuente de $50\underline{/45^\circ}$ voltios entrega una corriente $\mathbf{I}$. Se cambia la resistencia de 10 ohmios por otra de 5. Utilizar el teorema de compensación para determinar $\mathbf{V}_c$ e $\Delta\mathbf{I}$, Fig. 12-54($b$). *Sol.* $21{,}45\underline{/-166^\circ}$ V; $2{,}74\underline{/-36^\circ}$ A.




($a$) ($b$)

**Fig. 12-54**

**12-49** Hallar el valor de $R_L$ (Fig. 12-55) que da lugar a la transferencia de potencia máxima. Calcular el valor de la potencia máxima. *Sol.* 11,17 Ω; 309 W.

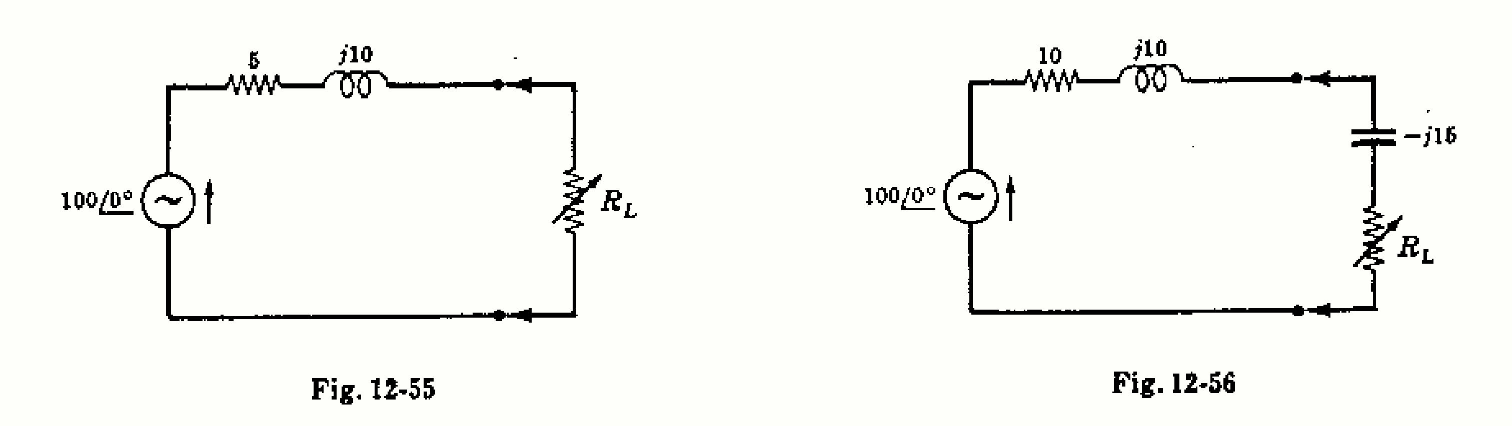



**Fig. 12-55** **Fig. 12-56**

**12-50** En el circuito de la Fig. 12-56 la carga está formada por una reactancia capacitiva fija de 15 ohmios y una resistencia variable $R_L$. Determinar ($a$) el valor de $R_L$ para el cual la potencia transferida es máxima, ($b$) el valor de la potencia máxima. *Sol.* ($a$) $R_L = 11{,}17$ Ω; ($b$) 236 W.

**12-51** En el circuito de la Fig. 12-57 actúan dos fuentes de tensión en la impedancia de carga conectada a los terminales $AB$. Si esta carga es variable, tanto en reactancia como en resistencia, ¿cuál será la carga $\mathbf{Z}_L$ que recibirá el máximo de potencia? ¿Cuál es el valor de esta potencia máxima? *Sol.* $(4{,}23 + j1{,}15)$ Ω; 5,68 W.

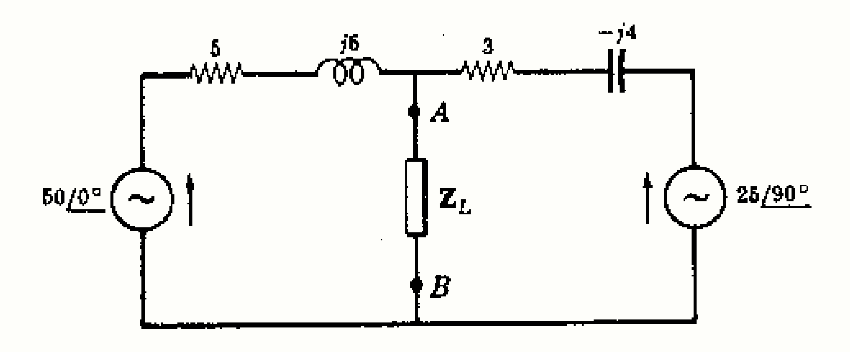



**Fig. 12-57**

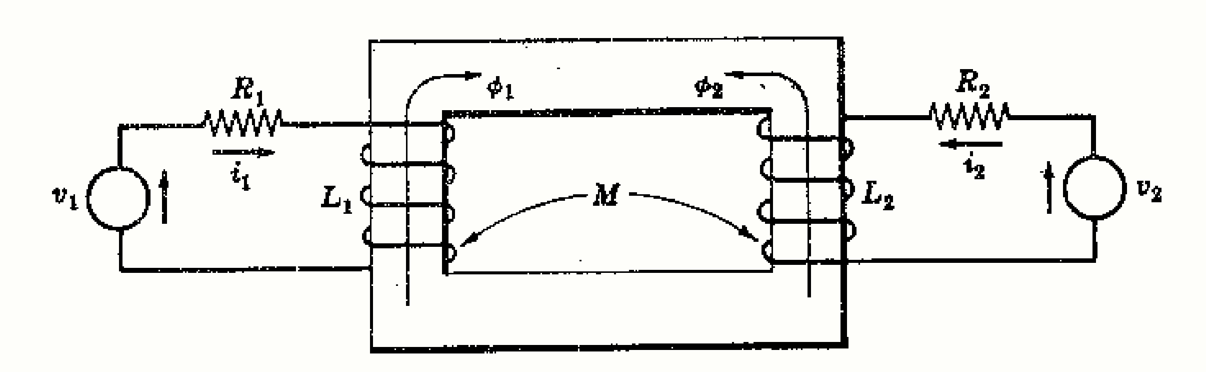



**Fig. 13-2**

Puesto que cada circuito tiene una fuente de tensión, se eligen las corrientes de malla $i_1$ e $i_2$ en la misma dirección que las fuentes, con lo que las dos ecuaciones de malla, deducidas de la segunda ley de Kirchhoff, son

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned} \qquad (10)$$

Las tensiones de inducción mutua pueden ser de una u otra polaridad, según el sentido del devanado. Para determinar los signos correctos en (*10*) se aplica la regla de la mano derecha a cada una de las bobinas: Si los dedos envuelven a la bobina en el sentido supuesto para la corriente, el dedo pulgar señala el sentido del flujo. Por consiguiente, los sentidos positivos de $\phi_1$ y $\phi_2$ son los señalados en la figura. *Si los flujos $\phi_1$ y $\phi_2$ debidos a las corrientes supuestas positivas tienen el mismo sentido, es decir, se ayudan, los signos de las tensiones de inducción mutua son iguales que los de las tensiones de autoinducciones.* En la Fig. 13-2, $\phi_1$ y $\phi_2$ se oponen mutuamente. Por tanto, el sistema de ecuaciones (*10*), con los signos correctos, es

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned} \qquad (11)$$

Suponiendo que las fuentes son senoidales, el sistema (*11*) en régimen permanente es

$$\begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_1 \\ -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_2 \end{aligned} \qquad (12)$$

Recordando el sistema general de ecuaciones en las corrientes de malla (Capítulo 9) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_1 \\ \pm\mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

Se vio que $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$ era la copedancia o impedancia común a las dos mallas de corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. El acoplo de mallas es de tipo conductivo, ya que las corrientes pasan por una rama común. Ahora, en el circuito de la Fig. 13-2, se tiene un sistema de ecuaciones análogo, correspondiendo $j\omega M$ a $\mathbf{Z}_{12}$ y $\mathbf{Z}_{21}$ en las Ecuaciones (*13*). Las mallas no están acopladas conductivamente, ya que las dos corrientes no circulan por una impedancia común. Sin embargo, las ecuaciones indican que existe un acoplamiento. En tales casos, el *acoplo* se llama *mutuo o magnético*.

## CORRIENTE NATURAL

En la sección anterior se ha analizado un circuito de dos mallas con un acoplo mutuo y sendas fuentes de tensión, en donde se ha supuesto unos sentidos de circulación de corrientes. A veces, es necesario estudiar la corriente natural que circula por una malla que carezca de fuentes de tensión. El sentido de la corriente viene dado por la ley de Lenz.

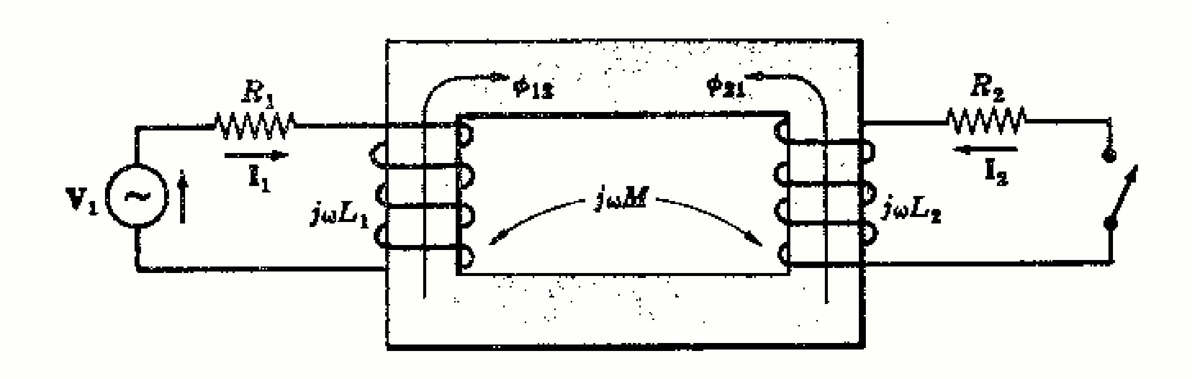



Fig. 13-3

Consideremos el circuito de la Fig. 13-3 en que solo existe una fuente de tensión en la malla 1. Se elige la corriente $\mathbf{I}_1$ de acuerdo con la fuente $\mathbf{V}_1$ y aplicando la regla de la mano derecha se determina el sentido del flujo $\phi_{12}$. Ahora bien, la ley de Lenz establece que la polaridad de la tensión inducida debe ser tal que si se cierra el circuito circula por la bobina una corriente de manera que el flujo que origina se opone al flujo principal creado por la corriente $\mathbf{I}_1$. Por tanto, al cerrar el interruptor en la Fig. 13-3 el sentido del flujo $\phi_{21}$ será, de acuerdo con la ley de Lenz, el señalado en la misma. Si ahora se aplica la regla de la mano derecha con el dedo pulgar señalando en el sentido de $\phi_{21}$, los dedos envolverán la bobina 2 en el sentido de la *corriente natural*. El sistema de ecuaciones en las corrientes de malla es

$$\begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 \; - \; j\omega M\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_1 \\ -j\omega M\mathbf{I}_1 \; + \; (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Como la malla 2 carece de fuente de tensión, se deduce que la corriente natural $\mathbf{I}_2$ resulta de la tensión en la inducción mutua $(R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 = (j\omega M\mathbf{I}_1)$. En la Fig. 13-4 se representa esta tensión como si fuera una fuente. El sentido de ésta debe ser el señalado por la flecha para el sentido positivo de $\mathbf{I}_2$. En consecuencia, *la polaridad instantánea de la tensión en la inducción mutua en la bobina 2 es positiva en el terminal por el que la corriente natural sale de la bobina.*

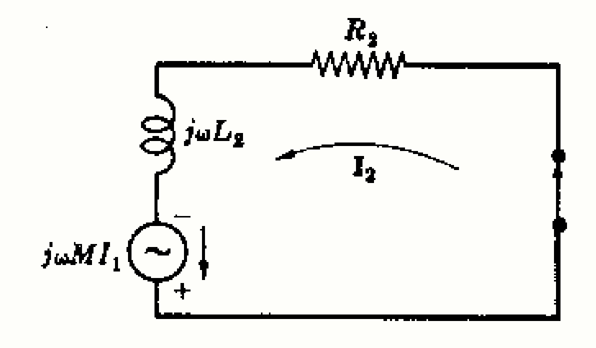



Fig. 13-4

## REGLA DE LOS PUNTOS PARA BOBINAS CON ACOPLO MAGNETICO

La polaridad relativa en el caso de tensiones de inducción mutua se puede determinar partiendo de esquemas del núcleo en que se vean los sentidos del devanado, pero éste no es un método práctico. Para simplificar la representación esquemática de circuitos con acoplo magnético se señalan los terminales con puntos, Fig. 13-5(*c*). En cada bobina se marca un punto en los terminales que tienen la misma polaridad instantánea, considerando solamente la inducción mutua. Por tanto, para aplicar esta notación hay que saber a qué terminal de las bobinas se asigna el punto. Hay que determinar, además, el signo asociado con la tensión en la inducción mutua cuando se escriben las ecuaciones en las corrientes de malla.

# Capítulo 13

## Autoinducción e inducción

### INTRODUCCION

Los circuitos estudiados en los capítulos anteriores estaban formados por mallas y nudos. Como dos mallas tienen una rama común y dos nudos están unidos por elementos pasivos o activos, las mallas y los nudos están acoplados conductivamente. En dichos capítulos se han analizado diversos métodos para resolver estos circuitos.

En el capítulo presente se estudia otro tipo de acoplo, el acoplamiento magnético. Cuando la interacción entre dos mallas tiene lugar a través de un campo magnético en vez de por elementos comunes, las mallas en cuestión están acopladas o unidas inductiva o magnéticamente.

### AUTOINDUCCION

Si la corriente que circula por una bobina de un circuito varía, en el transcurso del tiempo también lo hace el flujo magnético que lo abraza, induciéndose en él una fuerza electromotriz (f.e.m.). Suponiendo que la permeabilidad magnética es constante, la f.e.m. inducida es proporcional a la variación de dicha corriente, esto es,

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

La constante de proporcionalidad $L$ se llama coeficiente de autoinducción del elemento. En el sistema mksa la unidad de autoinducción se llama henrio (H) y corresponde al coeficiente de un elemento que al ser recorrido por una corriente variable a razón de 1 amperio por segundo (A/s) se induce en sus bornes una f.e.m. de 1 voltio. Por tanto, 1 H = 1 V · s/A o, lo que es igual, como 1 V · s es la unidad de inducción del campo magnético, que se llama weber (Wb), 1 H = 1 Wb/A. La unidad de flujo magnético o inducción magnética por unidad de superficie se llama tesla (T), de manera que 1 T = 1 Wb/m$^2$.

En una bobina de $N$ espiras o vueltas la f.e.m. inducida viene dada por

$$v_L = N\frac{d\phi}{dt} \qquad (2)$$

en donde $N\,d\phi$ es el flujo que abraza al circuito o flujo de acoplamiento. Combinando las (*1*) y (*2*) se tiene

$$L\frac{di}{dt} = N\frac{d\phi}{dt}$$

de donde

$$L = N\frac{d\phi}{di}$$

### INDUCCION MUTUA

Si la corriente $i_1$ que circula por la bobina 1 varía con el tiempo (Fig. 13-1), se establece un flujo magnético $\phi_1$. Una parte de este flujo atraviesa o abraza solamente a la bobina 1 y esta parte se llama flujo de pérdida o de fuga $\phi_{11}$. El flujo remanente $\phi_{12}$ es el que atraviesa también a la bobina 2, como se representa en la figura. La tensión inducida en la bobina 2 viene dada por la ley de Faraday.

Fig. 13-1

$$v_2 = N_2\frac{d\phi_{12}}{dt} \qquad (3)$$

Como $\phi_{12}$ está relacionado con la corriente $i_1$, $v_2$ es proporcional a la variación de $i_1$ con el tiempo, o sea,

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} \tag{4}$$

en donde la constante de proporcionalidad $M$ se llama coeficiente de inducción mutua entre las dos bobinas. En el sistema mksa la unidad de inducción mutua es la misma que la de autoinducción, el henrio (H).

Combinando las (*3*) y (*4*) se obtiene

$$v_2 = N_2\frac{d\phi_{12}}{dt} = M\frac{di_1}{dt}$$

y

$$M = N_2\frac{d\phi_{12}}{di_1} \tag{5}$$

Con un conjunto de bobinas devanadas sobre un mismo núcleo de hierro, la relación entre el flujo y la corriente no es lineal y la inducción mutua viene dada por (*5*). Si el medio de acoplo de las bobinas es el aire, la relación entre el flujo y la corriente es lineal y la inducción mutua es

$$M = \frac{N_2\phi_{12}}{i_1} \tag{6}$$

El acoplamiento mutuo es bilateral y se obtienen análogos resultados si por la bobina 2 (Fig. 13-1) circula una corriente, variable con el tiempo, $i_2$. Entonces, los flujos son $\phi_2$, $\phi_{21}$ y $\phi_{22}$ y la tensión inducida en bornes de la bobina 1 es $v_1 = M(di_2/dt)$, con lo que las Ecuaciones (*5*) y (*6*) se transforman, respectivamente, en

$$(7)\quad M = \frac{N_1\,d\phi_{21}}{di_2} \qquad \text{y} \qquad (8)\quad M = \frac{N_1\phi_{21}}{i_2}$$

## COEFICIENTE DE ACOPLO $k$

En la Fig. 13-1 el flujo de acoplamiento depende de la separación y orientación de los ejes de las bobinas y de la permeabilidad magnética del medio. La fracción del flujo total que abraza o acopla a las dos bobinas se llama coeficiente de acoplamiento $k$.

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

Por ser $\phi_{12} \leqq \phi_1$ y $\phi_{21} \leqq \phi_2$, el valor máximo de $k$ es la unidad.

El coeficiente $M$ se puede expresar en función de las autoinducciones $L_1$ y $L_2$ de la forma siguiente. Multiplicando (*6*) por (*8*),

$$M^2 = \left(\frac{N_2\phi_{12}}{i_1}\right)\left(\frac{N_1\phi_{21}}{i_2}\right) = \left(\frac{N_2 k\phi_1}{i_1}\right)\left(\frac{N_1 k\phi_2}{i_2}\right) = k^2\left(\frac{N_1\phi_1}{i_1}\right)\left(\frac{N_2\phi_2}{i_2}\right) \tag{9}$$

y sustituyendo $L_1 = N_1\phi_1/i_1$ y $L_2 = N_2\phi_2/i_2$ en (*9*)

$$M^2 = k^2L_1L_2 \qquad \text{y} \qquad M = k\sqrt{L_1L_2}$$

## ANALISIS DE CIRCUITOS CON ACOPLO MAGNETICO

Para comprender mejor el sentido del devanado y sus efectos en las tensiones de inducción mutua, las bobinas se han representado sobre un núcleo (Figura 13-2).

Para asignar los puntos a un par de bobinas acopladas se elige un sentido para la corriente en una de ellas y se coloca un punto en el terminal por el que la corriente entra en el arrollamiento. Aplicando la regla de la mano derecha se determina el flujo correspondiente, Fig. 13-5(*a*). Ahora, en la segunda bobina, según la ley de Lenz, el flujo ha de oponerse al creado por la variación de corriente [véase Figura 13-5(*b*)]. Utilizando nuevamente la regla de la mano derecha, se determina el sentido de la corriente natural colocando el otro punto en el terminal por el que dicha corriente sale del arrollamiento. No es preciso, pues, dibujar los núcleos y el diagrama queda como indica la Figura 13-5(*c*).

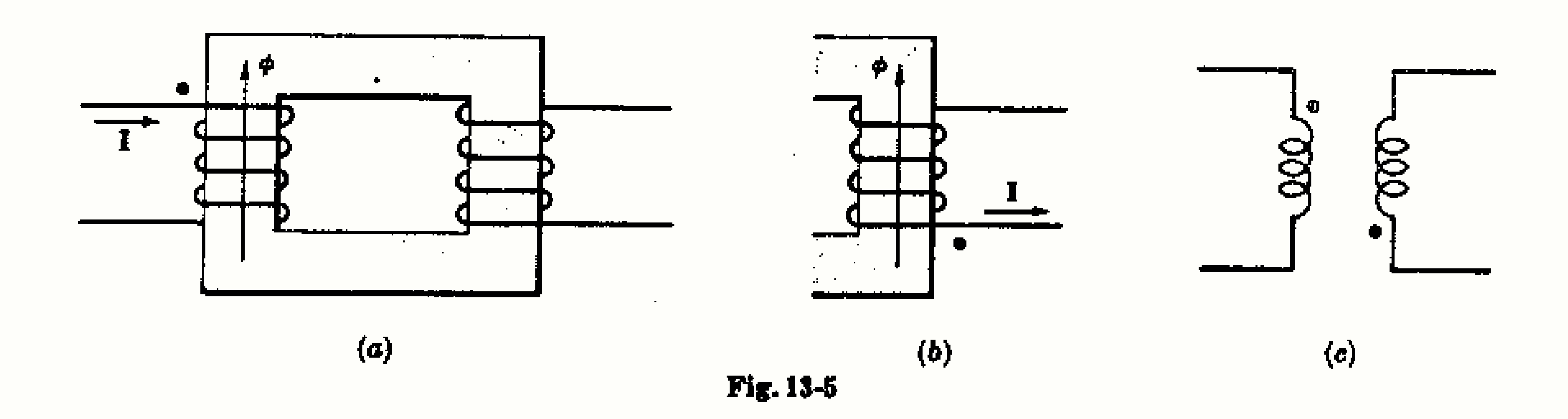


**Fig. 13-5**

Para determinar el signo de la tensión de inducción mutua en las ecuaciones en las corrientes de malla se utiliza la regla de los puntos, que dice: (1) *Si las dos corrientes supuestas entran o salen de las bobinas acopladas por los terminales con punto, los signos de los términos en M son los mismos que los de los términos en L*; (2) *Si una corriente entra por un terminal con punto y la otra sale por el otro terminal con punto, los signos de los términos en M son opuestos a los de los términos L.*

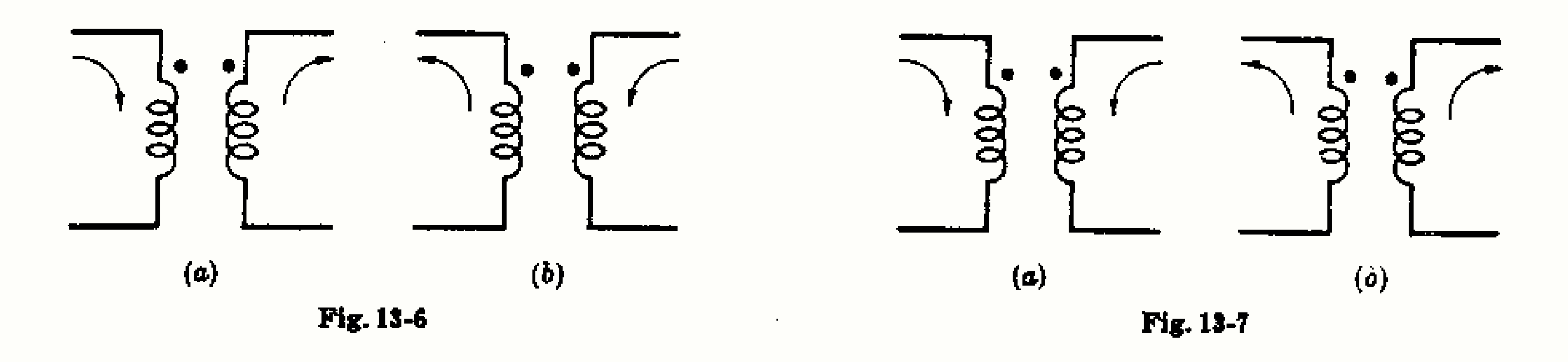


**Fig. 13-6** **Fig. 13-7**

La Fig. 13-6 muestra cuándo los signos de los términos en $M$ y en $L$ son opuestos. En la Fig. 13-7 se representan dos casos en los cuales dichos signos son iguales.

Veamos otro ejemplo de las polaridades relativas en relación con los circuitos con acoplo mutuo; consideremos el circuito de la Fig. 13-8 en el que se han señalado los puntos y elegidas las corrientes en la forma representada. Puesto que una corriente entra por un terminal con punto y la otra sale por el punto, el signo de los términos en $M$ son opuestos a los de $L$. Para este circuito, el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla, escrito en forma matricial, es

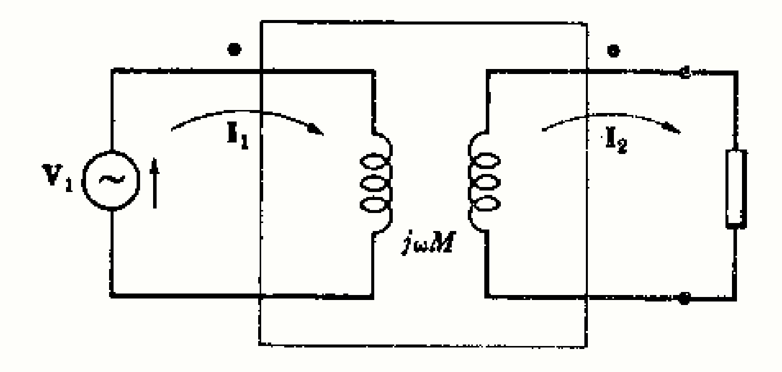


**Fig. 13-8**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & -j\omega M \\ -j\omega M & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

En la Fig. 13-9 aparece un circuito simple con acoplamiento conductivo de dos mallas, indicándose los terminales positivos. El sistema de ecuaciones en las corrientes de malla, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Z} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

La impedancia $\mathbf{Z}$, común a ambas corrientes tiene signo negativo, ya que las intensidades $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ la recorren en sentidos contrarios.

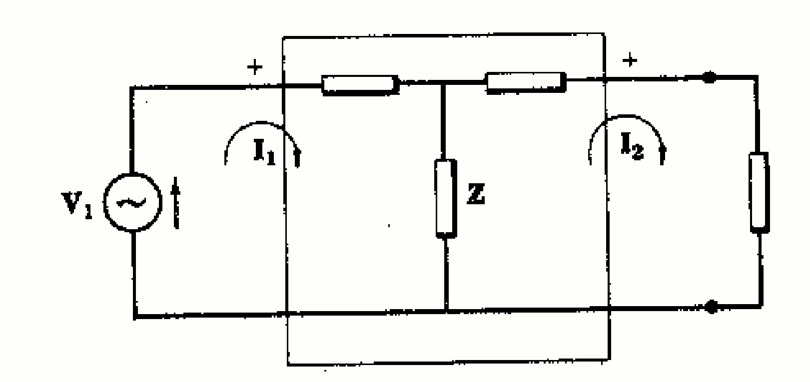



Fig. 13-9

Prescindiendo del interior de los recuadros en la Fig. 13-8 y 13-9, ambos circuitos tienen el mismo aspecto, salvo los puntos en uno y los signos en el otro. Comparando (*15*) y (*16*) se ve cómo el signo negativo de $j\omega M$ corresponde con el de $\mathbf{Z}$.

## CIRCUITOS EQUIVALENTES CON ACOPLO CONDUCTIVO

Analíticamente es posible sustituir un circuito con acoplo mutuo por un circuito equivalente con acoplo conductivo. Sea el circuito de la Fig. 13-10(*a*) y tomemos los sentidos de las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ como se indica. El sistema de ecuaciones en las corrientes de malla, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

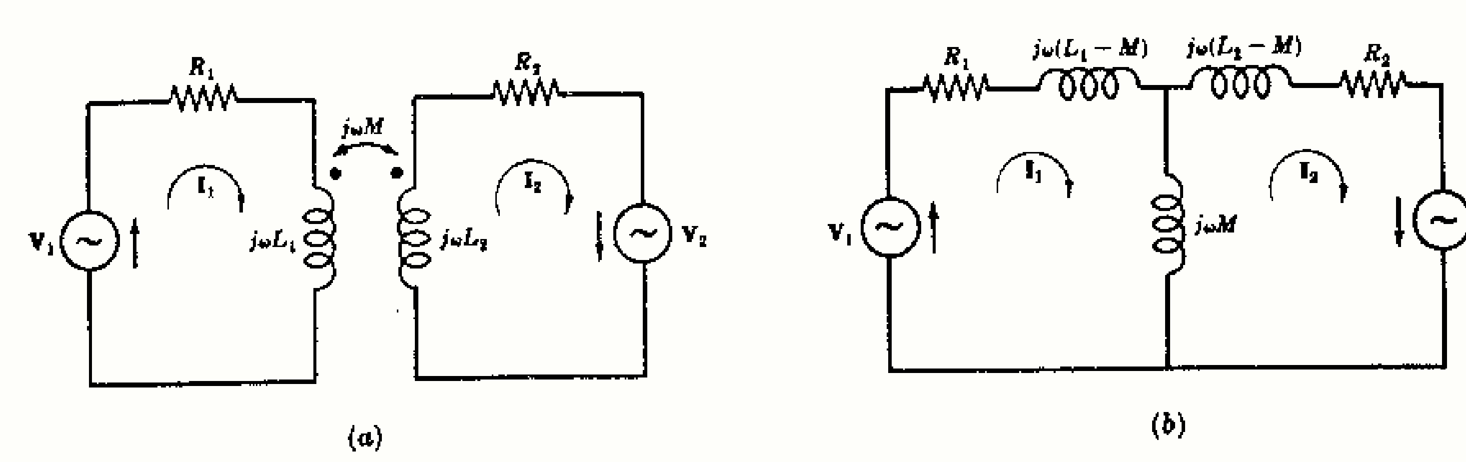



Fig. 13-10

Sean los sentidos de las corrientes en la Fig. 13-10(*b*) los mismos que en la Fig. 13-10(*a*). Las intensidades $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ pasan por la rama común en sentidos opuestos; la impedancia entonces es $j\omega M$. En (*17*), $\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$. Como la corriente de malla $\mathbf{I}_1$ pasa por la rama común con impedancia $j\omega M$, es preciso insertar en el lazo $(-j\omega M)$ y escribir

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M + j\omega M = R_1 + j\omega L_1$$

De igual forma, en la malla 2

$$\mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M + j\omega M = R_2 + j\omega L_2$$

Si se escriben las ecuaciones para las corrientes del circuito de la Fig. 13-10(*b*) obtenemos el sistema (*17*). Por tanto, el circuito con acoplo conductivo de la Fig. 13-10(*b*) equivale al acoplado magnéticamente de la Figura 13-10(*a*).

El método anterior de análisis no siempre conduce a un circuito equivalente físicamente realizable. Esto es cierto cuando $M > L_1$ o $M > L_2$.

Para sustituir la conexión en serie de las bobinas con acoplo mutuo de la Fig. 13-11(*a*) se procede de la manera siguiente: Se aplican, en primer término, los métodos estudiados y se obtiene el equivalente con puntos de la Fig. 13-11(*b*). Después se sustituye este último por el equivalente conductivo de la Figura 13-11(*c*).

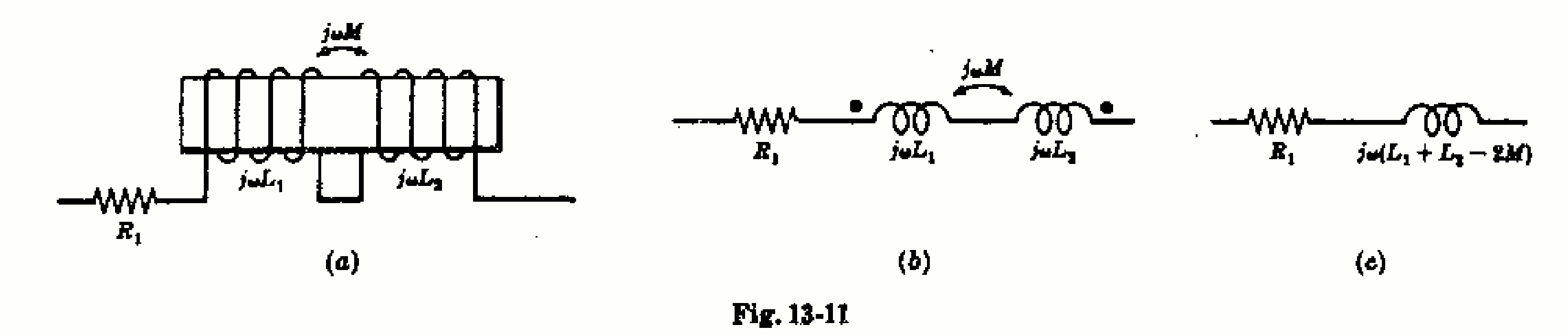



Fig. 13-11

El análisis del circuito de la Fig. 13-11(*a*) exige considerar los flujos magnéticos para determinar los signos de las tensiones de inducción mutua. Con el circuito de la Fig. 13-11(*b*) no hace falta considerar los flujos, pero sí la regla de los puntos. Por último, con el circuito de la Fig. 13-11(*c*) se pueden escribir directamente las ecuaciones necesarias, sin prestar atención ni al flujo, ni a los puntos, ni a la inducción mutua. Los tres circuitos son equivalentes y tienen la misma impedancia compleja, $\mathbf{Z} = R_1 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$.

# Problemas resueltos

**13-1** Por el arrollamiento 1 de un par de bobinas acopladas circula una corriente de 5 amperios y los flujos correspondientes $\phi_{11}$ y $\phi_{12}$ son 20.000 y 40.000 maxwell, respectivamente. Si el número de espiras es $N_1 = 500$ y $N_2 = 1500$, hallar $L_1$, $L_2$, $M$ y $k$. (1 weber $= 10^8$ maxwell.)

El flujo total es $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = 60.000$ Mx $= 6 \times 10^{-4}$ Wb. La autoinducción de la bobina 1 es, por tanto, $L_1 = N_1\phi_1/I_1 = 500(6 \times 10^{-4})/5 = 0{,}06$ H.

El coeficiente de acoplo $k = \phi_{12}/\phi_1 = 40.000/60.000 = 0{,}667$.

La inducción mutua $M = N_2\phi_{12}/I_1 = 1500(4 \times 10^{-4})/5 = 0{,}12$ H.

Ahora bien, como $M = k\sqrt{L_1L_2}$, $0{,}12 = 0{,}667\sqrt{0{,}06L_2}$, se deduce $L_2 = 0{,}539$ H.

**13-2** El coeficiente de acoplo de dos bobinas, $L_1 = 0{,}8$ henrios y $L_2 = 0{,}2$ henrios, es $k = 0{,}9$. Hallar la inducción mutua $M$ y la relación del número de espiras $N_1/N_2$.

La inducción mutua es $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0{,}9\sqrt{0{,}8(0{,}2)} = 0{,}36$ H.

Sustituyendo en $M = N_2\phi_{12}/i_1$, $k\phi_1$, en lugar de $\phi_{12}$ y multiplicando por $N_1/N_1$, resulta

$$M = k\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{N_1\phi_1}{i_1}\right) = k\frac{N_2}{N_1}L_1 \qquad \text{de donde } N_1/N_2 = kL_1/M = 0{,}9(0{,}8)/0{,}36 = 2$$

**13-3** Dos bobinas de autoinducciones $L_1 = 0{,}05$ henrios y $L_2 = 0{,}20$ henrios tienen un coeficiente de acoplo $k = 0{,}5$. La bobina 2 posee 1000 espiras. Si la corriente en la bobina 1 es $i_1 = 5$ sen $400t$, determinar la tensión en la bobina 2 y el flujo máximo de la bobina 1.

La inducción mutua máxima es $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0{,}5\sqrt{0{,}05(0{,}20)} = 0{,}05$ H. La tensión en la bobina 2 viene dada por $v_2 = M(di_1/dt) = 0{,}05\dfrac{d}{dt}(5 \text{ sen } 400t) = 100 \cos 400t$. Como la tensión en la bobina 2 viene dada también por $v_2 = N_2(d\phi_{12}/dt)$, se obtiene

$$100 \cos 400t = 1000(d\phi_{12}/dt)$$

y

$$\phi_{12} = 10^{-3}\int 100 \cos 400t\, dt = 0{,}25 \times 10^{-3} \text{ sen } 400t$$

El flujo máximo de $\phi_{12}$ es $0{,}25 \times 10^{-3}$ Wb. Por tanto, el máximo de $\phi_1$ es

$$\phi_{1\,max} = \frac{\phi_{12\,max}}{0{,}5} = \frac{0{,}25 \times 10^{-3}}{0{,}5} = 0{,}5 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

**13-4** Aplicar la segunda ley de Kirchhoff al circuito con acoplo magnético de la Fig. 13-12 escribiendo la ecuación en valores instantáneos.

Examinando el sentido de arrollamiento en las bobinas se ve que los signos de los términos $M$ son opuestos a los de los términos $L$. Nótese también que la tensión de la inducción mutua aparece en cada bobina a causa de la corriente $i$ en la otra bobina del par.

$$Ri + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = v$$

o bien $$Ri + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt = v$$

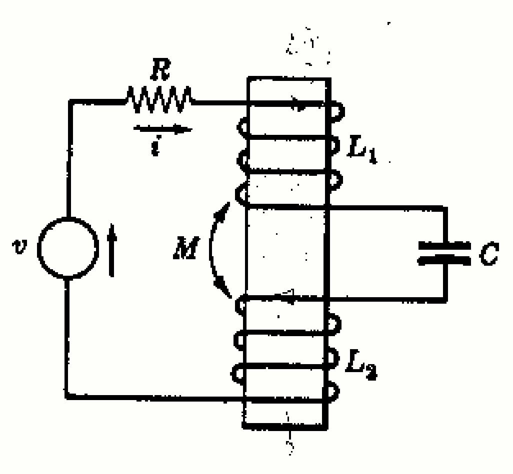


Fig. 13-12

**13-5** Escribir el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla en valores instantáneos para el circuito con acoplo magnético de la Figura 13-13.

Se eligen las corrientes $i_1$ e $i_2$ como en el esquema, y se aplica la regla de la mano derecha a cada arrollamiento. Como los flujos tienen el mismo sentido, el signo de los términos $M$ es igual que el de los $L$. Por tanto,

$$R_1i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_2i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = v$$

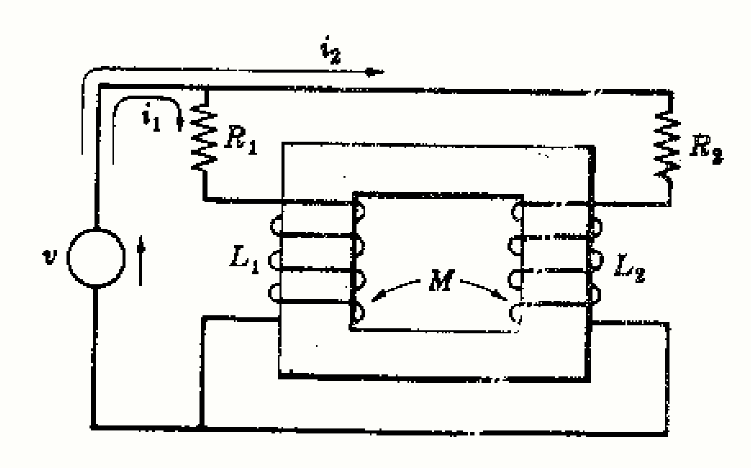


Fig. 13-13

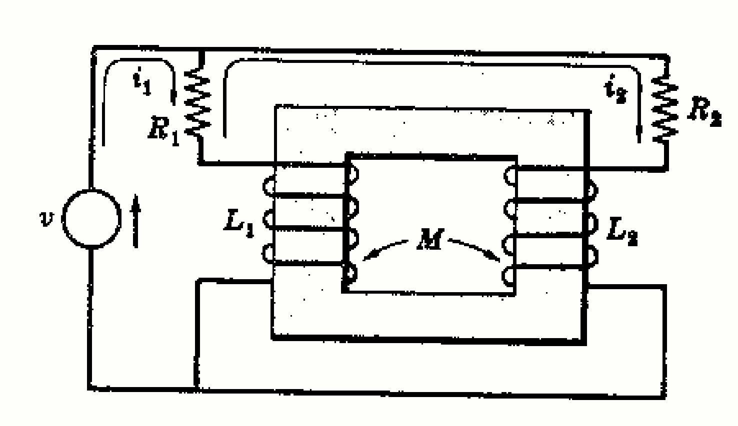


Fig. 13-14

**13-6** Repetir el problema anterior con la corriente $i_2$ en la forma indicada en la Figura 13-14.

Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff a la malla de corriente $i_2$ las tensiones de inducción mutua son negativas. Por tanto,

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1\frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M\frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + L_1\frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M\frac{di_2}{dt} = 0$$

**13-7** Dos bobinas en serie tienen una autoinducción equivalente $L_A$ si la conexión es a favor y $L_B$ si la conexión es en oposición. Determinar la inducción mutua $M$ en función de $L_A$ y $L_B$.

Si la conexión es a favor, la autoinducción equivalente viene dada por

$$L_A = L_1 + L_2 + 2M \tag{1}$$

y se montan en oposición

$$L_B = L_1 + L_2 - 2M \tag{2}$$

Restando ambas expresiones

$$L_A - L_B = 4M \quad \text{de donde} \quad M = \tfrac{1}{4}(L_A - L_B)$$

La solución indica un método experimental para determinar $M$. Basta conectar las bobinas de las dos formas y obtener las autoinducciones equivalentes en un puente de corriente alterna (c.a.). La inducción mutua resultante es un cuarto de la diferencia entre las dos autoinducciones equivalentes.

**13-8** Obtener el circuito equivalente con puntos del circuito con acoplo magnético de la Fig. 13-15. Determinar la tensión en la reactancia $-j10$ empleando el circuito equivalente.

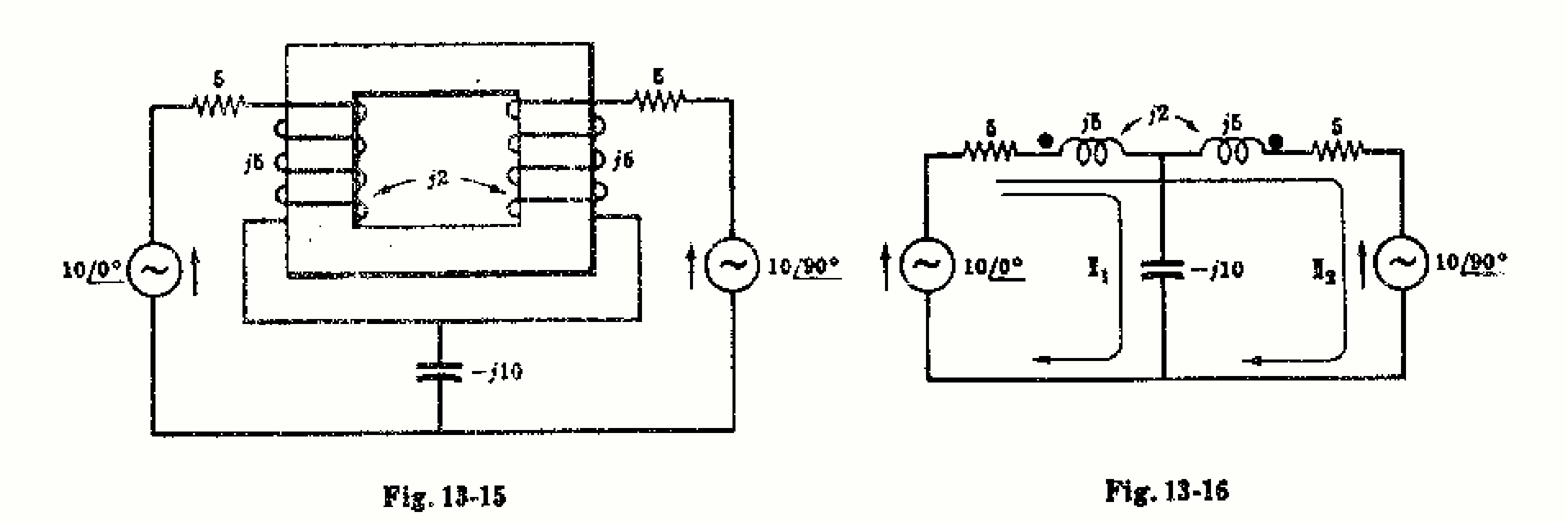



Fig. 13-15

Fig. 13-16

Para colocar los puntos en el circuito consideremos solamente las bobinas y sus sentidos de arrollamiento. Se alimenta con una corriente en la parte superior de la bobina de la izquierda y se coloca un punto en este terminal. El correspondiente sentido del flujo es hacia arriba en la parte izquierda del núcleo. Según la ley de Lenz, el flujo en la bobina de la derecha tiene que ir también hacia arriba. La regla de la mano derecha proporciona la dirección de la corriente natural. Esta corriente sale del devanado por el terminal superior, que se señala, por tanto, con un punto, como se ve en la Figura 13-16.

Con la elección de $i_1$ e $i_2$ elegidos como aparece en la figura, el sistema de ecuaciones de corriente, en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 5 - j5 & 5 + j3 \\ 5 + j3 & 10 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 - j10 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5+j3 \\ 10-j10 & 10+j6 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 1{,}015\underline{/113{,}95^\circ}$$

Por tanto, la caída de tensión en la reactancia $-j10$ es

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_1(-j10) = 10{,}15\underline{/23{,}95^\circ}$$

**13-9** Obtener el circuito equivalente con puntos de las bobinas acopladas magnéticamente de la Figura 13-17 y escribir la ecuación correspondiente.

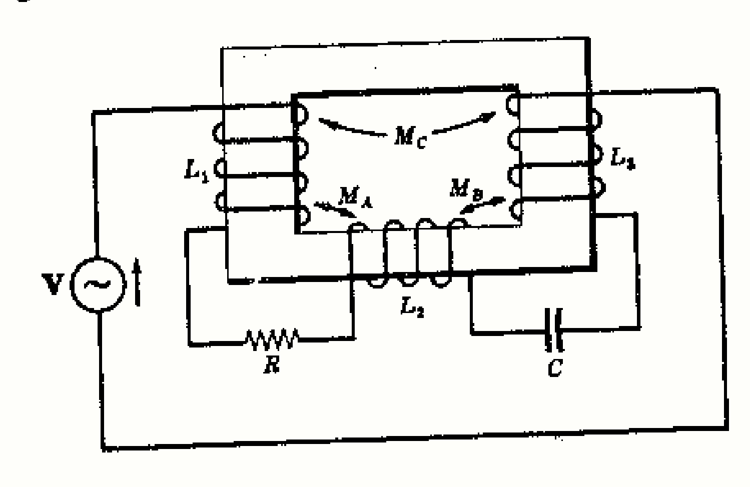



**Fig. 13-17**

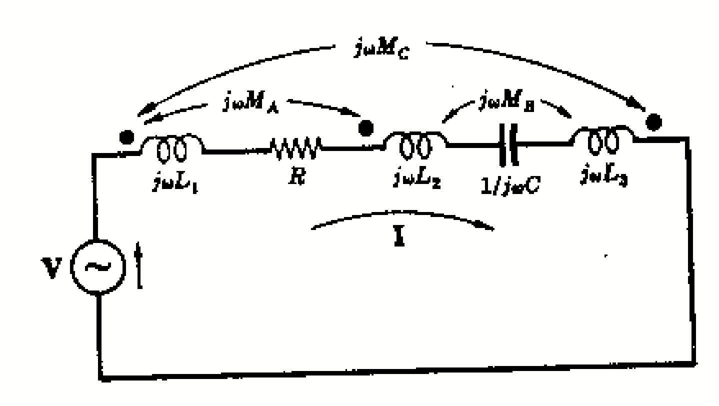



**Fig. 13-18**

Asignando los puntos por los métodos del Problema 13-8 se obtiene el circuito de la Fig. 13-18. Si se aplica la segunda ley de Kirchhoff a la malla simple, se tiene

$$\left[R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega(L_1 + L_2 + L_3 + 2M_A - 2M_B - 2M_C)\right]\mathbf{I} = \mathbf{V}$$

**13-10** En el circuito acoplado magnéticamente de la Fig. 13-19 hallar la caída de tensión en la resistencia de 5 ohmios, con los puntos asignados como indica el esquema. Después, invertir la polaridad en una bobina y repetir el problema.

La inducción mutua se calcula a partir de

$$jX_m = jk\sqrt{X_{L1}X_{L2}} = j0{,}8\sqrt{5(10)} = j5{,}66$$

Hallando la corriente $\mathbf{I}_2$,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3-j1{,}66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j1 & -3-j1{,}66 \\ -3-j1{,}66 & 8+j6 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{171\underline{/29^\circ}}{19{,}9\underline{/53{,}8^\circ}} = 8{,}60\underline{/-24{,}8^\circ}$$

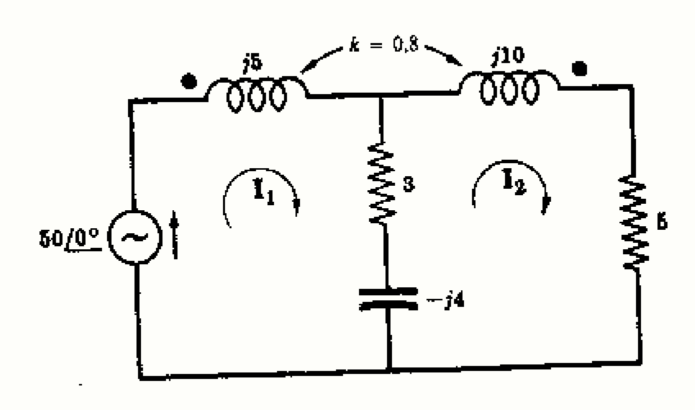



**Fig. 13-19**

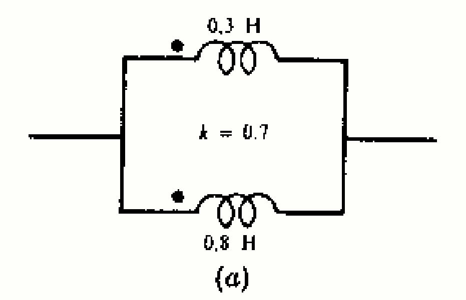
La caída de tensión en la resistencia de 5 Ω es $\mathbf{V}_5 = (5)\mathbf{I}_2 = 43\underline{/-24{,}8^\circ}$ V.

Cambiando la polaridad en una de las bobinas varía la matriz de impedancias, resultando un nuevo valor de $\mathbf{I}_2$.

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3+j9{,}66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j1 & -3+j9{,}66 \\ -3+j9{,}66 & 8+j6 \end{vmatrix}} = \frac{505\underline{/-72{,}7^\circ}}{132\underline{/39{,}4^\circ}} = 3{,}83\underline{/-112{,}1^\circ}$$

La caída de tensión en la resistencia de 5 Ω es, en este caso, $\mathbf{V}_5 = (5)\mathbf{I}_2 = 19{,}15\underline{/-112{,}1^\circ}$ V.

**13-11** Hallar la autoinducción equivalente de la conexión en paralelo de $L_1$ y $L_2$ representada en la Figura 13-20(*a*).



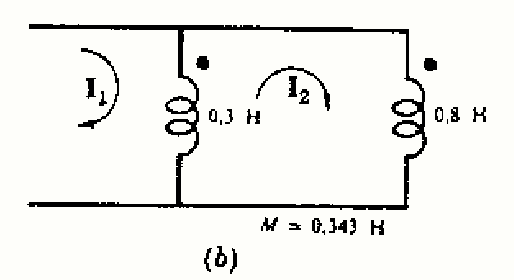




Fig. 13-20

La inducción mutua $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}7\sqrt{0{,}3(0{,}8)} = 0{,}343$ H. Se dispone el circuito en la forma de la Fig. 13-20(*b*) y con las corrientes en las mallas dibujadas, se tiene

$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega 0{,}3 & j\omega 0{,}043 \\ j\omega 0{,}043 & j\omega 0{,}414 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_{\text{entrada } 1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{j\omega 0{,}3(j\omega 0{,}414) - (j\omega 0{,}043)^2}{j\omega 0{,}414} = j\omega 0{,}296$$

Por consiguiente, la autoinducción equivalente de las bobinas acopladas es 0,296 H.

**13-12** Para medir el coeficiente de inducción mutua de un par de bobinas se utiliza el puente de Heaviside de la Fig. 13-21. Hallar $M$ en función de las otras constantes del puente cuando la corriente $\mathbf{I}_D$ en el detector es igual a cero.

Se eligen las dos corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ dibujadas en el esquema. Si $\mathbf{I}_D = 0$, las caídas de tensión en $R_1$ y $R_2$ han de ser iguales:

$$R_1\mathbf{I}_1 = R_2\mathbf{I}_2 \qquad (1)$$

Análogamente, las caídas de tensión en $(R_4 + j\omega L_4)$ y $(R_3 + j\omega L_3)$ también tienen que ser iguales. Sin embargo, en $L_4$ aparece una tensión de inducción mutua y la corriente en la otra bobina del par, $L_5$, es la suma $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$.

$$\mathbf{I}_1(R_4 + j\omega L_4) + j\omega M(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = \mathbf{I}_2(R_3 + j\omega L_3) \qquad (2)$$

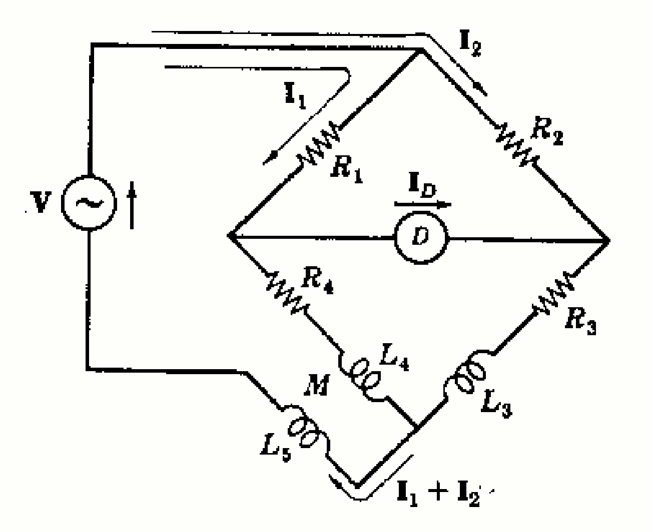



Fig. 13-21

Llevando $\mathbf{I}_2 = (R_1/R_2)\mathbf{I}_1$ a la ecuación (2),

$$\mathbf{I}_1(R_4 + j\omega L_4 + j\omega M) + (R_1/R_2)\mathbf{I}_1(j\omega M) = (R_1/R_2)\mathbf{I}_1(R_3 + j\omega L_3) \qquad (3)$$

Igualando las partes real e imaginaria,

$$R_4 R_2 = R_1 R_3 \quad \text{y} \quad j\omega\left(L_4 + M + \frac{R_1}{R_2}M\right) = j\omega\frac{R_1}{R_2}L_3 \quad \text{de donde} \quad M = \frac{R_1 L_3 - R_2 L_4}{R_1 + R_2}$$

**13-13** Sustituir el circuito con acoplo magnético de la Fig. 13-22 por el equivalente de Thevenin en los terminales $AB$.

La tensión equivalente de Thevenin $\mathbf{V}'$ es la tensión a circuito abierto en los terminales $AB$. Con las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ elegidas como en la figura y hallando el valor de $\mathbf{I}_2$.

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 10 \\ -2+j3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -2+j3 \\ -2+j3 & 6+j5 \end{vmatrix}} = \frac{20-j30}{10+j67} = 0{,}533\underline{/-137{,}8^\circ}$$

Ahora bien, $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_2(4) = 2{,}13\underline{/-137{,}8^\circ}$

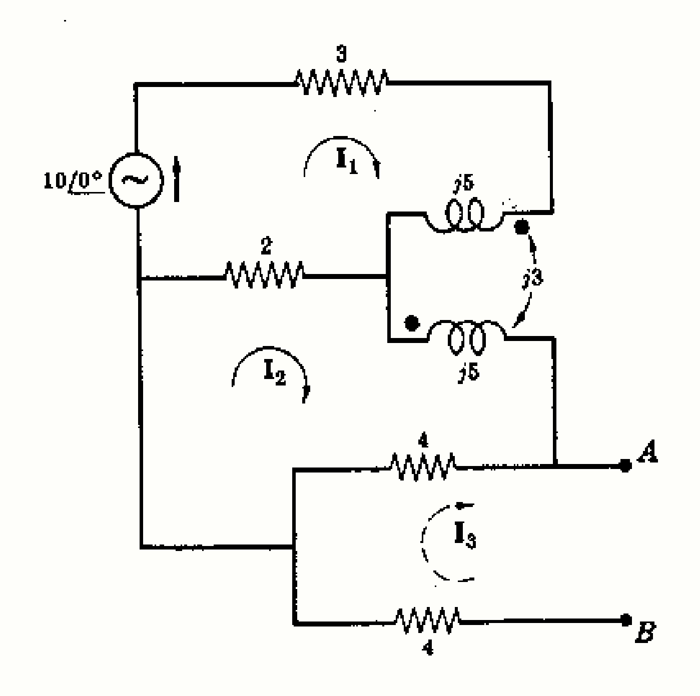



Fig. 13-22

Para determinar $\mathbf{Z}'$ en el equivalente de Thevenin se considera la tercera corriente de malla $\mathbf{I}_3$ y se calcula $\mathbf{Z}_{\text{entrada } 3}$, que es la impedancia en los terminales de $AB$ con todas las fuentes internas iguales a cero.

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_{\text{entrada } 3} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -2+j3 & 0 \\ -2+j3 & 6+j5 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -2+j3 \\ -2+j3 & 6+j5 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{j456}{10+j67} = 6{,}74\underline{/8{,}5^\circ}$$

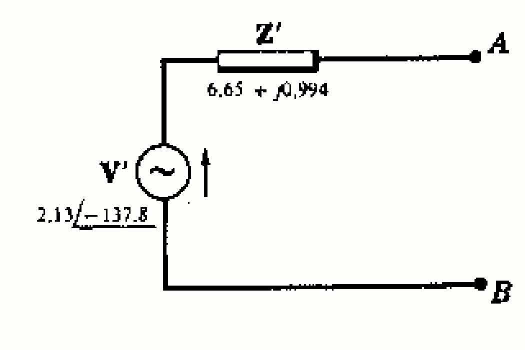



Fig. 13-23

El circuito equivalente de Thevenin se representa en la Figura 13-23.

**13-14** En el circuito acoplado de dos mallas de la Fig. 13-24 demostrar que no son necesarios los puntos siempre que la segunda malla sea pasiva.

Se eligen las corrientes de malla como en el esquema y se halla el valor de $\mathbf{I}_2$.

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5+j10 \end{vmatrix}} = \frac{-50(\pm j4)}{-24+j45} = 3{,}92\underline{/61{,}9^\circ \pm 90^\circ}$$

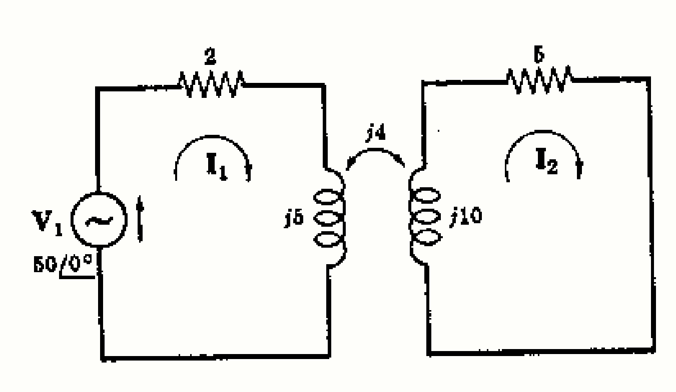



Fig. 13-24

El valor de $\Delta_z$ no está afectado por el signo de $M$ y la corriente $\mathbf{I}_2$ tendrá un ángulo de fase de 151,9° o −28,1°. Como no hay fuentes de tensión en la malla no es necesario conocer la polaridad de la tensión de inducción mutua. Las caídas de tensión en las impedancias de las mallas son iguales en valor absoluto y difieren 180° en la fase. La potencia en una impedancia no se ve afectada. También se verifica que $\mathbf{I}_1$ es idéntico para uno u otro signo en la inducción mutua.

**13-15** Hallar, en el circuito de la Fig. 13-25, el valor de $R_L$ que da lugar a un máximo de potencia transferida después de elegir la mejor conexión para las bobinas y determinar el valor del coeficiente de acoplo $k$.

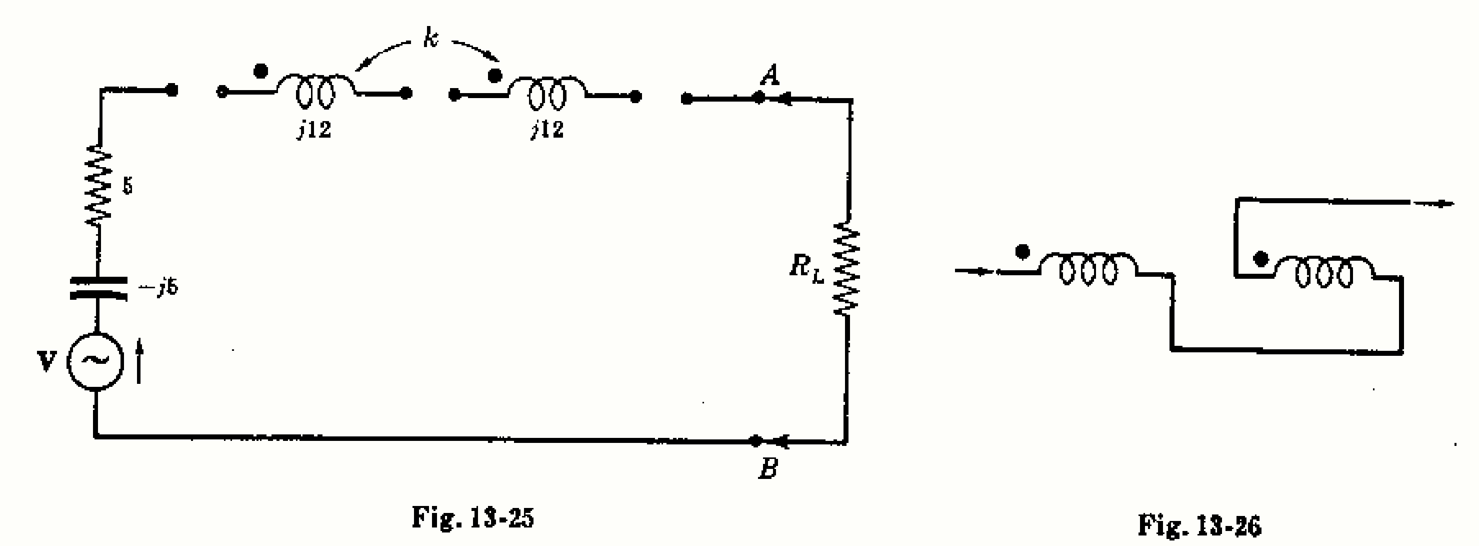



Fig. 13-25

Fig. 13-26

La impedancia del circuito a la izquierda de $AB$ ha de ser mínima. Expresando la impedancia de esta parte del circuito,

$$\mathbf{Z} = 5 - j5 + j12 + j12 \pm j2X_M = 5 + j19 \pm j2k\sqrt{12(12)}$$

Para que la impedancia sea mínima, la reactancia debe ser nula; en consecuencia, el signo adecuado para la mutua es el negativo.

$$19 - 2k\sqrt{12(12)} = 0 \quad \text{de donde} \quad k = 19/24 = 0{,}792$$

La conexión representada en la Fig. 13-26 da lugar a que el signo de las tensiones de inducción mutua sea negativo como es preciso; entonces, la impedancia del circuito a la izquierda de $AB$ es de 5 Ω, resistencia pura, y la potencia máxima se tiene cuando $R_L = R_g = 5\ \Omega$.

**13-16** El circuito de la Fig. 13-25 tiene una resistencia de carga $R_L = 10$ ohmios y una fuente $\mathbf{V} = 50\underline{/0°}$ voltios. Con las dos conexiones posibles de las bobinas y $k$ variable desde 0 a 1, hallar el margen de potencias que se puede suministrar a la resistencia.

Con el acoplamiento representado en la Fig. 13-26 el signo de la inducción mutua es negativo y la impedancia total del circuito, incluyendo la carga, es $\mathbf{Z}_T = 5 - j5 + j12 + j12 - j24k + 10$. Sea $k = 1$; entonces,

$$\mathbf{Z}_T = 15 - j5 = 15{,}8\underline{/-18{,}45°}, \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{50\underline{/0°}}{15{,}8\underline{/-18{,}45°}} = 3{,}16\underline{/18{,}45°}$$

La potencia en la resistencia de 10 Ω es $P = RI^2 = (10)(3{,}16)^2 = 100$ W.

Sea ahora $k = 0$; entonces,

$$\mathbf{Z}_T = 15 + j19 = 24{,}2\underline{/51{,}7°}, \qquad \mathbf{I} = 50\underline{/0°}/(24{,}2\underline{/51{,}7°}) = 2{,}06\underline{/-51{,}7°}$$

La potencia en la resistencia de 10 Ω es $(10)(2{,}06)^2 = 42{,}4$ W. Con $k = 0{,}792$, $P_{max} = 111$ W.

Cámbiese la conexión de las bobinas para obtener un signo positivo en la inducción mutua. La impedancia, en tal caso, es $\mathbf{Z}_T = 15 + j19 + jk24$.

Sea $k = 1$; entonces,

$$\mathbf{Z}_T = 15 + j43 = 45{,}6\underline{/70{,}8°}, \qquad \mathbf{I} = 50\underline{/0°}/(45{,}6\underline{/70{,}8°}) = 1{,}095\underline{/-70{,}8°}$$

La potencia correspondiente $P = RI^2 = (10)(1{,}095)^2 = 12$ W.

Por consiguiente, en la resistencia de 10 Ω puede esperarse una potencia entre 12 y 100 W.

**13-17** Obtener el circuito equivalente con acoplo conductivo del circuito con acoplo magnético de la Figura 13-27.

Elegidas las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ como se indica, la ecuación matricial es

$$\begin{bmatrix} 3+j1 & -3-j2 \\ -3-j2 & 8+j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

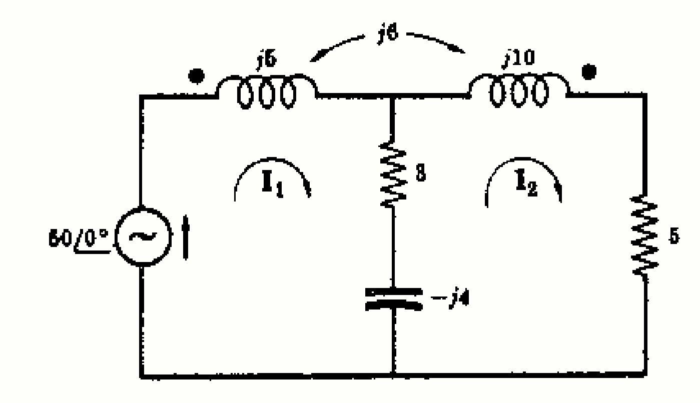



Fig. 13-27

Fig. 13-28

Se eligen las corrientes de malla en el circuito con acoplo conductivo con los mismos sentidos que en el circuito con acoplo magnético. De la matriz de impedancias, $\mathbf{Z}_{12} = -3 - j2$. Como las corrientes pasan por la rama común en sentidos opuestos, la impedancia precisa en la rama es $3 + j2$. La impedancia propia de la malla 1 es $\mathbf{Z}_{11} = 3 + j1$. Por tanto, hace falta en la malla una impedancia $-j1$. De igual forma, puesto que $\mathbf{Z}_{22} = 8 + j6$, la malla necesita una impedancia de $5 + j4$, además de los elementos de la rama común, como se ve en la Figura 13-28.

**13-18** Obtener el circuito equivalente con acoplo conductivo del circuito con acoplo mutuo de la Figura 13-29.

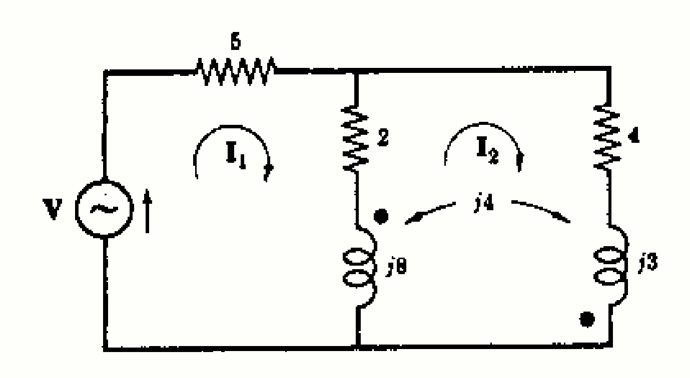



Fig. 13-29

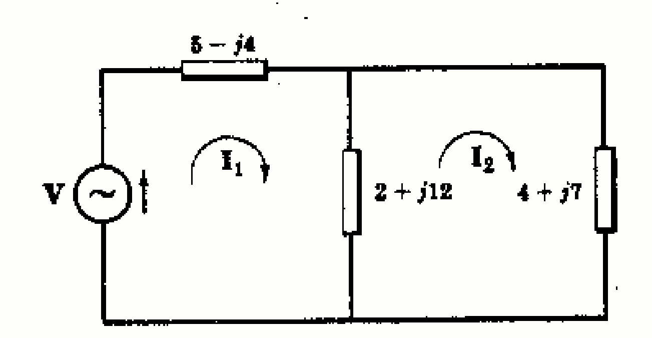



Fig. 13-30

Se eligen las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ y se escribe la ecuación matricial en las corrientes de malla.

$$\begin{bmatrix} 7+j8 & -2-j12 \\ -2-j12 & 6+j19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las corrientes de malla en el circuito con acoplo conductivo pasan por la rama común en sentidos opuestos. Puesto que $\mathbf{Z}_{12}$ en la matriz de impedancias es $-2 - j12$, la impedancia de esta rama ha de ser $2 + j12$. También, de la matriz de impedancias, $\mathbf{Z}_{11} = 7 + j8$ y $\mathbf{Z}_{22} = 6 + j19$. Entonces, las impedancias que faltan en las mallas 1 y 2 del circuito equivalente son, respectivamente,

$$\mathbf{Z}_1 = (7+j8) - (2+j12) = 5 - j4 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Z}_2 = (6+j19) - (2+j12) = 4 + j7$$

El circuito equivalente acoplado conductivamente es el de la Figura 13-30.

# Problemas propuestos

**13-19** Dos bobinas tienen un coeficiente de acoplo $k = 0{,}85$ y la bobina 1 posee 250 espiras. Con una corriente $i_1 = 2$ amperios en la bobina 1, el flujo total $\phi_1$ es $3{,}0 \times 10^{-4}$ weber. Si $i_1$ se reduce linealmente a cero en dos milisegundos, la tensión inducida en la bobina 2 es de 63,75 voltios. Determinar los valores de $L_1$, $L_2$, $M$ y $N_2$. *Sol.* 37,5 mH; 150 mH; 63,8 mH; 500.

**13-20** Dos bobinas acopladas tienen $N_1 = 100$ y $N_2 = 800$ espiras, con un coeficiente de acoplo 0,85. Con la bobina 1 abierta y una corriente de 5 amperios en la 2, el flujo $\phi_2$ vale $3{,}5 \times 10^{-4}$ weber. Hallar $L_1$, $L_2$ y $M$. *Sol.* 0,875; 56; 5,95 mH.

**13-21** Si dos bobinas idénticas tienen una autoinducción equivalente de 0,080 henrios asociadas en serie con el mismo sentido, y 0,035 henrios en serie, pero en oposición, ¿cuáles serán los valores de $L_1$, $L_2$, $M$ y $k$?
*Sol.* $L_1 = 28{,}8$ mH; $L_2 = 28{,}8$ mH; $M = 11{,}25$ mH; 0,392.

**13-22** Dos bobinas acopladas con $L_1 = 0{,}02$ henrios, $L_2 = 0{,}01$ henrios y $k = 0{,}5$ se conectan de cuatro formas diferentes: en serie, a favor; en serie, en oposición; en paralelo con las dos disposiciones del sentido de los arrollamientos. ¿Cuáles son las cuatro autoinducciones equivalentes? *Sol.* 15,9; 44,1; 9,47; 3,39 mH.

**13-23** Dos bobinas idénticas con $L = 0{,}02$ henrios tienen un coeficiente de acoplo $k = 0{,}8$. Hallar $M$ y las dos autoinducciones equivalentes con las bobinas en serie, a favor y en oposición. *Sol.* 16; 72; 8 mH.

**13-24** Dos bobinas cuyas autoinducciones están en la relación cuatro a uno tienen un coeficiente de acoplo $k = 0{,}6$. Si están en serie con arrollamientos en el mismo sentido, la autoinducción equivalente es 44,4 mH. Hallar $L_1$, $L_2$ y $M$. *Sol.* 6; 24; 7,2 mH.

**13-25** Dos bobinas de autoinducciones $L_1 = 6{,}8$ mH y $L_2 = 4{,}5$ mH se conectan en serie a favor y en oposición. Las autoinducciones equivalentes de estas dos conexiones son 19,6 y 3 mH, respectivamente. Hallar los valores de $M$ y $k$. *Sol.* 4,15 mH; 0,75.

**13-26** Elegir las corrientes de malla para el circuito acoplado de la Fig. 13-31 y escribir las ecuaciones en valores instantáneos. Obtener el circuito equivalente con puntos, escribir las ecuaciones y comparar los resultados.

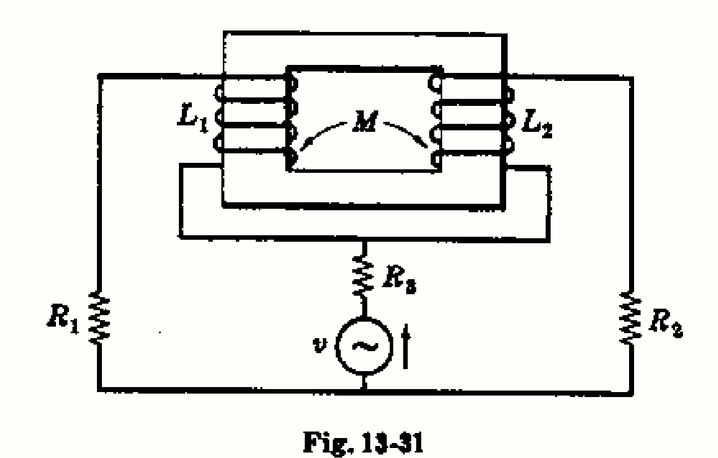



**Fig. 13-31**

**13-27** Dibujar el circuito equivalente con puntos de las bobinas acopladas de la Fig. 13-32 y hallar la reactancia inductiva equivalente. *Sol.* $j12$.

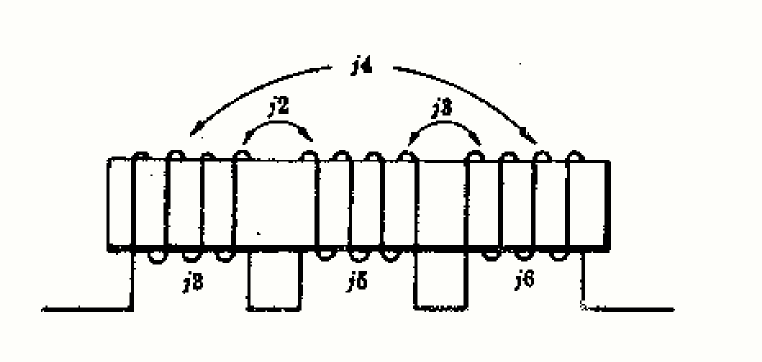





**Fig. 13-32**

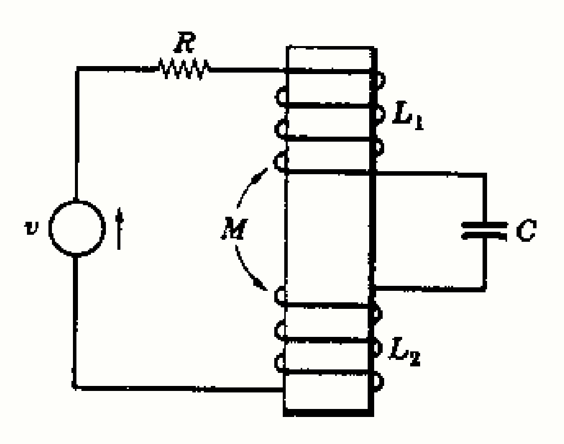



**Fig. 13-33**

**13-28** Obtener el circuito equivalente con puntos de las bobinas acopladas de la Fig. 13-33 y escribir la ecuación en valores instantáneos.

**13-29** Representar el circuito equivalente con puntos de las bobinas acopladas de la Fig. 13-34 y hallar la corriente I. *Sol.* $4{,}47\underline{/26{,}7^\circ}$ A.

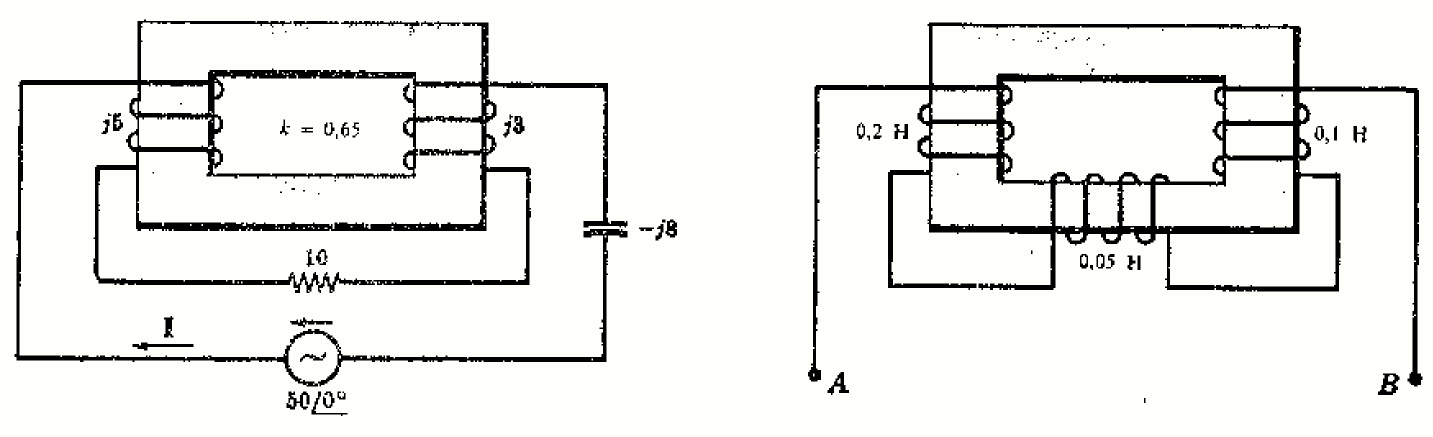



Fig. 13-34 Fig. 13-35

**13-30** Obtener el circuito equivalente con puntos para las tres bobinas acopladas de la Fig. 13-35 y hallar la autoinducción equivalente en los terminales *AB*. Todos los coeficientes de acoplo son 0,5. *Sol.* 0,239 H.

**13-31** Obtener el circuito equivalente con puntos del circuito de la Fig. 13-36 y hallar la impedancia equivalente en los terminales *AB*. *Sol.* $2{,}54 + j2{,}26\ \Omega$.

**13-32** En el circuito de la Fig. 13-36 invertir el sentido de arrollamiénto de una bobina y hallar la impedancia equivalente. *Sol.* $2{,}53 + j0{,}238\ \Omega$.

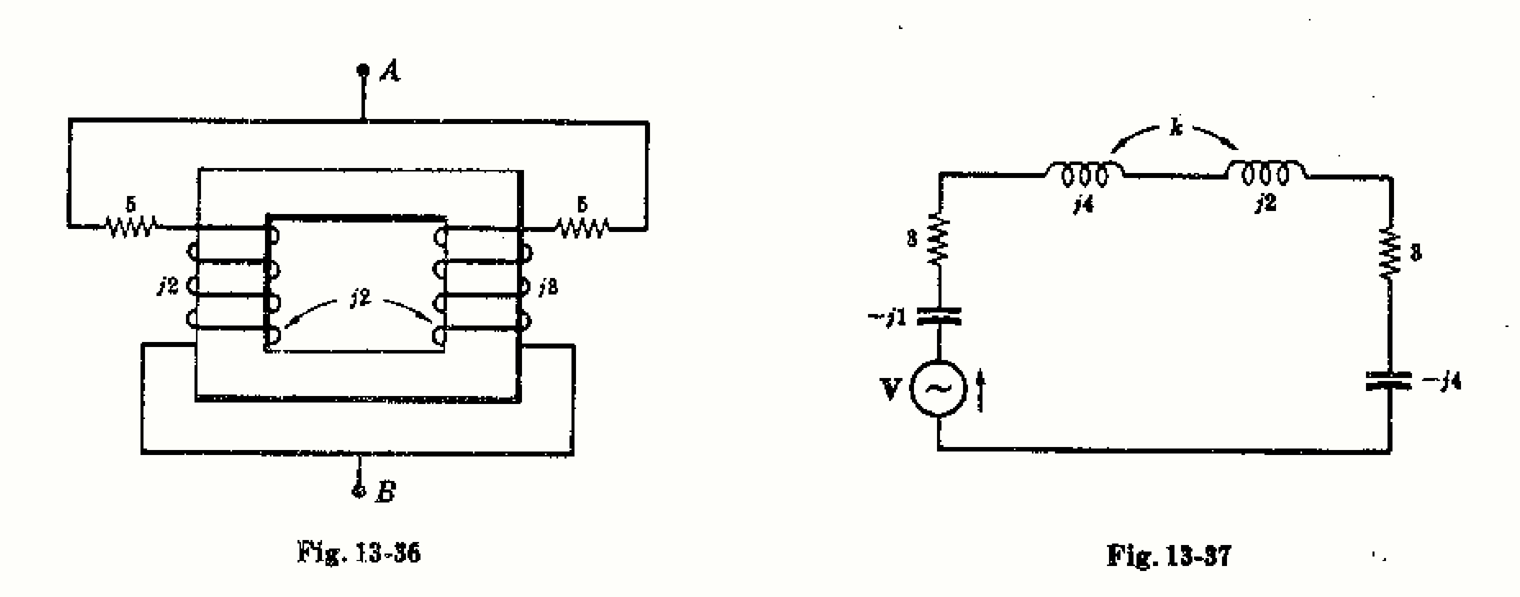



Fig. 13-36 Fig. 13-37

**13-33** Hallar, en el circuito serie de la Fig. 13-37, el valor del coeficiente de acoplo $k$ y colocar los puntos en las bobinas de forma que el circuito esté en resonancia serie. *Sol.* $k = 0{,}177$.

**13-34** Hallar el valor del coeficiente de inducción mutua $k$ en el circuito de la Fig. 13-38 y colocar los puntos en las bobinas de manera que dicho circuito serie entre en resonancia. *Sol.* $k = 0{,}112$.

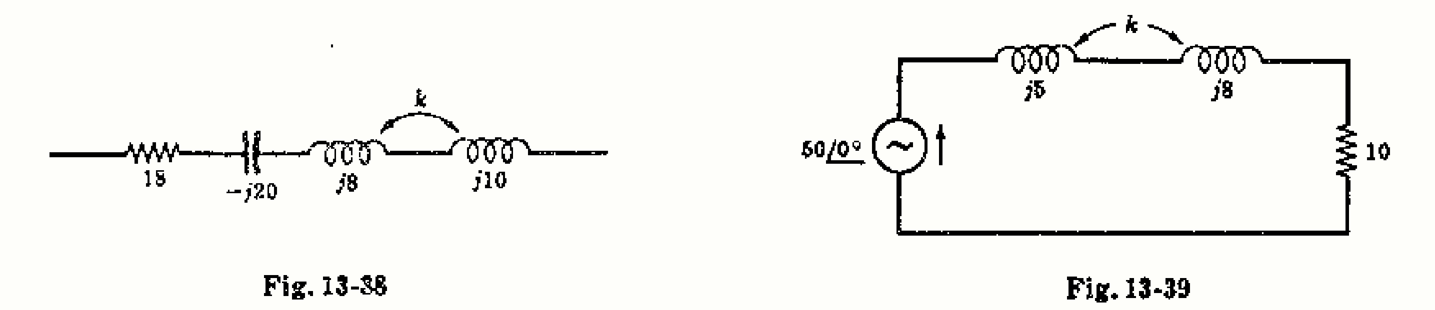



Fig. 13-38 Fig. 13-39

**13-35** En el circuito representado en la Fig. 13-39 hallar el coeficiente de acoplo $k$ y situar los puntos de forma que la potencia de salida de la fuente de $50\underline{/0^\circ}$ voltios sea 168 vatios. *Sol.* $k = 0{,}475$.

**13-36** En relación con el problema anterior, hallar la potencia de la salida de la fuente cuando se invierten los puntos. Utilizar el valor de $k$ hallado en el Problema 13-35. *Sol.* 54,2 W.

**13-37** Hallar, en el circuito acoplado de la Fig. 13-40, la relación de tensiones $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ para que la corriente $\mathbf{I}_1$ sea cero. Repetir el problema para $\mathbf{I}_2$ cero.
*Sol.* $1{,}414\underline{/-45^\circ}$ ; $0{,}212\underline{/32^\circ}$ .

**13-38** En el problema anterior, ¿qué tensión aparece en la reactancia $j8$ ohmios cuando $\mathbf{V}_1$ es $100\underline{/0^\circ}$ voltios e $\mathbf{I}_1 = 0$ amperios?
*Sol.* $100\underline{/0^\circ}$ V (+ en el punto).

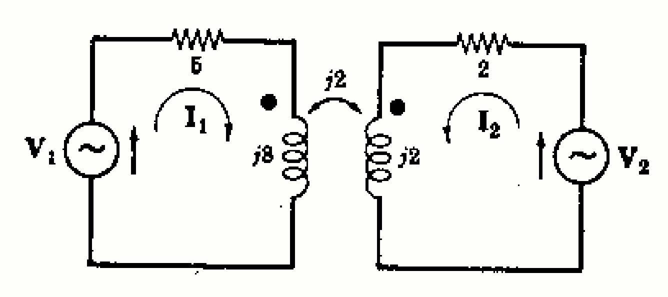


Fig. 13-40

**13-39** En el circuito acoplado de la Fig. 13-41 hallar la reactancia de inducción mutua $j\omega M$ si la potencia disipada en la resistencia de 5 ohmios es 45,2 voltios. *Sol.* $j4$ Ω.

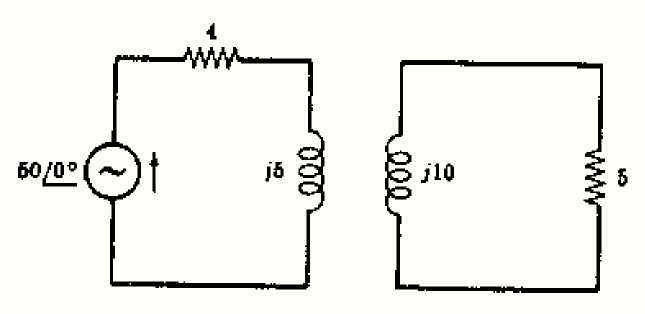



Fig. 13-41

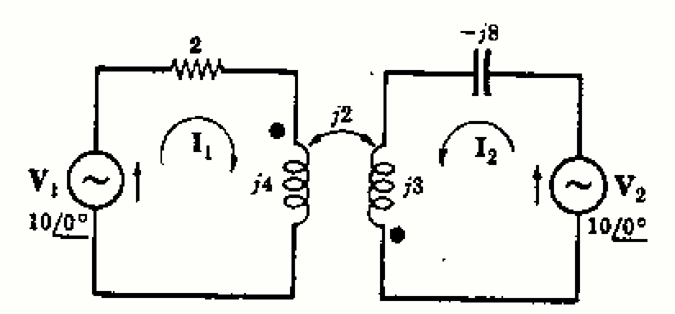


Fig. 13-42

**13-40** Determinar, en el circuito acoplado de la Fig. 13-42, las componentes de la corriente $\mathbf{I}_2$ originadas por cada una de las fuentes $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. *Sol.* $0{,}77\underline{/112{,}6^\circ}$ ; $1{,}72\underline{/86^\circ}$ .

**13-41** Determinar el valor del coeficiente de acoplo $k$ en el circuito de la Fig. 13-43 si la potencia disipada en la resistencia de 10 ohmios es 32 vatios. *Sol.* 0,791.

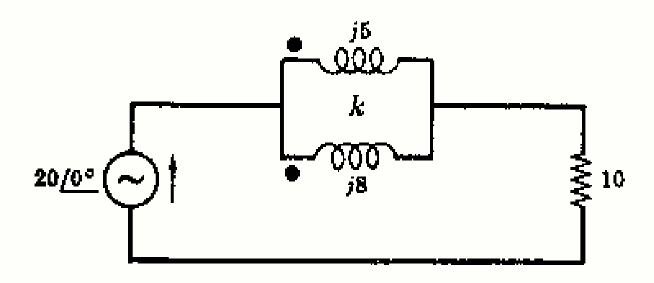


Fig. 13-43

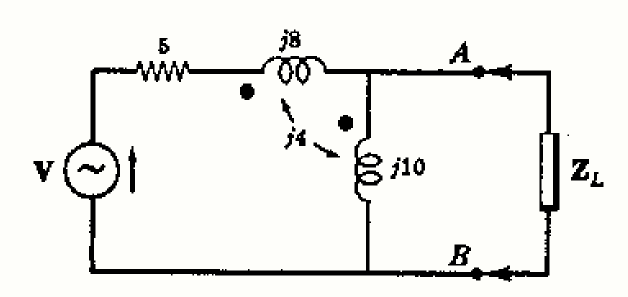


Fig. 13-44

**13-42** En el circuito de la Fig. 13-44 hallar la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ que da lugar a la transferencia de potencia máxima en los terminales $AB$. *Sol.* $1{,}4 - j2{,}74$ Ω.

**13-43** En el circuito acoplado de la Fig. 13-45 hallar la impedancia de entrada en los terminales de la fuente. *Sol.* $3 + j36{,}3$ Ω.

**13-44** En el circuito de la Fig. 13-45 hallar la tensión en la reactancia $j5$ ohmios si la fuente es $\mathbf{V} = 50\underline{/45^\circ}$ voltios. *Sol.* $25{,}2\underline{/49{,}74^\circ}$ V.

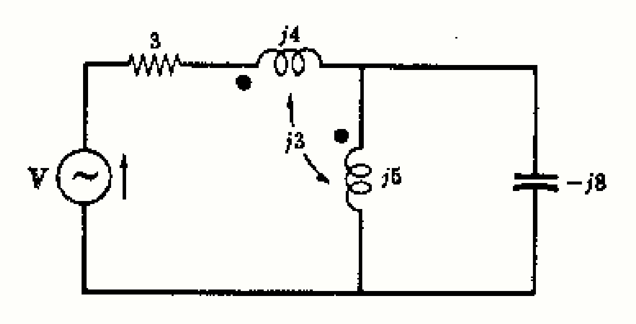


Fig. 13-45

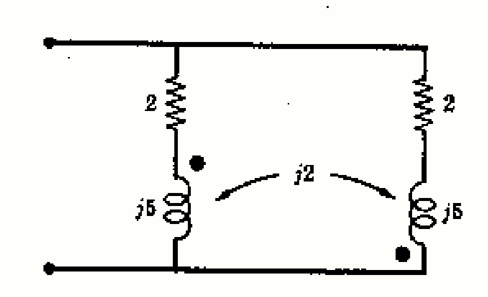


Fig. 13-46

**13-45** Hallar la impedancia equivalente del circuito acoplado de la Figura 13-46. *Sol.* $1 + j1{,}5$ Ω.

**13-46** Obtener el circuito equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito acoplado dado en la Figura 13-47.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 2 + j6{,}5\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 5 + j5$ V.

**13-47** En el circuito acoplado de la Fig. 13-47 obtener el circuito equivalente de Norton en los terminales $AB$.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 2 + j6{,}5\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 1{,}04\underline{/-27{,}9^\circ}$ A.

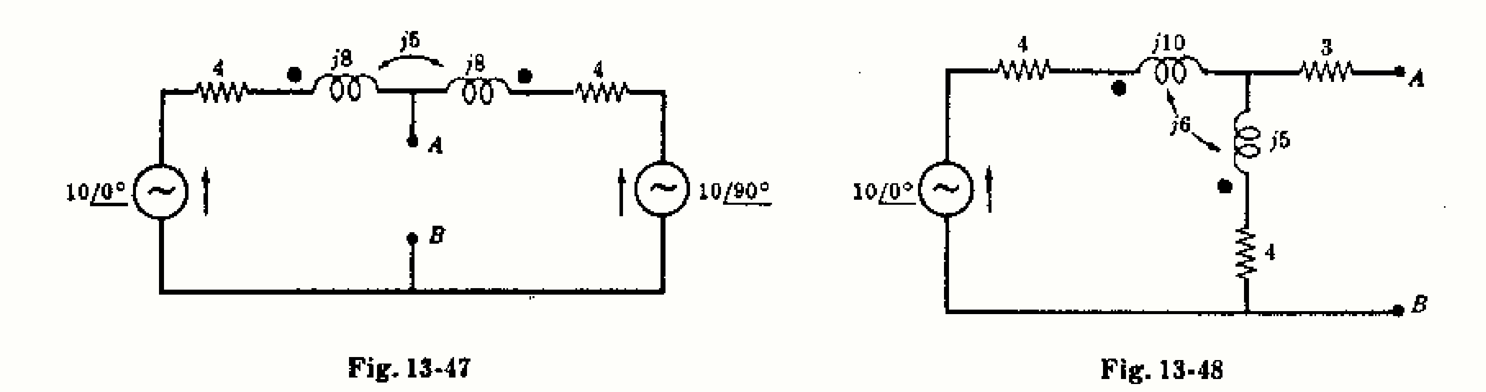



Fig. 13-47

Fig. 13-48

**13-48** Obtener el equivalente de Thevenin en los terminales $AB$ del circuito acoplado de la Figura 13-48.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 8{,}63\underline{/48{,}75^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{V}' = 4{,}84\underline{/-34{,}7^\circ}$ V.

**13-49** Hallar el equivalente de Norton del mismo circuito del problema anterior.
*Sol.* $\mathbf{Z}' = 8{,}63\underline{/48{,}75^\circ}\ \Omega$; $\mathbf{I}' = 0{,}560\underline{/-83{,}4^\circ}$ A.

**13-50** En el circuito de la Fig. 13-49 hallar la impedancia de entrada en los terminales de la fuente de tensión **V**.
*Sol.* $7{,}06 + j3{,}22\ \Omega$.

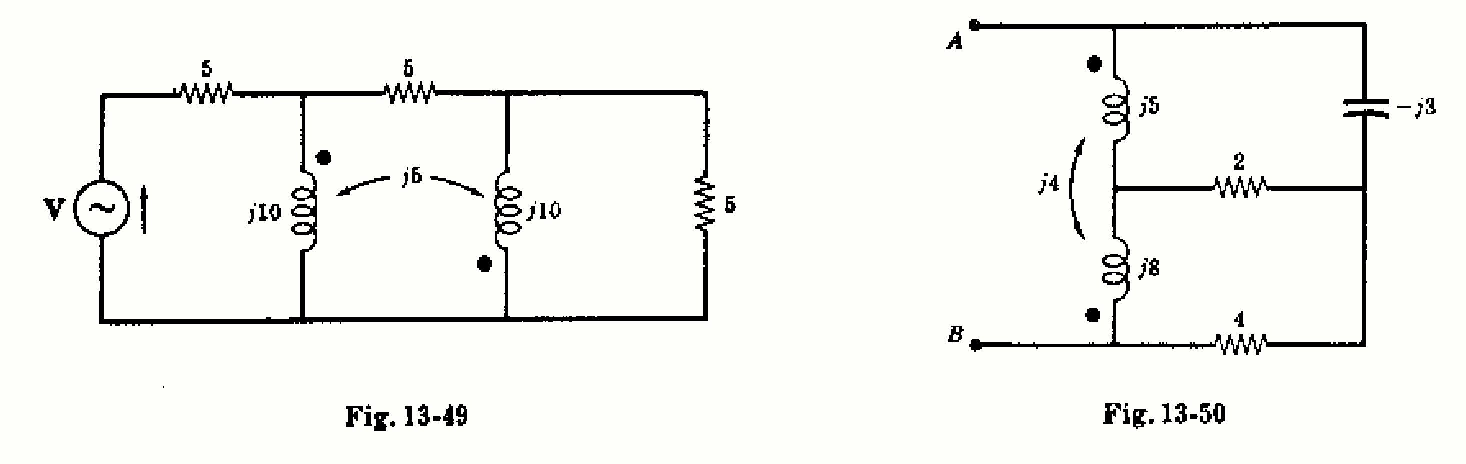



Fig. 13-49

Fig. 13-50

**13-51** Hallar la impedancia equivalente en los terminales $AB$ del circuito acoplado de la Figura 13-50.
*Sol.* $6{,}22 + j4{,}65\ \Omega$.

# Capítulo 14

# Sistemas polifásicos

## INTRODUCCION

Un sistema polifásico está formado por dos o más tensiones iguales con diferencias de fase constantes que suministran energía a las cargas conectadas a las líneas. En un sistema de dos fases, o bifásico, la diferencia de fase entre las tensiones es de 90°, mientras que en los trifásicos dicha diferencia es de 120°. Los sistemas de seis o más fases se utilizan a veces en rectificadores polifásicos para obtener una tensión rectificada poco ondulada, pero los sistemas trifásicos son los comúnmente utilizados para la generación y transmisión de la energía eléctrica.

## SISTEMAS BIFASICOS

La rotación del par de bobinas perpendiculares de la Fig. 14-1(*a*) en un campo magnético constante da lugar a tensiones inducidas con un defase constante de 90°. Si las bobinas tienen el mismo número de espiras, los fasores de tensión y las tensiones instantáneas tienen valores iguales, como se observa en sus diagramas respectivos en las Figuras 14-1(*b*) y (*c*).

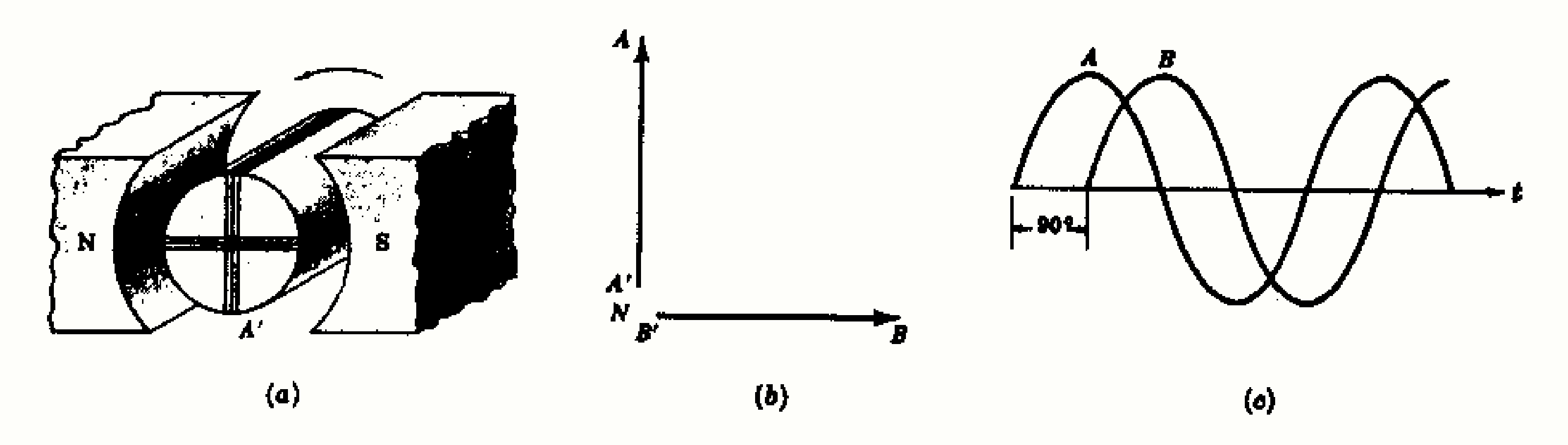



**Fig. 14-1. Sistema bifásico**

El diagrama fasorial de tensiones de la Fig. 14-1(*b*) tiene como referencia $\mathbf{V}_{BN} = V_{\text{bobina}}\underline{/0°}$ y la tensión $\mathbf{V}_{AN} = V_{\text{bobina}}\underline{/90°}$. Si se unen los extremos *A'* y *B'* de las bobinas constituyendo la línea *N*, el sistema bifásico está formado por las tres líneas *A*, *B* y *N*. La tensión compuesta entre las líneas o fases *A* y *B* (tensión de línea) es superior a la tensión simple entre una línea y neutro (tensión de fase) en el factor $\sqrt{2}$, que se obtiene de la suma $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{BN} = V_{\text{bobina}}\underline{/90°} + V_{\text{bobina}}\underline{/180°} = \sqrt{2}\,V_{\text{bobina}}\underline{/135°}$.

## SISTEMAS TRIFASICOS

Las tensiones inducidas en las tres bobinas igualmente espaciadas de la Fig. 14-2(*a*) presentan una diferencia de fase de 120°. La tensión en la bobina *A* alcanza el máximo en primer término, luego lo alcanza *B* y después *C*; la secuencia en *ABC*. Esta secuencia es evidente a partir del diagrama fasorial con su rotación positiva en sentido contrario al de las agujas del reloj, ya que los fasores pasarán por un punto fijo en el orden *A-B-C-A-B-C*···, y también se ve en el diagrama de tensiones instantáneas de la Fig. 14-2(*c*) que los máximos se suceden en el mismo orden.

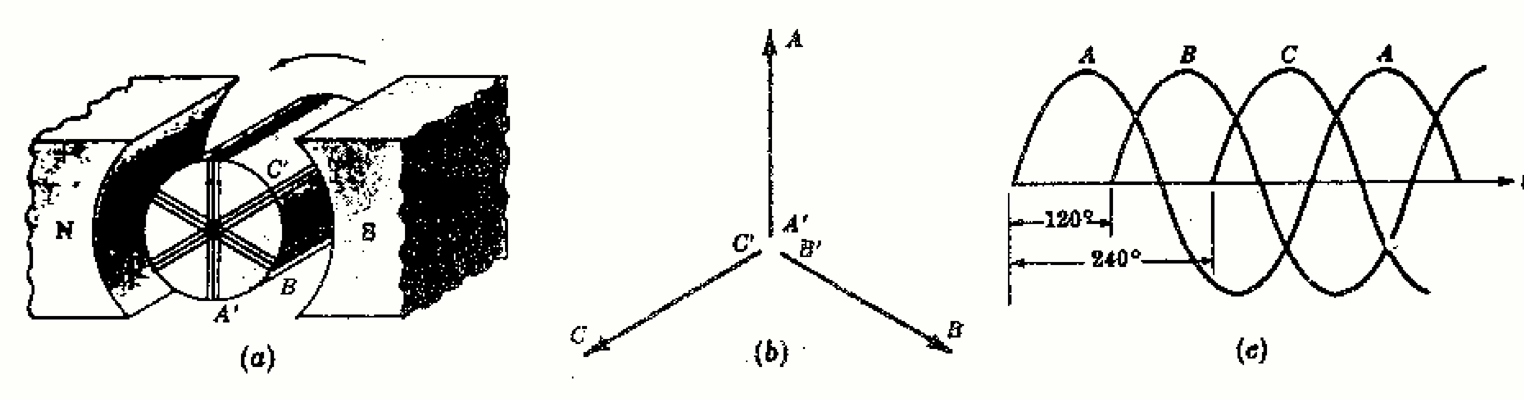



Fig. 14-2. Sistema trifásico

La rotación de las bobinas en sentido opuesto daría lugar a la secuencia *CBA* representada en la Figura 14-3.

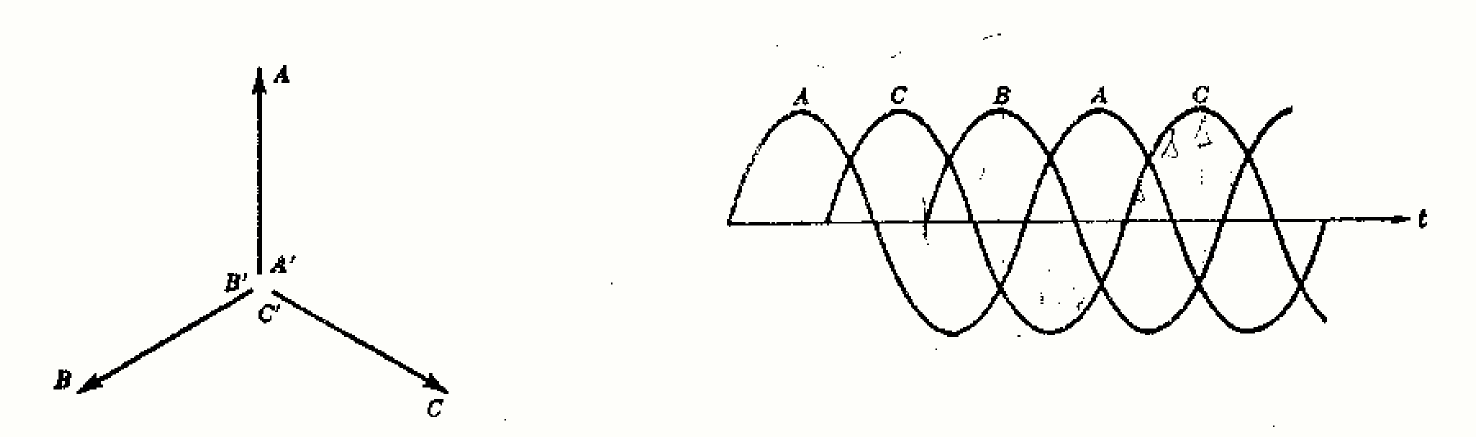



Fig. 14-3. Secuencia *CBA*

Aunque la máquina esquematizada en la Fig. 14-2(*a*) es teóricamente correcta, en la práctica se presentan limitaciones que se oponen a su utilización. Por ello, es el campo magnético el que gira mientras que el devanado trifásico permanece fijo.

La conexión de los extremos *A'*, *B'* y *C'* [Fig. 14-4(*a*)] da lugar a un alternador en estrella. Con la conexión de *A* y *B'*, *B* y *C'*, *C* y *A'* en la Fig. 14-4(*b*) resulta un alternador en triángulo.

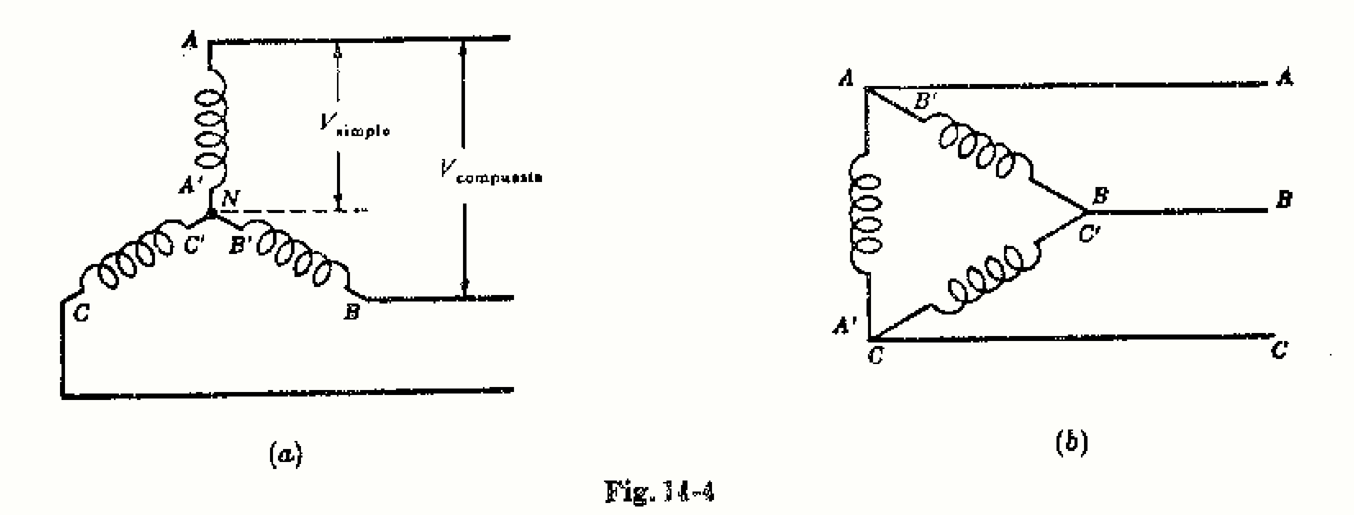



Fig. 14-4

En la conexión en estrella las corrientes de bobina y de línea son iguales y la tensión compuesta entre líneas $\sqrt{3}$ veces la tensión simple de bobina. En la conexión en triángulo la tensión compuesta entre líneas es igual a la simple de bobina, pero la corriente de ésta es $1/\sqrt{3}$ veces la corriente de línea. (Véase Problema 14-2.)

En una y otra conexión las líneas *A*, *B* y *C* proporcionan un sistema trifásico de tensiones. El punto neutro de la conexión en estrella es el cuarto conductor del sistema trifásico de cuatro conductores.

## TENSIONES EN EL SISTEMA TRIFASICO

La elección de una tensión como referencia con un ángulo de fase nulo determina los ángulos de fase de todas las demás tensiones del sistema. Como referencia se toma $V_{BC}$. Los triángulos de las Figuras 14-5(*a*) y (*b*) representan todas las tensiones para las secuencias *ABC* y *CBA*.

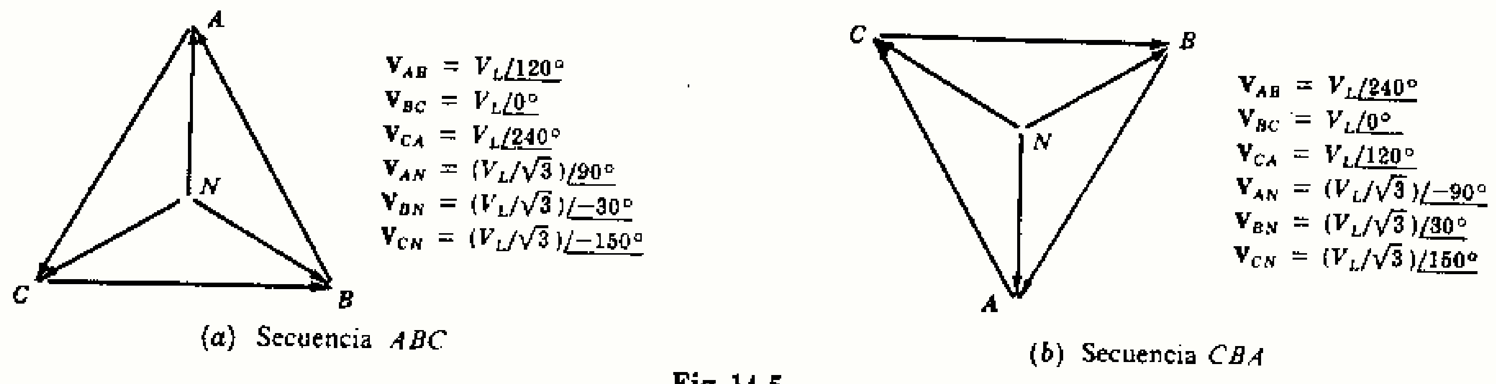



**Fig. 14-5**

La *tensión del sistema* es la tensión compuesta entre cualquier par de líneas, *A* y *B*, *B* y *C* o *C* y *A*. En el sistema de cuatro conductores el valor de la tensión simple o de fase de línea a neutro es $1/\sqrt{3}$ veces la tensión compuesta entre líneas. Por ejemplo, en un sistema trifásico, *CBA*, de cuatro conductores de 208 voltios, las tensiones compuestas entre líneas son de 208 voltios y las simples de línea a neutro son de $208/\sqrt{3}$ o 120 voltios. Con la Fig. 14-5(*b*) se determinan los ángulos de fase de las tensiones. Así, $V_{BC} = 208/0°$, $V_{AB} = 208/240°$, $V_{CA} = 208/120°$, $V_{AN} = 120/-90°$, $V_{BN} = 120/30°$ y $V_{CN} = 120/150°$.

## CARGAS EQUILIBRADAS EN UN SISTEMA TRIFASICO

**Ejemplo 1.** Un sistema trifásico *ABC* de tres conductores y 110 voltios alimenta a una conexión en triángulo de tres impedancias iguales de $5/45°$ ohmios. Determinar las intensidades de corriente en las líneas $I_A$, $I_B$ e $I_C$ y dibujar el diagrama fasorial.

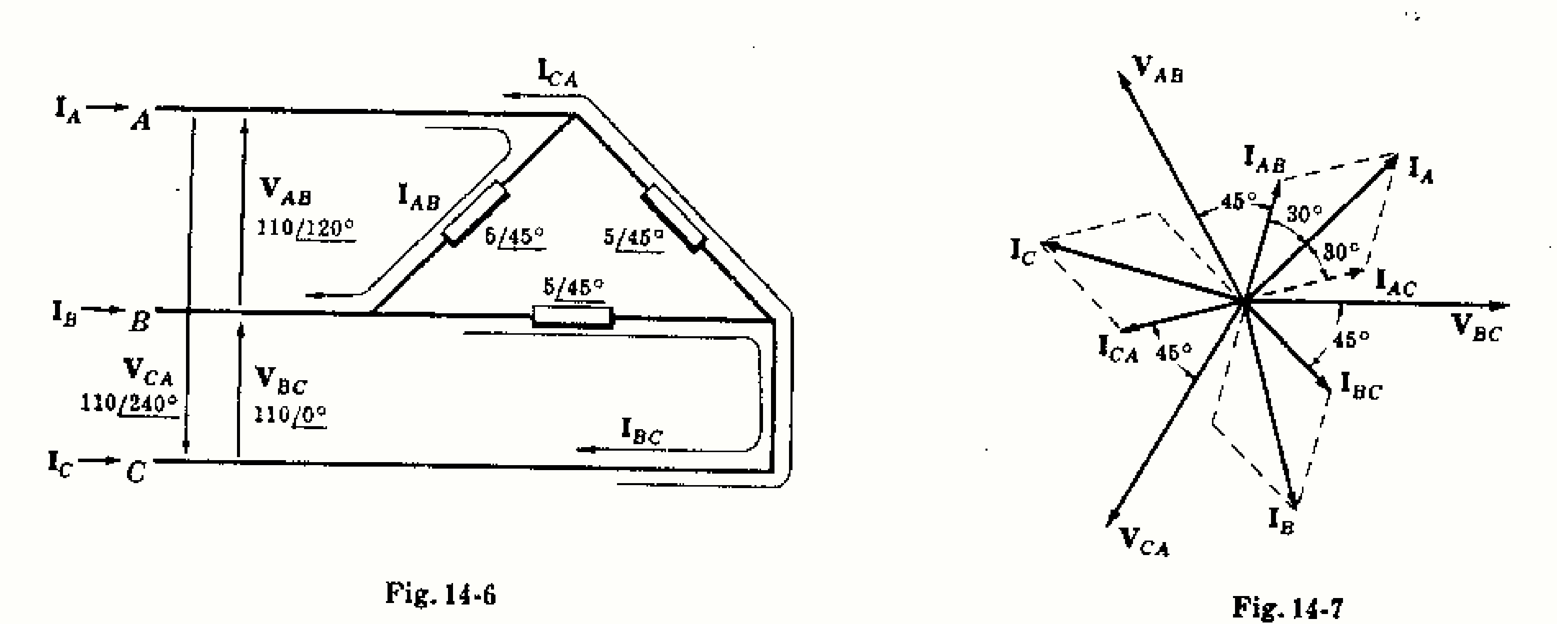



**Fig. 14-6** **Fig. 14-7**

Se traza el esquema del circuito con las tensiones en la forma indicada en la Fig. 14-6. Los sentidos positivos de las corrientes son los indicados en el diagrama. Entonces,

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{110/120°}{5/45°} = 22/75° = 5{,}7 + j21{,}2$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{110/0°}{5/45°} = 22/-45° = 15{,}55 - j15{,}55$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{110/240°}{5/45°} = 22/195° = -21{,}2 - j5{,}7$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a cada vértice del triángulo de carga,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 22\angle 75° - 22\angle 195° = 38{,}1\angle 45°$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -22\angle 75° + 22\angle -45° = 38{,}1\angle -75°$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 22\angle 195° - 22\angle -45° = 38{,}1\angle 165°$$

El diagrama fasorial de la Fig. 14-7 representa las corrientes equilibradas en las líneas de 38,1 A, con ángulos de fase de 120° entre ellas.

*En una carga equilibrada conectada en triángulo la tensión compuesta entre líneas y la simple de fase son iguales y la corriente en la línea es* $\sqrt{3}$ *veces mayor que la corriente en la fase.*

**Ejemplo 2.** Un sistema trifásico *CBA* de cuatro conductores y 208 voltios alimenta a una carga equilibrada conectada en estrella con impedancias de $20\angle -30°$ ohmios. Hallar las corrientes en las líneas y dibujar el diagrama fasorial.

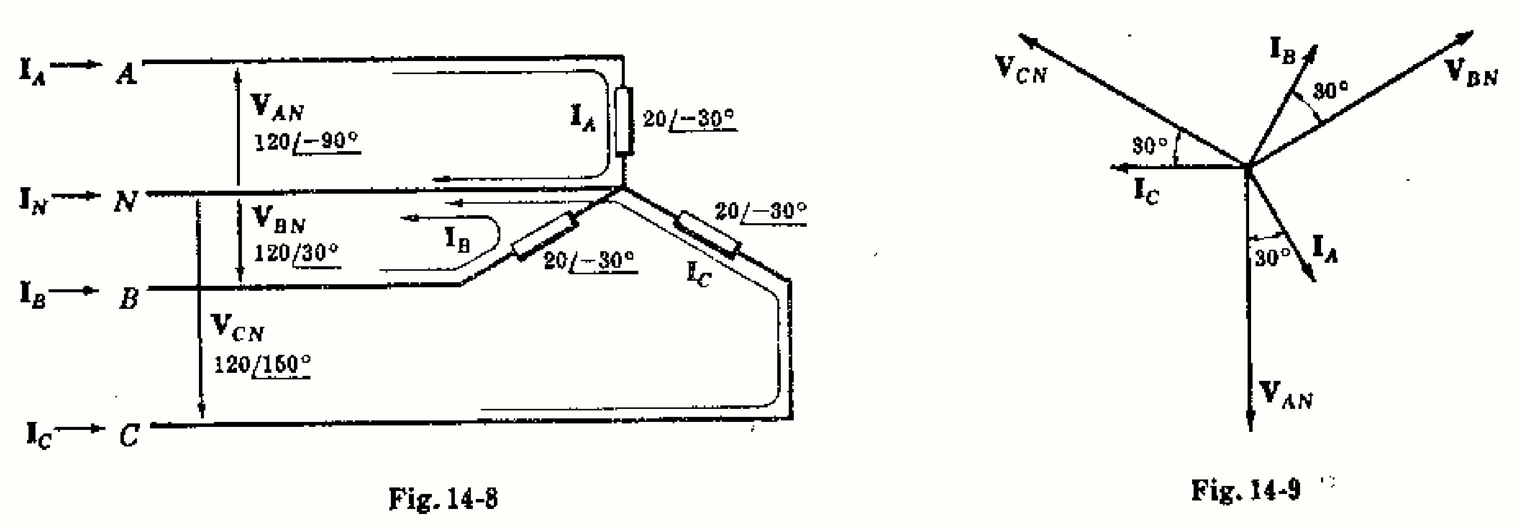



Fig. 14-8

Fig. 14-9

Se traza el esquema del circuito y se escriben en él las tensiones simples entre línea y neutro, utilizando la Fig. 14-5(*b*). Se eligen las corrientes tal como se ha señalado en la Fig. 14-8 con retorno de todas ellas por el conductor neutro. En estas condiciones,

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\angle -90°}{20\angle -30°} = 6{,}0\angle -60°$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\angle 30°}{20\angle -30°} = 6{,}0\angle 60°$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\angle 150°}{20\angle -30°} = 6{,}0\angle 180°$$

Suponiendo positivo el sentido de la corriente en el neutro hacia la carga, se tiene

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(6{,}0\angle -60° + 6{,}0\angle 60° + 6{,}0\angle 180°) = 0$$

El diagrama fasorial de la Fig. 14-9 representa las corrientes equilibradas de línea, estando cada una de ellas adelantada respecto de la tensión simple correspondiente en el ángulo de la impedancia respectiva.

*En una carga equilibrada conectada en estrella las corrientes en las líneas y en las fases son iguales. La corriente en el neutro es cero y la tensión compuesta entre líneas es* $\sqrt{3}$*, mayor que la tensión simple de fase, es decir,* $V_L = \sqrt{3}\, V_F$.

## CIRCUITO EQUIVALENTE MONOFASICO PARA CARGAS EQUILIBRADAS

De acuerdo con las transformaciones Y-Δ estudiadas en el Capítulo 12, un conjunto de tres impedancias iguales, $\mathbf{Z}_\Delta$, en una conexión en triángulo equivale a un conjunto $\mathbf{Z}_Y$ de tres impedancias iguales conectadas en estrella, siendo $\mathbf{Z}_Y = (1/3)\mathbf{Z}_\Delta$. Entonces es posible un cálculo más directo del circuito en estrella para cargas equilibradas trifásicas de cualquier tipo.

El circuito equivalente monofásico unifilar está formado por una fase del circuito trifásico de cuatro conductores, conectado en estrella de la Fig. 14-10, con una tensión que tiene el módulo de la tensión simple de fase y un ángulo de fase nulo. La corriente de línea calculada para este circuito tiene un ángulo de fase respecto del ángulo cero de la tensión. Por tanto, las intensidades reales de línea $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ tendrán un de fase, en adelanto o en retraso, respecto de las correspondientes tensiones simples de este mismo ángulo.

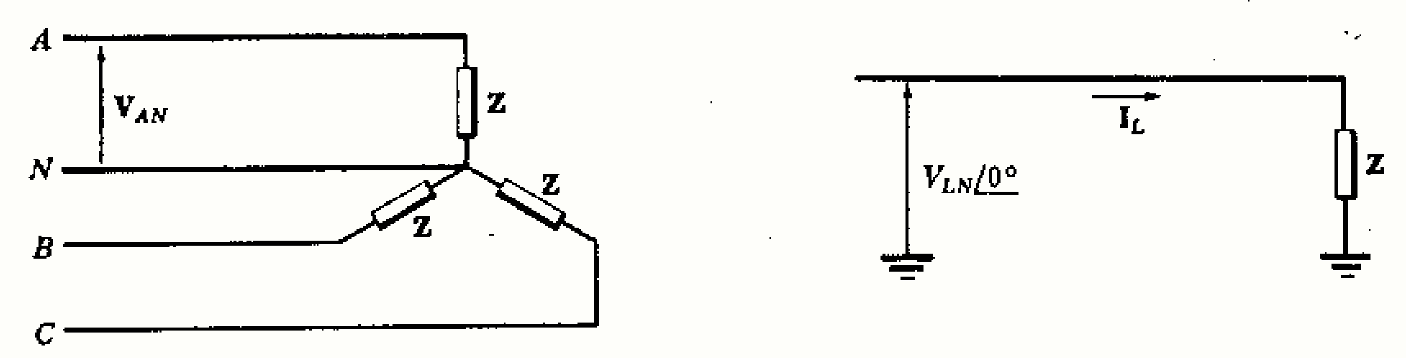



**Fig. 14-10. Circuito monofásico equivalente**

**Ejemplo 3.** Calcular las corrientes de línea del Ejemplo 1 por el método del equivalente monofásico.

Se dibuja el circuito unifilar y se señala con Δ la carga, indicando que las impedancias reales estaban conectadas en triángulo. La impedancia del equivalente en estrella es

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = (5/3)\underline{/45°}$$

y la tensión simple de línea a neutro es

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 110/\sqrt{3} = 63,5$$

Entonces, la corriente en la línea es

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}} = \frac{63,5\underline{/0°}}{(5/3)\underline{/45°}} = 38,1\underline{/-45°}$$

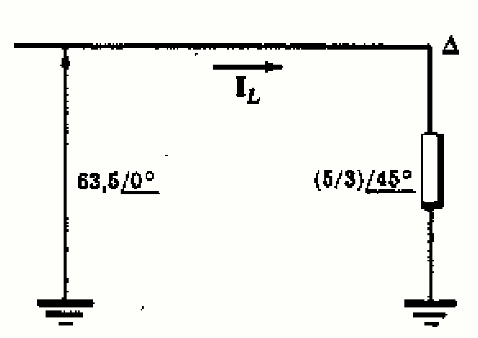



**Fig. 14-11**

Puesto que esta corriente retrasa respecto de la tensión un ángulo de 45°, las corrientes de línea $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ retrasan respecto de sus correspondientes tensiones, $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ y $\mathbf{V}_{CN}$ en 45°. Los ángulos de estas tensiones se obtienen del triángulo *ABC* de la Fig. 14-5(*a*). Seguidamente se dan las tensiones simples de línea a neutro y las corrientes correspondientes.

$$\mathbf{V}_{AN} = 63,5\underline{/90°} \qquad \mathbf{I}_A = 38,1\underline{/90° - 45°} = 38,1\underline{/45°}$$

$$\mathbf{V}_{BN} = 63,5\underline{/-30°} \qquad \mathbf{I}_B = 38,1\underline{/-30° - 45°} = 38,1\underline{/-75°}$$

$$\mathbf{V}_{CN} = 63,5\underline{/-150°} \qquad \mathbf{I}_C = 38,1\underline{/-150° - 45°} = 38,1\underline{/-195°}$$

Estas intensidades de corriente son idénticas a las que se obtuvieron en el Ejemplo 1. Si se desean las corrientes de fase en las impedancias conectadas en triángulo, se pueden obtener a partir de la expresión $I_F = I_L/\sqrt{3} = 38,1/\sqrt{3} = 22$. Los ángulos de fase de estas corrientes se deducen estableciendo primero los ángulos de las tensiones compuestas entre líneas, determinando después las corrientes con un retraso de 45°,

$$\mathbf{V}_{AB} = 110\underline{/120°} \qquad \mathbf{I}_{AB} = 22\underline{/120° - 45°} = 22\underline{/75°}$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 110\underline{/0°} \qquad \mathbf{I}_{BC} = 22\underline{/0° - 45°} = 22\underline{/-45°}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 110\underline{/240°} \qquad \mathbf{I}_{CA} = 22\underline{/240° - 45°} = 22\underline{/195°}$$

## CARGA DESEQUILIBRADA CONECTADA EN TRIANGULO

La solución del problema de la carga desequilibrada con conexión en Δ se obtiene calculando las corrientes de fase y aplicando después la primera ley de Kirchhoff a los nudos principales para deducir las tres corrientes de línea. Estas ni serán iguales ni presentarán una diferencia de fase de 120°, como ocurría en el caso de cargas equilibradas.

**Ejemplo 4.**

Un sistema trifásico $ABC$ de tres conductores y 240 voltios tiene una carga conectada en triángulo con $\mathbf{Z}_{AB} = 10\underline{/0°}$, $\mathbf{Z}_{BC} = 10\underline{/30°}$ y $\mathbf{Z}_{CA} = 15\underline{/-30°}$. Obtener las tres corrientes de línea y dibujar el diagrama fasorial.

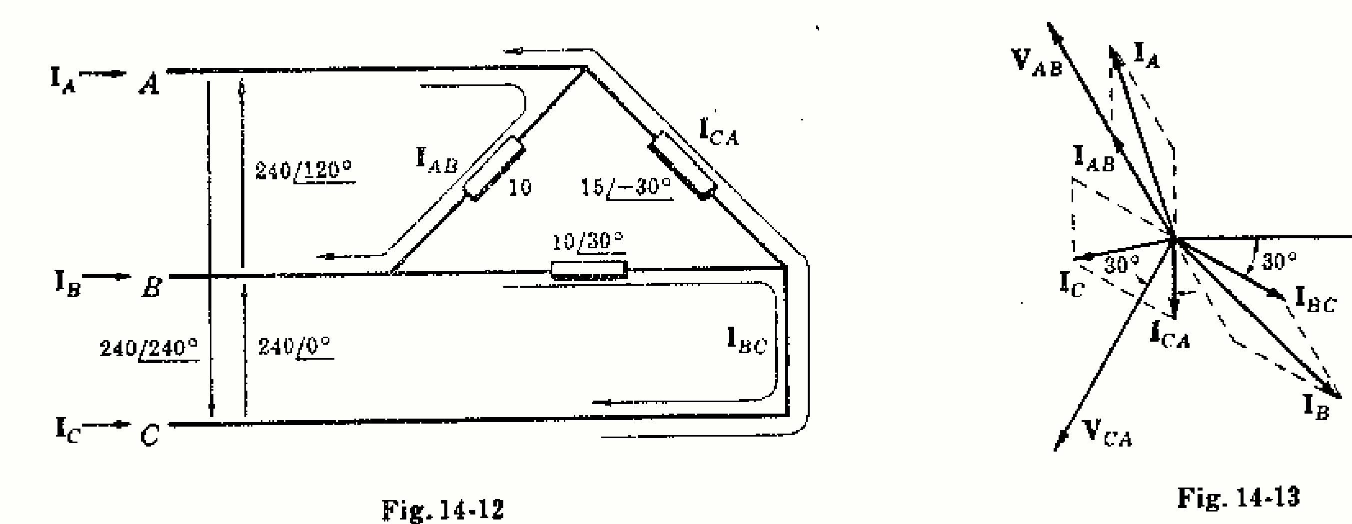



Fig. 14-12

Fig. 14-13

Construido el esquema del circuito, Fig. 14-12, con las correspondientes tensiones, las corrientes de fase, como se ve en la figura, son independientes y vienen dadas por

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{240\underline{/120°}}{10\underline{/0°}} = 24\underline{/120°}, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = 24\underline{/-30°}, \quad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = 16\underline{/270°}$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a los nudos de la carga se tiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{AC} = 24\underline{/120°} - 16\underline{/270°} = 38{,}7\underline{/108{,}1°}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -24\underline{/120°} + 24\underline{/-30°} = 46{,}4\underline{/-45°}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 16\underline{/270°} - 24\underline{/-30°} = 21{,}2\underline{/190{,}9°}$$

El diagrama fasorial correspondiente se ha representado en la Figura 14-13.

## CARGA DESEQUILIBRADA CONECTADA EN ESTRELLA CON CUATRO CONDUCTORES

En un sistema de cuatro conductores, por el neutro circulará corriente cuando la carga esté desequilibrada y la tensión en cada una de las impedancias permanecerá constante con el valor de la tensión simple de fase o línea a neutro. Las corrientes de línea son distintas y no están defasadas 120°.

**Ejemplo 5.**

Un sistema trifásico $CBA$ de cuatro conductores y 208 voltios alimenta una carga conectada en estrella con $\mathbf{Z}_A = 6\underline{/0°}$, $\mathbf{Z}_B = 6\underline{/30°}$ y $\mathbf{Z}_C = 5\underline{/45°}$. Obtener las tres corrientes en las líneas y en el neutro. Dibujar el diagrama fasorial.

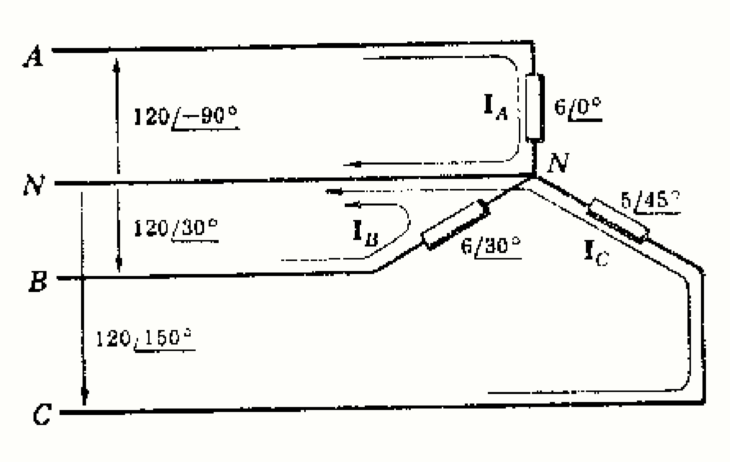



Fig. 14-14

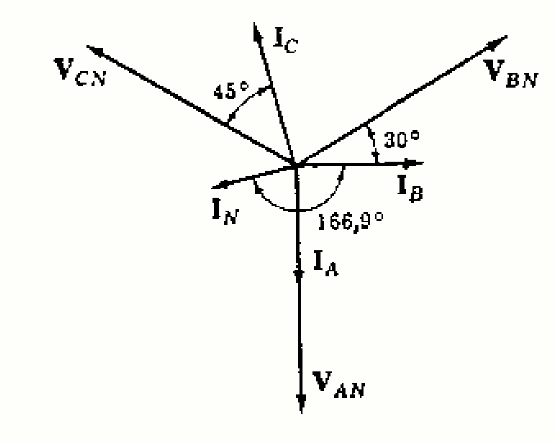



Fig. 14-15

Se construye el esquema del circuito como en la Fig. 14-14. Se aplican las tensiones y se eligen las corrientes como se han dibujado. Las intensidades son independientes y vienen dadas por

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{120\underline{/-90^\circ}}{6\underline{/0^\circ}} = 20\underline{/-90^\circ}, \quad I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = 20\underline{/0^\circ}, \quad I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = 24\underline{/105^\circ}$$

Por el conductor neutro circula una corriente cuya intensidad es la suma de las intensidades de línea $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$. Suponiendo que el sentido positivo de $\mathbf{I}_N$ es hacia la carga,

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(20\underline{/-90^\circ} + 20\underline{/0^\circ} + 24\underline{/105^\circ}) = 14{,}1\underline{/-166{,}9^\circ}$$

El diagrama fasorial es el representado en la Figura 14-15.

## CARGA DESEQUILIBRADA CONECTADA EN ESTRELLA CON TRES CONDUCTORES:

Si solamente hay tres líneas *A*, *B* y *C* conectadas a una carga en estrella desequilibrada, el punto común de las tres impedancias de carga no está al potencial del neutro y se designa por la letra «*O*» en lugar de *N*. Las tensiones entre los extremos de las tres impedancias pueden variar considerablemente desde el valor de la tensión simple como se ve en el triángulo de tensiones que relaciona todas las tensiones del circuito. Tiene particular interés el desplazamiento a «*O*» desde *N*, ***tensión de desplazamiento del neutro***.

**Ejemplo 6.**

Un sistema trifásico, *CBA*, trifilar, de 208 voltios, tiene una carga en estrella con $\mathbf{Z}_A = 6\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 6\underline{/30^\circ}$ y $\mathbf{Z}_C = 5\underline{/45^\circ}$. Obtener las corrientes de línea y la tensión en cada impedancia. Construir el triángulo de tensiones y determinar la tensión de desplazamiento del neutro, $\mathbf{V}_{ON}$.

Se dibuja el esquema del circuito y se eligen las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ como en la Fig. 14-16. El sistema de ecuaciones en forma matricial en las intensidades $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ es

$$\begin{bmatrix} 6\underline{/0^\circ} + 6\underline{/30^\circ} & -6\underline{/30^\circ} \\ -6\underline{/30^\circ} & 6\underline{/30^\circ} + 5\underline{/45^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\underline{/240^\circ} \\ 208\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

de donde $\mathbf{I}_1 = 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}$ A e $\mathbf{I}_2 = 26{,}5\underline{/-63{,}4^\circ}$ A. Las corrientes en las líneas $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$, con el sentido dado en el esquema, valen

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 26{,}5\underline{/-63{,}4^\circ} - 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ} = 15{,}45\underline{/-2{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 26{,}5\underline{/116{,}6^\circ}$$

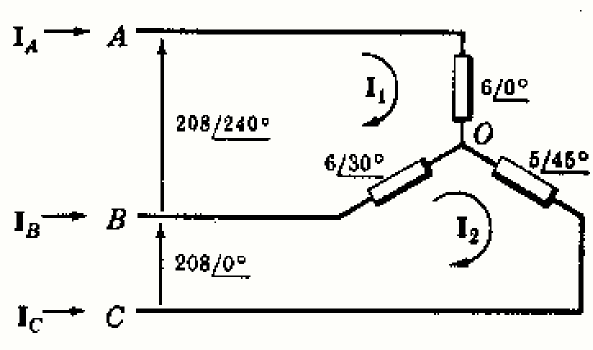


Fig. 14-16

Las tensiones en las tres impedancias vienen dadas por los productos de las corrientes en las líneas por las impedancias correspondientes.

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{Z}_A\mathbf{I}_A = (6\underline{/0^\circ})(23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}) = 139{,}8\underline{/261{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{Z}_B\mathbf{I}_B = (6\underline{/30^\circ})(15{,}45\underline{/-2{,}5^\circ}) = 92{,}7\underline{/27{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{Z}_C\mathbf{I}_C = (5\underline{/45^\circ})(26{,}5\underline{/116{,}6^\circ}) = 132{,}5\underline{/161{,}6^\circ}$$

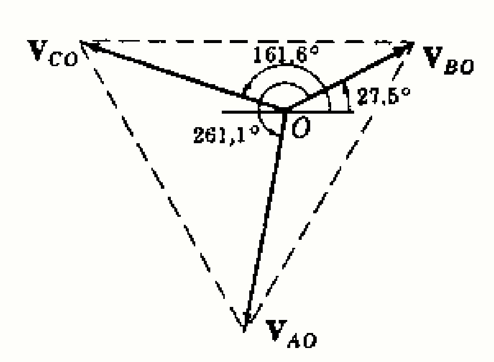


Fig. 14-17

El diagrama fasorial de estas tres tensiones, Fig. 14-17, forma un triángulo equilátero. En la Fig. 14-18 se ha dibujado nuevamente este triángulo, añadiendo del neutro, con lo que se puede observar la tensión de desplazamiento $\mathbf{V}_{ON}$. Esta tensión puede calcularse utilizando cualquiera de los tres puntos *A*, *B* o *C* y siguiendo la notación convencional del doble subíndice. Utilizando el punto *A* se obtiene

$$\mathbf{V}_{ON} = \mathbf{V}_{OA} + \mathbf{V}_{AN} = -139{,}8\underline{/261{,}1^\circ} + 120\underline{/-90^\circ} = 28{,}1\underline{/39{,}8^\circ}$$

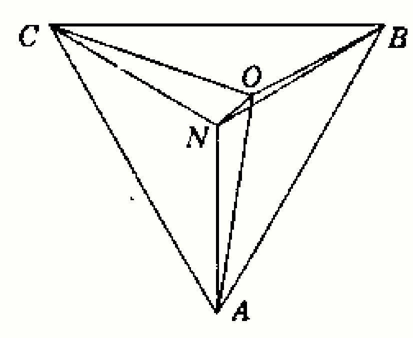


Fig. 14-18

## CARGA DESEQUILIBRADA EN ESTRELLA CON TRES CONDUCTORES METODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL NEUTRO

En el Ejemplo 6 se ha obtenido la tensión de desplazamiento del neutro $\mathbf{V}_{ON}$ en función de las tensiones de carga. Si se determina una relación para $\mathbf{V}_{ON}$ independiente de las tensiones de carga, las corrientes y tensiones buscadas en el Ejemplo 6 se obtendrán con mayor facilidad, como puede verse en el Ejemplo 7.

Para obtener la tensión $\mathbf{V}_{ON}$ se escriben las corrientes de línea en función de las tensiones en las cargas y las admitancias de carga.

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A, \quad \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B, \quad \mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C \qquad (1)$$

Aplicando ahora la primera ley de Kirchhoff en el punto $O$, Fig. 14-19, se podrá escribir

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = 0 \qquad (2)$$

o bien $$\mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 0 \qquad (3)$$

Utilizando el diagrama de la Fig. 14-18 se pueden expresar las tensiones $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ y $\mathbf{V}_{CO}$ en función de sus tensiones componentes,

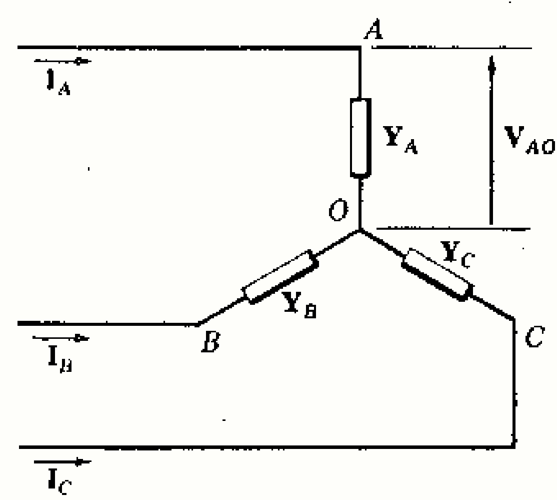


Fig. 14-19

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad (4)$$

Llevando (4) a (3) se tiene

$$(\mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_A + (\mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_B + (\mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_C = 0 \qquad (5)$$

de donde $$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C} \qquad (6)$$

Las tensiones $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ y $\mathbf{V}_{CN}$ en la ecuación (6) se obtienen del triángulo de la Fig. 14-5 para la secuencia dada en el problema. Las admitancias $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Y}_B$ e $\mathbf{Y}_C$ son los recíprocos de las impedancias de carga $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$. Por tanto, puesto que todos los términos de (6) o son datos o se obtienen con facilidad, puede calcularse la tensión de desplazamiento del neutro y utilizarla luego para determinar las corrientes en las líneas.

**Ejemplo 7.**

Obtener las corrientes en las líneas y las tensiones en las cargas del Ejemplo 6 por el método de la tensión de desplazamiento del neutro.

Observando la Fig. 14-20, la ecuación para la tensión de desplazamiento del neutro es

$$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C}$$

siendo

$$\mathbf{Y}_A = 1/(6\underline{/0^\circ}) = 0{,}1667\underline{/0^\circ} = 0{,}1667$$

$$\mathbf{Y}_B = 1/(6\underline{/30^\circ}) = 0{,}1667\underline{/-30^\circ} = 0{,}1443 - j0{,}0833$$

$$\mathbf{Y}_C = 1/(5\underline{/45^\circ}) = 0{,}20\underline{/-45^\circ} = 0{,}1414 - j0{,}1414$$

$$\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C = 0{,}4524 - j0{,}2247 = 0{,}504\underline{/-26{,}5^\circ}$$

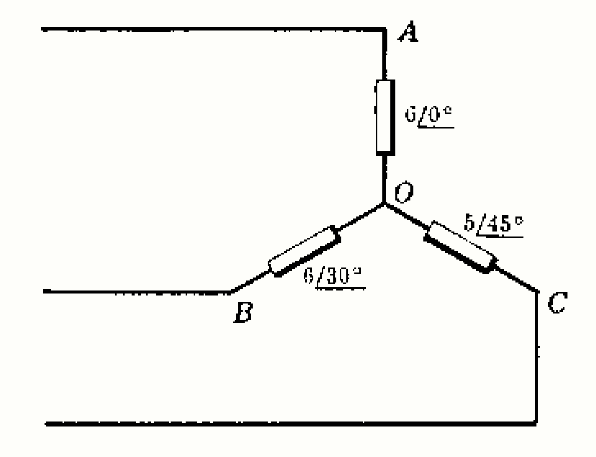


Fig. 14-20

y $$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A = 120\underline{/-90^\circ}(0{,}1667\underline{/0^\circ}) = 20\underline{/-90^\circ} = -j20$$

$$\mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B = 120\underline{/30^\circ}(0{,}1667\underline{/-30^\circ}) = 20\underline{/0^\circ} = 20$$

$$\mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 120\underline{/150^\circ}(0{,}20\underline{/-45^\circ}) = 24\underline{/105^\circ} = -6{,}2 + j23{,}2$$

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 13{,}8 + j3{,}2 = 14{,}1\underline{/13{,}1^\circ}$$

Por tanto, $$\mathbf{V}_{ON} = 14{,}1\underline{/13{,}1^\circ}/0{,}504\underline{/-26{,}5^\circ} = 28{,}0\underline{/39{,}6^\circ}$$

Las tensiones $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ y $\mathbf{V}_{CO}$ se obtienen a partir de $\mathbf{V}_{NO}$ y de la correspondiente tensión simple de línea a neutro.

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle{-90^\circ} - 28{,}0\angle{39{,}6^\circ} = 139{,}5\angle{261{,}1^\circ}$$
$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle{30^\circ} - 28{,}0\angle{39{,}6^\circ} = 92{,}5\angle{27{,}1^\circ}$$
$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle{150^\circ} - 28{,}0\angle{39{,}6^\circ} = 132{,}5\angle{161{,}45^\circ}$$

Las corrientes en las líneas se obtienen fácilmente de las tensiones y correspondientes admitancias de carga:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\,\mathbf{Y}_A = 139{,}5\angle{261{,}1^\circ}\,(0{,}1667\angle{0^\circ}) = 23{,}2\angle{261{,}1^\circ}$$
$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\,\mathbf{Y}_B = 92{,}5\angle{27{,}1^\circ}\,(0{,}1667\angle{-30^\circ}) = 15{,}4\angle{-2{,}9^\circ}$$
$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\,\mathbf{Y}_C = 132{,}5\angle{161{,}45^\circ}\,(0{,}20\angle{-45^\circ}) = 26{,}5\angle{116{,}45^\circ}$$

Las corrientes y tensiones anteriores están de acuerdo con las obtenidas en el Ejemplo 6.

## POTENCIA EN CARGAS TRIFASICAS EQUILIBRADAS

Como por las impedancias de las fases en cargas equilibradas, triángulo o estrella, circulan corrientes iguales, la potencia por fase es un tercio de la potencia total. La tensión entre los extremos de la impedancia $\mathbf{Z}_\Delta$, Fig. 14-21(*a*), es la *tensión compuesta entre líneas* y la corriente es la *corriente de fase*. El ángulo entre la tensión y la intensidad es el de la impedancia. Entonces, la potencia por fase es

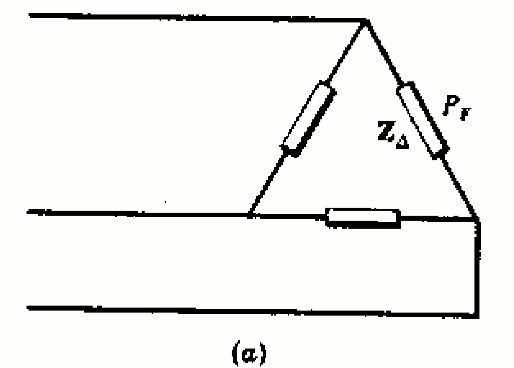
$$P_F = V_L I_F \cos\theta \qquad (7)$$

y la potencia total

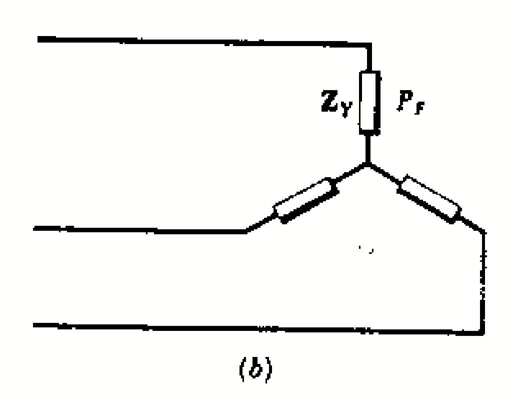
$$P_T = 3\,V_L I_F \cos\theta \qquad (8)$$

Puesto que en las cargas equilibradas en $\Delta$, $I_L = \sqrt{3}\,I_F$,

$$P_T = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta \qquad (9)$$



(*a*)



(*b*)

Fig. 14-21

Por las impedancias conectadas en la estrella de la Fig. 14-21(*b*) circulan las *corrientes de línea* y la tensión en $\mathbf{Z}_Y$ es la *tensión simple de fase*. El ángulo entre ellas es el de la impedancia. Entonces, la potencia por fase es

$$P_F = V_F I_L \cos\theta \qquad (10)$$

y la potencia total

$$P_T = 3\,V_F I_L \cos\theta \qquad (11)$$

Puesto que $V_L = \sqrt{3}\,V_F$,

$$P_T = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta \qquad (12)$$

Las ecuaciones (*9*) y (*12*) son idénticas, por tanto, la potencia total en cualquier carga trifásica equilibrada viene dada por $\sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta$, siendo $\theta$ el ángulo de la impedancia de carga o el ángulo en una impedancia equivalente en el caso en que varias cargas equilibradas sean alimentadas por el mismo sistema.

La potencia aparente total $S_T$ y la potencia reactiva total $Q_T$ están relacionadas con $P_T$, como se vio en el Capítulo 7. Por consiguiente, una carga trifásica equilibrada tiene unas potencias activa, aparente y reactiva, que vienen dadas por

$$P_T = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta \qquad S_T = \sqrt{3}\,V_L I_L \qquad Q_T = \sqrt{3}\,V_L I_L \,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (13)$$

## VATIMETROS Y CARGAS EN ESTRELLA CON CUATRO CONDUCTORES

Un vatímetro es un aparato de medida con una bobina de tensión y otra de intensidad, dispuestas de forma que la desviación es proporcional a $VI \cos \theta$, en donde $\theta$ es el ángulo entre la tensión y la intensidad. Una carga conectada en estrella, con cuatro conductores, necesita tres vatímetros dispuestos en cada línea como muestra la Figura 14-22(*a*).

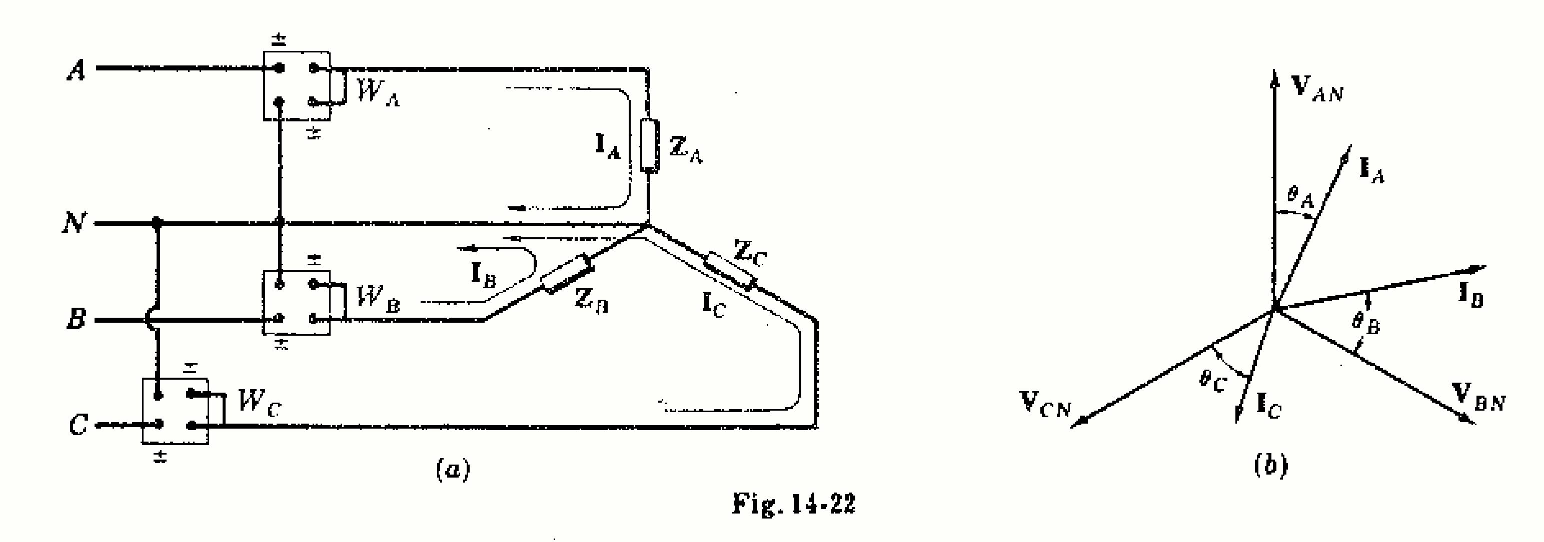



Fig. 14-22

El diagrama fasorial de la Fig. 14-22(*b*) supone que la corriente está retrasada en la fase *A* y adelantada en las fases *B* y *C*, con defases $\theta_A$, $\theta_B$ y $\theta_C$ respectivamente. Las lecturas del vatímetro son, entonces,

$$W_A = V_{AN} I_A \cos \measuredangle_A^{AN}, \qquad W_B = V_{BN} I_B \cos \measuredangle_B^{BN}, \qquad W_C = V_{CN} I_C \cos \measuredangle_C^{CN} \qquad (14)$$

en donde $\measuredangle_A^{AN}$ representa el ángulo entre $\mathbf{V}_{AN}$ e $\mathbf{I}_A$. El vatímetro $W_A$ lee la potencia en la fase *A* y los $W_B$ y $W_C$, en las fases *B* y *C*. La potencia total es

$$P_T = W_A + W_B + W_C \qquad (15)$$

## METODO DE LOS DOS VATIMETROS

La potencia total en una carga trifásica con tres conductores viene dada por la suma de las lecturas de dos vatímetros conectados en dos líneas cualesquiera con sus bobinas de tensión conectadas a la tercera línea, como se representa en la Fig. 14-23. Las lecturas de los dos aparatos son

$$W_A = V_{AB} I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \qquad \text{y} \qquad W_C = V_{CB} I_C \cos \measuredangle_C^{CB} \qquad (16)$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff a los nudos *A* y *C* de la carga en triángulo se obtiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} \qquad (17)$$

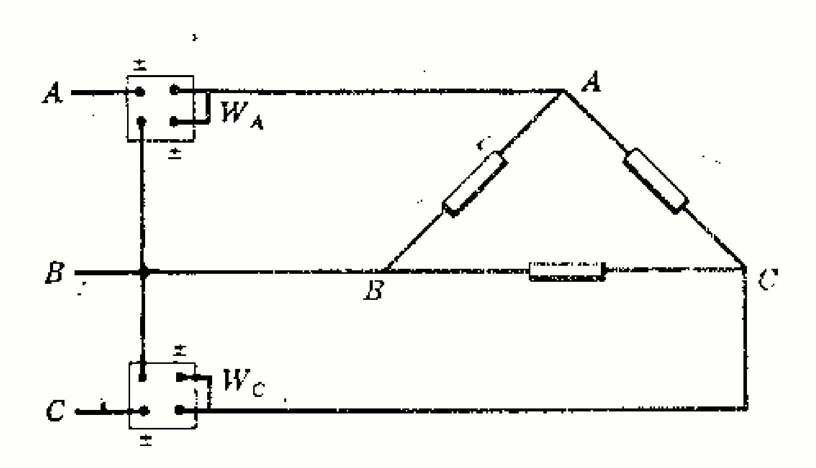



Fig. 14-23

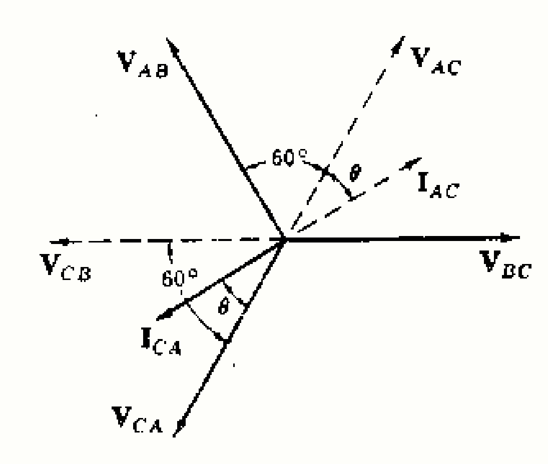



Fig. 14-24

Sustituyendo las expresiones (*17*) de $\mathbf{I}_A$ e $\mathbf{I}_C$ en las ecuaciones (*16*) se obtiene

$$\begin{aligned} W_A &= V_{AB} I_{AB} \cos \measuredangle_{AB}^{AB} + V_{AB} I_{AC} \cos \measuredangle_{AC}^{AB} \\ W_C &= V_{CB} I_{CA} \cos \measuredangle_{CA}^{CB} + V_{CB} I_{CB} \cos \measuredangle_{CB}^{CB} \end{aligned} \tag{18}$$

Los términos $V_{AB} I_{AB} \cos \measuredangle_{AB}^{AB}$ y $V_{CB} I_{CB} \cos \measuredangle_{CB}^{CB}$ se reconocen inmediatamente, ya que son las potencias en las fases $AB$ y $CB$ de la carga. Los otros dos términos contienen $V_{AB}I_{AC}$ y $V_{CB}I_{CA}$ que pueden escribirse ahora como $V_L I_{AC}$, ya que tanto $V_{AB}$ como $V_{CB}$ son tensiones compuestas entre líneas, e $I_{AC} = I_{CA}$. Para identificar estos dos términos se construye el diagrama fasorial de la Fig. 14-24, en que se ha supuesto que la corriente $\mathbf{I}_{AC}$ retrasa respecto de $\mathbf{V}_{AC}$ un ángulo $\theta$.

El diagrama se deduce,

$$\measuredangle_{AC}^{AB} = 60° + \theta \qquad \text{y} \qquad \measuredangle_{CA}^{CB} = 60° - \theta \tag{19}$$

Sumando los dos términos restantes de (*18*) y sustituyendo $(60° + \theta)$ y $(60° - \theta)$ en lugar de $\measuredangle_{AC}^{AB}$ y $\measuredangle_{CA}^{CB}$ respectivamente,

$$V_L I_{AC} \cos(60° + \theta) + V_L I_{AC} \cos(60° - \theta) \tag{20}$$

Como $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, se puede escribir

$$V_L I_{AC} (\cos 60° \cos\theta - \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen}\theta + \cos 60° \cos\theta + \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen}\theta) \tag{21}$$

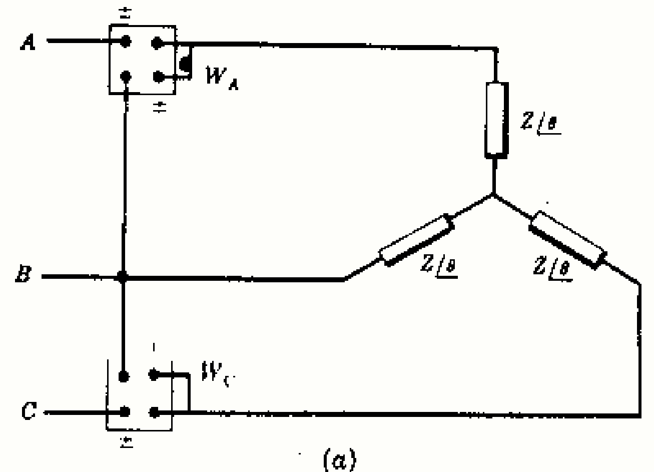
o bien

$$V_L I_{AC} \cos\theta \tag{22}$$

que es la potencia en la fase restante, esto es, en $AC$. Por tanto, hemos demostrado que dos vatímetros dan la potencia total en una carga conectada en triángulo. La aplicación del método de los dos vatímetros al caso de una carga conectada en estrella se deja como ejercicio al alumno.

## METODO DE LOS DOS VATIMETROS APLICADO A CARGAS EQUILIBRADAS

Para ver la aplicación del método de los dos vatímetros a cargas equilibradas consideremos la conexión en estrella de tres impedancias iguales representada en la Fig. 14-25(*a*). En la Fig. 14-25 (*b*) se ha dibujado el diagrama fasorial para la secuencia $ABC$ en la hipótesis de corriente en retraso $\theta$.




(*a*) (*b*)

**Fig. 14-25**

Con los vatímetros en las líneas $A$ y $C$ sus lecturas son

$$W_A = V_{AB} I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \qquad \text{y} \qquad W_C = V_{CB} I_C \cos \measuredangle_C^{CB} \tag{23}$$

Del diagrama fasorial,

$$\measuredangle_A^{AB} = 30° + \theta \qquad \text{y} \qquad \measuredangle_C^{CB} = 30° - \theta \tag{24}$$

Sustituyendo en (23),

$$W_A = V_{AB} I_A \cos(30° + \theta) \qquad y \qquad W_C = V_{CB} I_C \cos(30° - \theta) \tag{25}$$

Si el método de los dos vatímetros se utiliza con cargas equilibradas, las lecturas son $V_L I_L \cos(30° + \theta)$ y $V_L I_L \cos(30° - \theta)$ en donde $\theta$ es el ángulo de la impedancia. Ambas lecturas se pueden emplear para hallar el ángulo $\theta$.

Escribiendo la expresión de $W_1$ y teniendo en cuenta la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos, se obtiene

$$W_1 = V_L I_L (\cos 30° \cos\theta - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen}\theta) \tag{26}$$

Análogamente,

$$W_2 = V_L I_L (\cos 30° \cos\theta + \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen}\theta) \tag{27}$$

Por tanto, la suma vale $W_1 + W_2 = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta$ y la diferencia $W_2 - W_1 = V_L I_L \operatorname{sen}\theta$.

de donde

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2}\right) \tag{28}$$

En consecuencia, la tangente del ángulo en **Z** es $\sqrt{3}$ veces la relación entre la diferencia y la suma de las lecturas. Sin conocer las líneas en las que están colocados los medidores ni la secuencia del sistema no es posible distinguir entre $+\theta$ y $-\theta$. Por el contrario, si se conocen ambas cosas, puede determinarse el signo por las expresiones siguientes. Para la secuencia *ABC*,

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_A - W_B}{W_A + W_B} = \sqrt{3}\,\frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3}\,\frac{W_C - W_A}{W_C + W_A} \tag{29}$$

y para *CBA*,

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_B - W_A}{W_B + W_A} = \sqrt{3}\,\frac{W_C - W_B}{W_C + W_B} = \sqrt{3}\,\frac{W_A - W_C}{W_A + W_C} \tag{30}$$

# Problemas resueltos

**14-1** Demostrar que la tensión compuesta entre líneas $V_L$ en un sistema trifásico es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión simple de fase o de línea a neutro $V_F$.

En la Fig. 14-26 se representan las tensiones del sistema trifásico en un triángulo equilátero en el que la longitud de un lado es proporcional a la tensión compuesta $V_L$ y el punto neutro $N$ está en el centro del triángulo.

La tensión simple tiene como proyección horizontal el valor $V_F \cos 30°$, o sea, $V_F\sqrt{3}/2$. Puesto que la base es el doble de dicha proyección,

$$V_L = 2(V_F\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_F$$

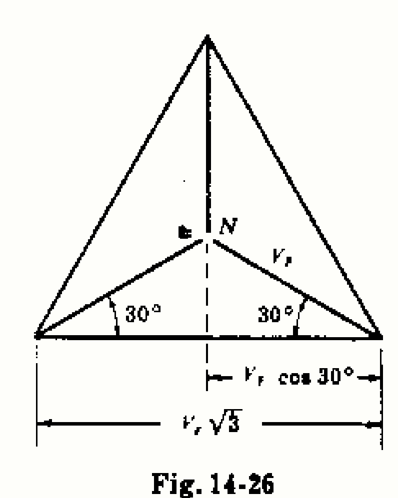



Fig. 14-26

**14-2** Calcular las intensidades de corriente en los devanados a plena carga para conexión en triángulo y en estrella, en un alternador trifásico de 25 kVA a 480 voltios.

En la conexión en estrella la corriente en la línea y en el devanado son iguales. En un sistema trifásico equilibrado,

$$S(\text{kVA}) = \sqrt{3}\, V_L I_L \times 10^{-3} \qquad y \qquad I_L = \frac{S(\text{kVA})}{\sqrt{3}\, V_L \times 10^{-3}} = \frac{25}{\sqrt{3}\,(480 \times 10^{-3})} = 30{,}1$$

El alternador con conexión en triángulo y de la misma potencia aparente (kVA) tiene también corrientes a plena carga de 30,1 A. Las corrientes en los devanados son $I_L/\sqrt{3}$. Por tanto, $I_{\text{bobina}} = 30{,}1/\sqrt{3} = 17{,}35$ A.

**14-3** Un sistema bifásico con una tensión simple de fase de 150 voltios alimenta a una carga equilibrada, conectada en triángulo, con impedancias de $10\underline{/53,1^\circ}$ ohmios. Hallar las intensidades en las líneas y la potencia total.

En un sistema bifásico las dos tensiones simples tienen una diferencia de fase de 90°. Por tanto, si $\mathbf{V}_{BN}$ se toma como referencia, $\mathbf{V}_{AN}$ está a 90°, como se observa en la Fig. 14-27. La tensión compuesta entre líneas es igual a $\sqrt{2}$ veces la tensión simple de línea a neutro. Por consiguiente, $V_{AB} = \sqrt{2}\,(150) = 212$ V. Las corrientes en las fases son

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{212\underline{/135^\circ}}{10\underline{/53,1^\circ}} = 21,2\underline{/81,9^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{150\underline{/90^\circ}}{10\underline{/53,1^\circ}} = 15,0\underline{/36,9^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = \frac{150\underline{/0^\circ}}{10\underline{/53,1^\circ}} = 15,0\underline{/-53,1^\circ}$$

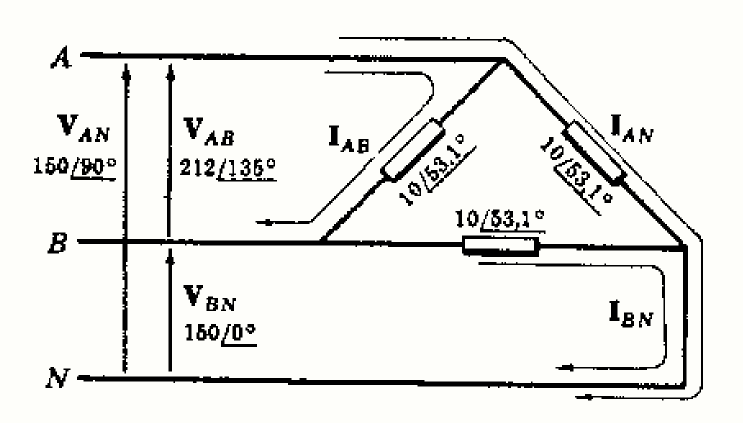



**Fig. 14-27**

Las corrientes en las líneas se obtienen a partir de las de fase sin más que aplicar la primera ley de Kirchhoff a los nudos de la carga en triángulo. Si se admite como sentido positivo para estas corrientes el sentido hacia la carga, se tiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} = \quad 15,0\underline{/36,9^\circ} + 21,2\underline{/81,9^\circ} \quad = 33,5\underline{/63,4^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BN} + \mathbf{I}_{BA} = \quad 15,0\underline{/-53,1^\circ} - 21,2\underline{/81,9^\circ} = 33,6\underline{/-79,7^\circ}$$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{NA} + \mathbf{I}_{NB} = -15,0\underline{/36,9^\circ} - 15,0\underline{/-53,1^\circ} = 21,2\underline{/171,86^\circ}$$

La potencia total se obtiene utilizando la corriente eficaz en las impedancias

$$P_{AB} = RI_{AB}^2 = (6)(21,2)^2 = 2700 \text{ W}$$

$$P_{AN} = RI_{AN}^2 = (6)(15,0)^2 = 1350 \text{ W}$$

$$P_{BN} = RI_{BN}^2 = (6)(15,0)^2 = 1350 \text{ W}$$

$$\text{Potencia total} = 5400 \text{ W}$$

**14-4** Un sistema trifásico *ABC* con tres conductores a 100 voltios alimenta a una carga con conexión Δ e impedancias de $20\underline{/45^\circ}$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y dibujar el diagrama fasorial.

Se aplican las tensiones compuestas entre líneas de secuencia *ABC* al circuito dado en la Fig. 14-28. Entonces, las corrientes elegidas son

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\underline{/120^\circ}}{20\underline{/45^\circ}} = 5,0\underline{/75^\circ}, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = 5,0\underline{/-45^\circ}, \quad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = 5,0\underline{/195^\circ}$$

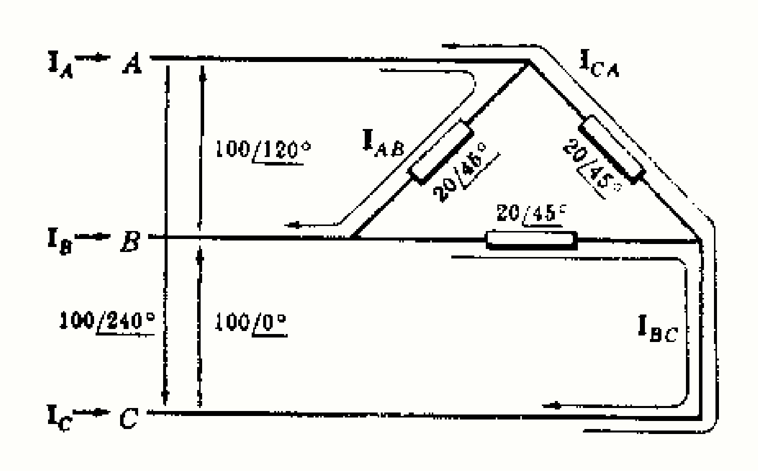



**Fig. 14-28**

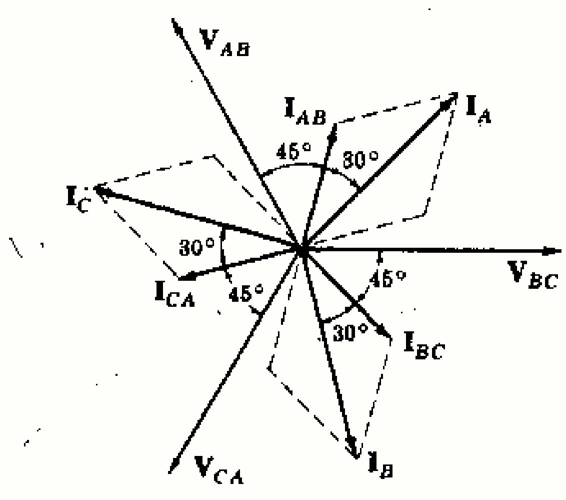



**Fig. 14-29**

Para obtener las corrientes en las líneas (véase el esquema del circuito) se aplica la primera ley de Kirchhoff a cada uno de los nudos principales de la carga. Por tanto,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 5{,}0\underline{/75^\circ} - 5{,}0\underline{/195^\circ} = 8{,}66\underline{/45^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -5{,}0\underline{/75^\circ} + 5{,}0\underline{/-45^\circ} = 8{,}66\underline{/-75^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 5{,}0\underline{/195^\circ} - 5{,}0\underline{/-45^\circ} = 8{,}66\underline{/165^\circ}$$

El diagrama fasorial de las corrientes de fase y de línea se representa en la Figura 14-29.

**14-5** Determinar las lecturas de los vatímetros al aplicar el método de los dos vatímetros al circuito del Problema 14-4.

Con una carga trifásica de tres conductores las lecturas del vatímetro son

$$W_1 = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta) \quad \text{y} \quad W_2 = V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \qquad (1)$$

en donde $\theta$ es el ángulo de la impedancia de carga. En el Problema 14-4, $V_L = 100$ V, $I_L = 8{,}66$ A y el ángulo de la impedancia de carga es 45°. Sustituyendo estos valores en (1) resulta

$$W_1 = 100(8{,}66)\cos(30^\circ + 45^\circ) = 866 \cos 75^\circ = 224 \text{ W}$$

$$W_2 = 100(8{,}66)\cos(30^\circ - 45^\circ) = 866 \cos(-15^\circ) = 836 \text{ W}$$

La potencia total es $P_T = W_1 + W_2 = 1060$ W.

Como comprobación, se puede calcular la potencia total en cualquier carga trifásica equilibrada por

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\, 100(8{,}66)\cos 45^\circ = 1060 \text{ W}$$

**14-6** Se conectan en estrella tres impedancias idénticas de $5\underline{/-30^\circ}$ ohmios. El sistema es trifásico, de tres conductores, 150 voltios y secuencia *CBA*. Determinar las intensidades de corriente en las líneas y dibujar el diagrama fasorial.

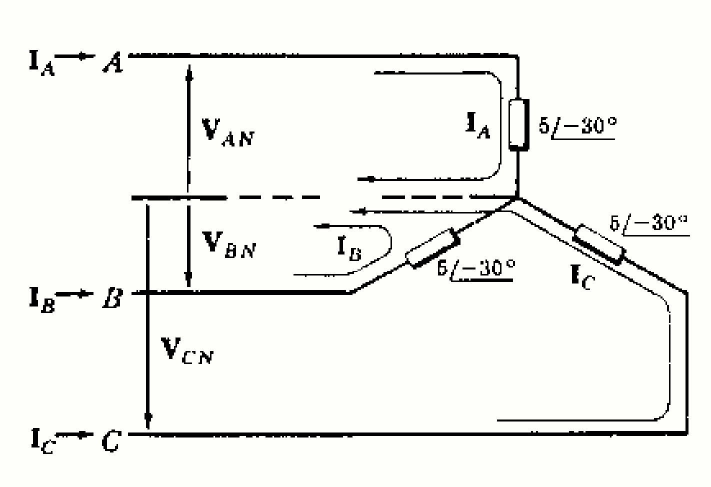


Fig. 14-30

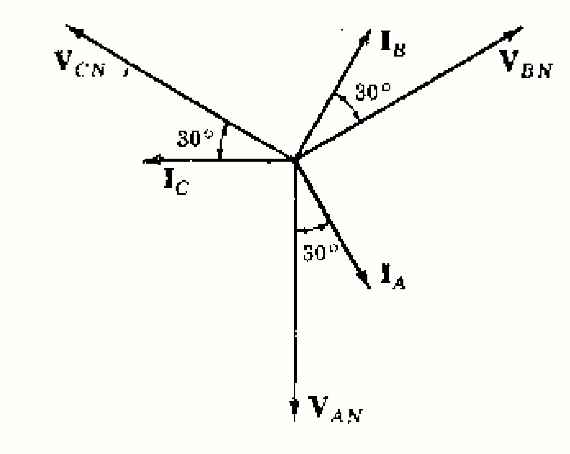


Fig. 14-31

En sistemas equilibrados de tres conductores, conectados en estrella, se puede añadir el conductor neutro, en la forma representada en la Fig. 14-30. Las tensiones simples de módulo

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 150/\sqrt{3} = 86{,}6$$

se aplican con los ángulos de fase de la secuencia *CBA*. Las corrientes en las líneas son

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{86{,}6\underline{/-90^\circ}}{5\underline{/-30^\circ}} = 17{,}32\underline{/-60^\circ}, \quad \mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = 17{,}32\underline{/60^\circ}, \quad \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = 17{,}32\underline{/180^\circ}$$

El diagrama fasorial de la Fig. 14-31 muestra el conjunto de las corrientes de línea equilibradas con 30° en adelanto respecto de las tensiones simples de línea a neutro, el cual corresponde al ángulo de la impedancia.

**14-7** Determinar las lecturas de los vatímetros si se aplica el método de los dos vatímetros al circuito del Problema 14-6.

Con carga trifásica equilibrada,

$$W_1 = V_L I_L \cos(30° + \theta) = 150(17,32)\cos(30° + 30°) = 1300 \text{ W}$$

$$W_2 = V_L I_L \cos(30° - \theta) = 150(17,32)\cos(30° - 30°) = 2600 \text{ W}$$

La potencia activa total es $P_T = W_1 + W_2 = 3900$ W.

Como comprobación, se puede calcular la potencia por fase $P_F = RI_L^2 = 4,33(17,32)^2 = 1300$ W y, por tanto, la potencia activa total es

$$P_T = 3P_F = 3(1300) = 3900 \text{ W}$$

O bien, con cargas trifásicas equilibradas, la potencia activa total es

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,(150)(17,32)\cos(-30°) = 3900 \text{ W}$$

**14-8** Tres impedancias idénticas de $15\angle 30°$ ohmios se conectan en triángulo a un sistema trifásico, de tres conductores, 200 voltios y secuencia $ABC$. Hallar las intensidades de corriente en las líneas utilizando el método del equivalente monofásico.

Como la carga está conectada en triángulo se obtiene primeramente la impedancia equivalente de la carga con conexión en estrella:

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 15\angle 30°/3 = 5\angle 30°$$

El módulo de la tensión simple de línea a neutro es

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 200/\sqrt{3} = 115,5$$

Ahora bien, en el circuito equivalente monofásico de la Fig. 14-32 la tensión aplicada es $115,5\angle 0°$ voltios y la corriente resultante es

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}} = \frac{115,5\angle 0°}{5\angle 30°} = 23,1\angle -30°$$

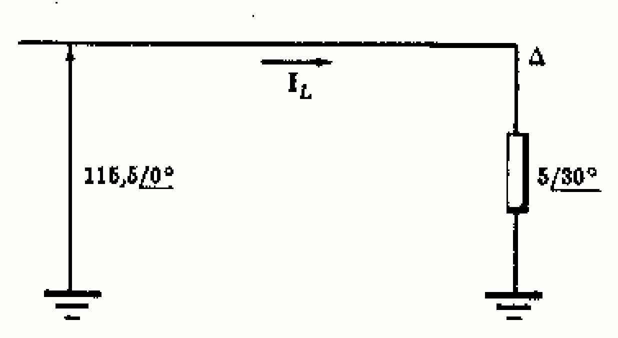



Fig. 14-32

Para obtener las intensidades de corriente en las líneas $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ se determina en primer lugar el ángulo de fase en las correspondientes tensiones simples de línea a neutro en la secuencia $ABC$. Puesto que $\mathbf{V}_{AN}$ tiene un ángulo de 90°, $\mathbf{I}_A = 23,1\angle 90° - 30° = 23,1\angle 60°$ A. De igual forma, $\mathbf{I}_B = 23,1\angle -60°$ A, $\mathbf{I}_C = 23,1\angle 180°$ A.

Las corrientes en las impedancias en Δ están relacionadas con las corrientes de línea por $I_L = \sqrt{3}\, I_F$, de donde $I_F = 23,1/\sqrt{3} = 13,3$ A.

El ángulo de $\mathbf{V}_{AB}$ en la secuencia $ABC$ es de 120° y, por tanto, $\mathbf{I}_{AB} = 13,3\angle 120° - 30° = 13,3\angle 90°$ A. Por el mismo procedimiento, $\mathbf{I}_{BC} = 13,3\angle -30°$ A e $\mathbf{I}_{CA} = 13,3\angle 210°$ A.

**14-9** Tres impedancias iguales de $10\angle 30°$ ohmios, conectadas en estrella, y otras tres impedancias también iguales de $15\angle 0°$ ohmios, igualmente en estrella, están unidas a un mismo sistema trifásico, de tres conductores, de 250 voltios. Hallar la potencia total.

Puesto que ambas cargas están conectadas en estrella, sus impedancias de fase pueden ponerse directamente en un circuito equivalente monofásico, como se representa en la Fig. 14-33. La tensión aplicable a dicho sistema monofásico es

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 250/\sqrt{3} = 144,5$$

La corriente tiene una intensidad, pues,

$$\mathbf{I}_L = \frac{144,5\angle 0°}{10\angle 30°} + \frac{144,5\angle 0°}{15\angle 0°}$$

$$= 14,45\angle -30° + 9,62\angle 0° = 23,2\angle -18,1°$$

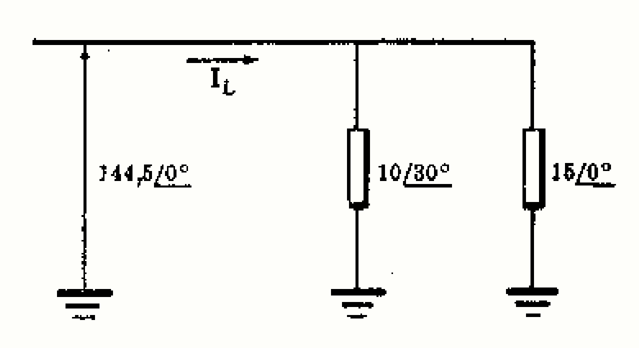



Fig. 14-33

En la fórmula de la potencia activa $P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta$, $\theta$ es el ángulo de la impedancia de carga equivalente. Al calcular $\mathbf{I}_L$, se han considerado ambas cargas y se ha visto que la corriente retrasa respecto de la tensión un ángulo de 18,1°. Por tanto, se sabe que la impedancia equivalente es inductiva y tiene un ángulo de 18,1°. En estas condiciones,

$$P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,250(23{,}2)\cos 18{,}1^\circ = 9530 \text{ W}$$

**14-10** Tres impedancias idénticas de $12\angle 30^\circ$ ohmios, en triángulo, y otras tres idénticas de $5\angle 45^\circ$ ohmios, en estrella, se unen al mismo sistema trifásico, de tres conductores, de 208 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y la potencia total.

Como la primera de las cargas está conectada en triángulo, se obtiene la equivalente en estrella

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 12\angle 30^\circ/3 = 4\angle 30^\circ$$

Con una tensión compuesta entre líneas de 208 V la tensión simple es $208/\sqrt{3} = 120$ V.

El circuito equivalente monofásico es el representado en la Fig. 14-34 con las dos impedancias de carga $4\angle 30^\circ\ \Omega$ y $5\angle 45^\circ\ \Omega$. Estas impedancias pueden ser sustituidas por una equivalente.

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{4\angle 30^\circ\,(5\angle 45^\circ)}{4\angle 30^\circ + 5\angle 45^\circ} = 2{,}24\angle 36{,}6^\circ$$

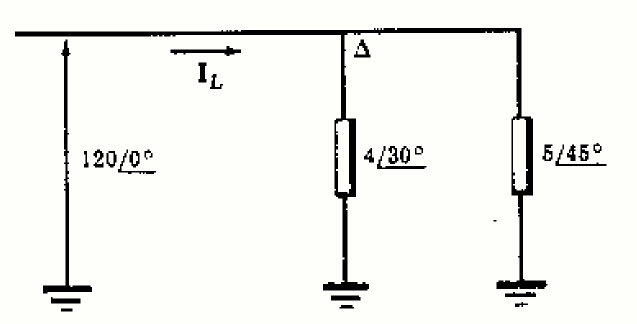



Fig. 14-34

Con esto, la corriente es

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{120\angle 0^\circ}{2{,}24\angle 36{,}6^\circ} = 53{,}6\angle -36{,}6^\circ$$

La tensión $\mathbf{V}_{AN}$ en la secuencia *ABC* tiene un ángulo de fase de 90° y, por consiguiente, $\mathbf{I}_A = 53{,}6\angle(90^\circ - 36{,}6^\circ) = 53{,}6\angle 53{,}4^\circ$ A. Análogamente, vemos que $\mathbf{I}_B = 53{,}6\angle -66{,}6^\circ$ A e $\mathbf{I}_C = 53{,}6\angle -186{,}6^\circ$ A.

La potencia activa total es

$$P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,208(53{,}6)\cos 36{,}6^\circ = 15.500 \text{ W}$$

**14-11** Un sistema trifásico de tres conductores, 240 voltios y secuencia *CBA* alimenta a una carga conectada en triángulo en la que $\mathbf{Z}_{AB} = 25\angle 90^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 15\angle 30^\circ$ y $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle 0^\circ$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y la potencia total.

Aplicando las tensiones compuestas entre líneas de la secuencia *CBA* a la carga conectada en triángulo de la Fig. 14-35 y eligiendo las corrientes de fase como se ve en el esquema, se tiene

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{240\angle 240^\circ}{25\angle 90^\circ} = 9{,}6\angle 150^\circ$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = \frac{240\angle 0^\circ}{15\angle 30^\circ} = 16{,}0\angle -30^\circ$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = \frac{240\angle 120^\circ}{20\angle 0^\circ} = 12{,}0\angle 120^\circ$$

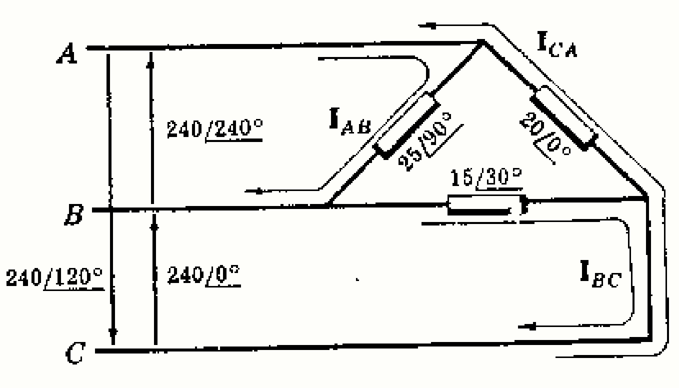



Fig. 14-35

Las corrientes en las líneas pueden calcularse, ahora, en función de las corrientes en las fases.

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 9{,}6\angle 150^\circ - 12\angle 120^\circ = 6{,}06\angle 247{,}7^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -9{,}6\angle 150^\circ + 16\angle -30^\circ = 25{,}6\angle -30^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 12\angle 120^\circ - 16\angle -30^\circ = 27{,}1\angle 137{,}2^\circ$$

Como era de esperar, en una carga desequilibrada las corrientes en las líneas no son iguales.

La potencia en cada fase se calcula de la manera siguiente:

Impedancia $\mathbf{Z}_{AB} = 25\underline{/90°} = 0 + j25\ \Omega$, $R_{AB} = 0$ e $I_{AB} = 9{,}6$ A. Entonces,

$$P_{AB} = R_{AB}I_{AB}^2 = (0)(9{,}6)^2 = 0$$

Impedancia $\mathbf{Z}_{BC} = 15\underline{/30°} = 13 + j7{,}5\ \Omega$, $R_{BC} = 13\ \Omega$ e $I_{BC} = 16$ A. Por tanto,

$$P_{BC} = R_{BC}I_{BC}^2 = (13)(16)^2 = 3330 \text{ W}$$

Impedancia $\mathbf{Z}_{CA} = 20\underline{/0°} = 20 + j0\ \Omega$, $R_{CA} = 20\ \Omega$ e $I_{CA} = 12$ A. Por tanto,

$$P_{CA} = R_{CA}I_{CA}^2 = (20)(12)^2 = 2880 \text{ W}$$

La potencia total es la suma de las potencias por fase

$$P_T = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 0 + 3330 + 2880 = 6210 \text{ W}$$

**14-12** Hallar las lecturas del vatímetro cuando se utiliza el método de los dos vatímetros en el circuito del Problema 14-11, con medidas entre las líneas (*a*) *A* y *B*, (*b*) *A* y *C*.

(*a*) Con los vatímetros en *A* y *B*,

$$(1)\quad W_A = V_{AC}I_A \cos \measuredangle_A^{AC} \qquad (2)\quad W_B = V_{BC}I_B \cos \measuredangle_B^{BC}$$

Del Problema 14-11, $\mathbf{V}_{AC} = 240\underline{/-60°}$ V, $\mathbf{I}_A = 6{,}06\underline{/247{,}7°}$ A. Entonces, el ángulo $\measuredangle_A^{AC}$ es el ángulo entre 247,7° y −60°, o sea, 52,3°. Sustituyendo en (*1*),

$$W_A = 240(6{,}06)\cos 52{,}3° = 890 \text{ W}$$

También, del Problema 14-11, $\mathbf{V}_{BC} = 240\underline{/0°}$ V e $\mathbf{I}_B = 25{,}6\underline{/-30°}$ A. Entonces, $\measuredangle_B^{BC} = 30°$. Sustituyendo en (*2*),

$$W_B = 240(25{,}6)\cos 30° = 5320 \text{ W}$$

La potencia total es $P_T = W_A + W_B = 890 + 5320 = 6210$ W.

(*b*) Con los vatímetros en las líneas *A* y *C*,

$$(3)\quad W_A = V_{AB}I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \qquad (4)\quad W_C = V_{CB}I_C \cos \measuredangle_C^{CB}$$

Del Problema 14-11, $\mathbf{V}_{AB} = 240\underline{/240°}$ V. Como $\mathbf{I}_A = 6{,}06\underline{/247{,}7°}$ A, $\measuredangle_A^{AB} = 7{,}7°$. Sustituyendo en (*3*),

$$W_A = 240(6{,}06)\cos 7{,}7° = 1440 \text{ W}$$

Del mismo modo, $\mathbf{V}_{CB} = 240\underline{/180°}$ V e $\mathbf{I}_C = 27{,}1\underline{/137{,}2°}$ A, de donde $\measuredangle_C^{CB} = 42{,}8$. Sustituyendo en (*4*),

$$W_C = 240(27{,}1)\cos 42{,}8° = 4770 \text{ W}$$

y la potencia total, $P_T = W_A + W_C = 1440 + 4770 = 6210$ W.

**14-13** Un sistema trifásico de cuatro conductores, 208 voltios y secuencia *ABC* alimenta a una carga en estrella en la que $\mathbf{Z}_A = 10\underline{/0°}$, $\mathbf{Z}_B = 15\underline{/30°}$ y $\mathbf{Z}_C = 10\underline{/-30°}$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente en las líneas, la del neutro y la potencia total.

Aplicando al circuito las tensiones simples de línea a neutro de la secuencia *ABC*, como se ve en la Fig. 14-36, y suponiendo positivo el sentido de las corrientes hacia la carga, se tiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/\mathbf{Z}_A = (120\underline{/90°})/(10\underline{/0°}) = 12\underline{/90°}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/\mathbf{Z}_B = (120\underline{/-30°})/(15\underline{/30°}) = 8\underline{/-60°}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CN}/\mathbf{Z}_C = (120\underline{/-150°})/(10\underline{/-30°}) = 12\underline{/-120°}$$

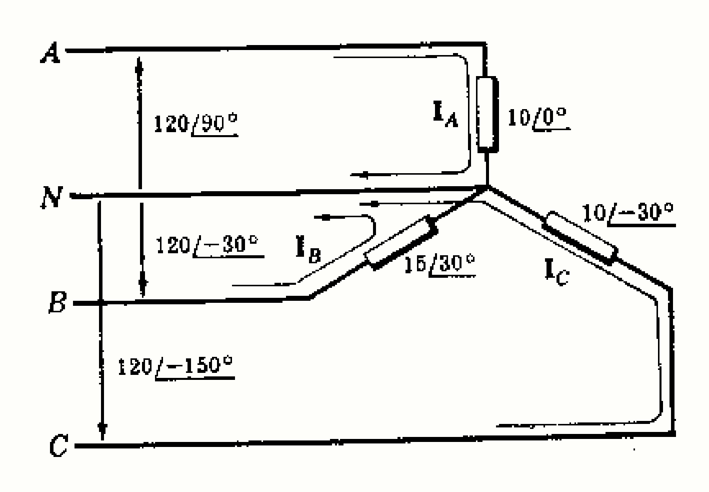



Fig. 14-36

La corriente en el neutro es el fasor suma de los correspondientes a las intensidades de línea y si el sentido positivo es hacia la carga,

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(12\underline{/90^\circ} + 8\underline{/-60^\circ} + 12\underline{/-120^\circ}) = 5{,}69\underline{/69{,}4^\circ}$$

La impedancia $\mathbf{Z}_A = 10 + j0\ \Omega$ es atravesada por la corriente $\mathbf{I}_A = 12\underline{/90^\circ}$ A y la potencia en esta fase de la carga es $P_A = 10(12)^2 = 1440$ W. Por la impedancia $\mathbf{Z}_B = 15\underline{/30^\circ} = 13 + j7{,}5\ \Omega$ circula la corriente $\mathbf{I}_B = 8\underline{/-60^\circ}$ A y la potencia en la fase es $P_B = 13(8)^2 = 832$ W. De igual forma, por $\mathbf{Z}_C = 10\underline{/-30^\circ} = 8{,}66 - j5\ \Omega$ circula la corriente $\mathbf{I}_C = 12\underline{/-120^\circ}$ A y $P_C = 8{,}66(12)^2 = 1247$ W.

La potencia total es $P_T = P_A + P_B + P_C = 1440 + 832 + 1247 = 3519$ W.

**14-14** Las impedancias de carga del problema anterior se conectan a un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia $ABC$. Hallar las intensidades de corriente de línea y las tensiones entre los extremos de las impedancias de carga.

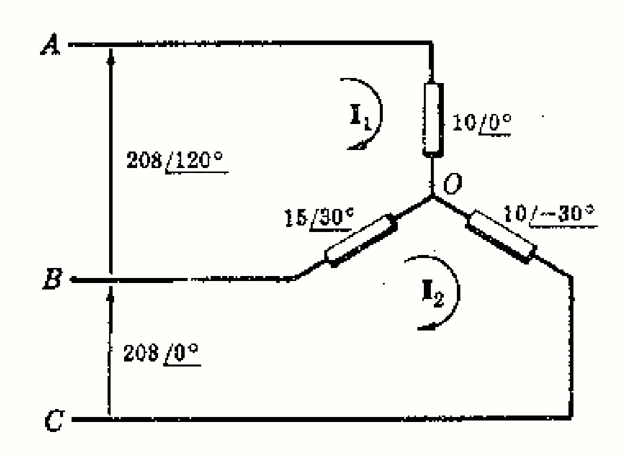



**Fig. 14-37**

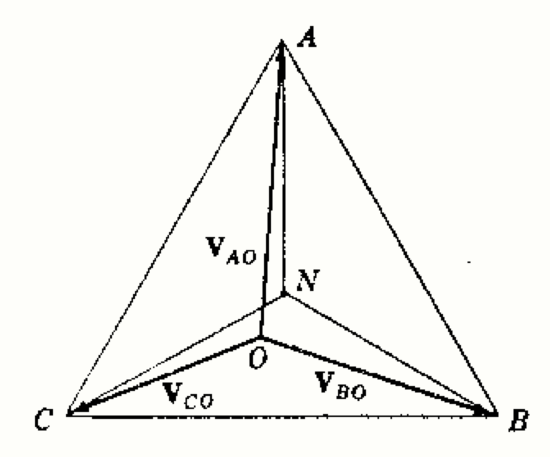



**Fig. 14-38**

En el circuito de la Fig. 14-37 se han puesto las dos tensiones compuestas $\mathbf{V}_{AB}$ y $\mathbf{V}_{BC}$. Con las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ elegidas como en la figura, la forma matricial del sistema de ecuaciones en las corrientes es

$$\begin{bmatrix} 10\underline{/0^\circ} + 15\underline{/30^\circ} & -15\underline{/30^\circ} \\ -15\underline{/30^\circ} & 15\underline{/30^\circ} + 10\underline{/-30^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\underline{/120^\circ} \\ 208\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{5210\underline{/90^\circ}}{367{,}5\underline{/3{,}9^\circ}} = 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{3730\underline{/56{,}6^\circ}}{367{,}5\underline{/3{,}9^\circ}} = 10{,}15\underline{/52{,}7^\circ}$$

Las corrientes en las líneas, con sentido positivo hacia la carga, vienen dadas en función de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ por

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 10{,}15\underline{/52{,}7^\circ} - 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ} = 8{,}0\underline{/-49{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 10{,}15\underline{/(52{,}7^\circ - 180^\circ)} = 10{,}15\underline{/-127{,}3^\circ}$$

Por tanto, las tensiones en las impedancias son

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{I}_A\mathbf{Z}_A = 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ}\,(10\underline{/0^\circ}) = 141{,}5\underline{/86{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{I}_B\mathbf{Z}_B = 8{,}0\underline{/-49{,}5^\circ}\,(15\underline{/30^\circ}) = 120\underline{/-19{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{I}_C\mathbf{Z}_C = 10{,}15\underline{/-127{,}3^\circ}\,(10\underline{/-30^\circ}) = 101{,}5\underline{/-157{,}3^\circ}$$

La representación de las tres tensiones $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ y $\mathbf{V}_{CO}$ muestra el triángulo de secuencia $ABC$ al unir los extremos de los fasores por rectas. Puede añadirse también el punto $N$, como en la Figura 14-38.

**14-15** Resolver nuevamente el Problema 14-14 por el método del desplazamiento del neutro.

En el método del desplazamiento se calcula $\mathbf{V}_{ON}$ a partir de la fórmula

$$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C}$$

Por el Problema 14-14, $\mathbf{Y}_A = 1/10 = 0{,}1$, $\mathbf{Y}_B = 1/(15\underline{/30^\circ}) = 0{,}0577 - j0{,}033$ e $\mathbf{Y}_C = 1/(10\underline{/-30^\circ}) = 0{,}0866 + j0{,}050$. Por tanto,

$$\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C = 0{,}244 + j0{,}0167 = 0{,}244\underline{/3{,}93^\circ}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A &= 120\underline{/90^\circ}(0{,}1) &&= 12\underline{/90^\circ} &&= \phantom{-6{,}0} \quad j12\\
\mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B &= 120\underline{/-30^\circ}(0{,}0667\underline{/-30^\circ}) &&= 8{,}0\underline{/-60^\circ} &&= 4{,}0 \quad j6{,}93\\
\mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C &= 120\underline{/-150^\circ}(0{,}1\underline{/30^\circ}) &&= 12\underline{/-120^\circ} &&= -6{,}0 - j10{,}4
\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = -2{,}0 - j5{,}33 = 5{,}69\underline{/249{,}4^\circ}$$

En consecuencia, $\mathbf{V}_{ON} = (5{,}69\underline{/249{,}4^\circ})/(0{,}244\underline{/3{,}93^\circ}) = 23{,}3\underline{/245{,}5^\circ} = -9{,}66 - j21{,}2$

Las tensiones en las impedancias de carga pueden expresarse en función de la correspondiente tensión simple de línea a neutro y la de desplazamiento del neutro en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{AO} &= \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\underline{/90^\circ} + (9{,}66 + j21{,}2) = 141{,}2\underline{/86{,}08^\circ}\\
\mathbf{V}_{BO} &= \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\underline{/-30^\circ} + (9{,}66 + j21{,}2) = 120\underline{/-18{,}9^\circ}\\
\mathbf{V}_{CO} &= \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\underline{/-150^\circ} + (9{,}66 + j21{,}2) = 102\underline{/202{,}4^\circ}
\end{aligned}$$

Para obtener las corrientes de línea se forman los productos de estas tensiones y las admitancias correspondientes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_A &= \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A = 141{,}2\underline{/86{,}08^\circ}(0{,}1\underline{/0^\circ}) &&= 14{,}12\underline{/86{,}08^\circ}\\
\mathbf{I}_B &= \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B = 120\underline{/-18{,}9^\circ}(0{,}0667\underline{/-30^\circ}) &&= 8{,}0\underline{/-48{,}9^\circ}\\
\mathbf{I}_C &= \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 102\underline{/202{,}4^\circ}(0{,}1\underline{/30^\circ}) &&= 10{,}2\underline{/232{,}4^\circ} \quad \text{o bien} \quad 10{,}2\underline{/-127{,}6^\circ}
\end{aligned}$$

Los resultados anteriores están de acuerdo con los del Problema 14-14 dentro del orden de exactitud de la regla de cálculo.

**14-16** Utilizando el método de los dos vatímetros en un caso de carga equilibrada se han obtenido las lecturas 1154 y 577 vatios. Obtener las impedancias de carga, con conexión triángulo, si la tensión del sistema es de 100 voltios.

Para cargas trifásicas equilibradas

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \pm\sqrt{3}\,\frac{1154 - 577}{1154 + 577} = \pm 0{,}577$$

de donde $\theta = \pm 30^\circ$. (Se pone $\pm$, ya que sin conocer ni la secuencia ni la colocación de los vatímetros, no puede determinarse el signo.)

La potencia total es $P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta$, e

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3}\,V_L\cos\theta} = \frac{1731}{\sqrt{3}\,(100)(0{,}866)} = 11{,}55 \text{ A}$$

Se dibuja el circuito monofásico equivalente y se aplica la tensión $(100/\sqrt{3})\underline{/0^\circ} = 57{,}7\underline{/0^\circ}$ V, como se ve en la Fig. 14-39. Entonces, la impedancia con conexión en estrella

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{57{,}7\underline{/0^\circ}}{11{,}55\underline{/\pm 30^\circ}} = 5{,}0\underline{/\mp 30^\circ}$$

y

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y = 15\underline{/\mp 30^\circ}$$

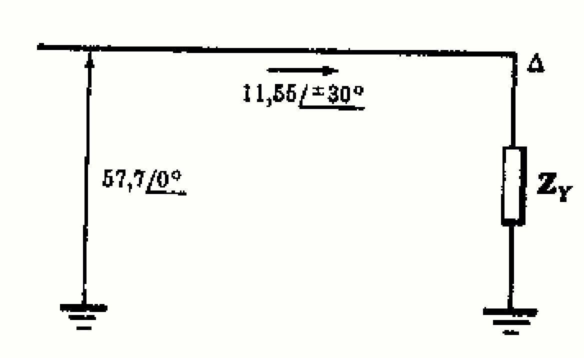



Fig. 14-39

**14-17** Se aplica el método de los dos vatímetros a un sistema trifásico de tres conductores, 100 voltios y secuencia $ABC$, con los aparatos de medida en $B$ y $C$, obteniéndose $W_B = 836$ y $W_C = 224$ vatios. Hallar la impedancia de la carga equilibrada y con conexión en triángulo.

Conociendo la secuencia y la situación de los aparatos puede conocerse el signo de $\theta$. Así,

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}\frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3}\frac{836 - 224}{836 + 224} = 1 \text{ de donde } \theta = 45^\circ$$

Puesto que $P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$, $I_L = \dfrac{P}{\sqrt{3}\, V_L \cos\theta} = \dfrac{1060}{\sqrt{3}\,(100)(0{,}707)} = 8{,}66$ A. Entonces, el circuito equivalente monofásico tiene una tensión de $57{,}7\underline{/0^\circ}$ V y la impedancia conectada en estrella es $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{V}/\mathbf{I} = (57{,}7\underline{/0^\circ})/(8{,}66\underline{/-45^\circ}) = 6{,}67\underline{/45^\circ}\ \Omega$. La impedancia de carga en triángulo es $\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y = 20\underline{/45^\circ}\ \Omega$.

**14-18** Un calentador trifásico de 1500 vatios, con factor de potencia unidad, y un motor de inducción de 5 CV, con un rendimiento a plena carga del 80 % y factor de potencia 0,85, están alimentados por un mismo sistema trifásico de tres conductores de 208 voltios. Determinar el valor de la intensidad de corriente de línea para el régimen de salida dado para el motor de 5 CV.

Como 736 W = 1 CV, la salida del motor tiene (5 CV)(736 W/CV) = 3680 W. Por tanto, la entrada que necesitará el motor es 3680/0,80 = 4600 W.

El motor es una carga trifásica equilibrada. Por consiguiente,

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta, \quad 4600 = \sqrt{3}\,(208 I_L)(0{,}85), \quad I_L = 15 \text{ A}.$$

En el circuito equivalente monofásico el fasor intensidad de corriente retrasa respecto de la tensión un ángulo $\theta$ y $\theta = \text{arc cos } 0{,}85 = 31{,}7^\circ$. Por tanto, la corriente en la línea del motor es $\mathbf{I}_L = 15{,}00\underline{/-31{,}7^\circ}$ A.

En la carga de calefacción, $P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$, en donde $\theta = 0^\circ$. Sustituyendo $1500 = \sqrt{3}\,(208)I_L$, $I_L = 4{,}16$, $\mathbf{I}_L = 4{,}16\underline{/0^\circ}$ A.

El fasor intensidad de corriente total en la línea es la suma de los fasores de intensidad correspondientes a las cargas de calefacción y motor:

$$\mathbf{I}_L = 15{,}00\underline{/-31{,}7^\circ} + 4{,}17\underline{/0^\circ} = 18{,}5\underline{/-25{,}1^\circ}$$

Por consiguiente, la corriente en cada línea es 18,5 A para el régimen dado de salida del motor.

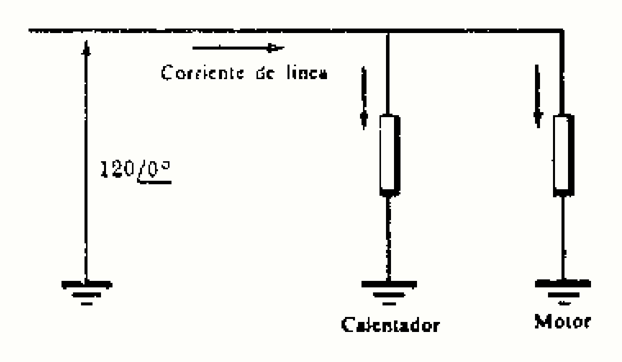


Fig. 14-40

**14-19** Tres impedancias idénticas de $30\underline{/30^\circ}$ ohmios están conectadas en triángulo a un sistema trifásico de tres conductores de 208 voltios, siendo las impedancias de los hilos $0{,}8 + j0{,}6$ ohmios. Determinar el módulo de la tensión compuesta entre líneas en la carga.

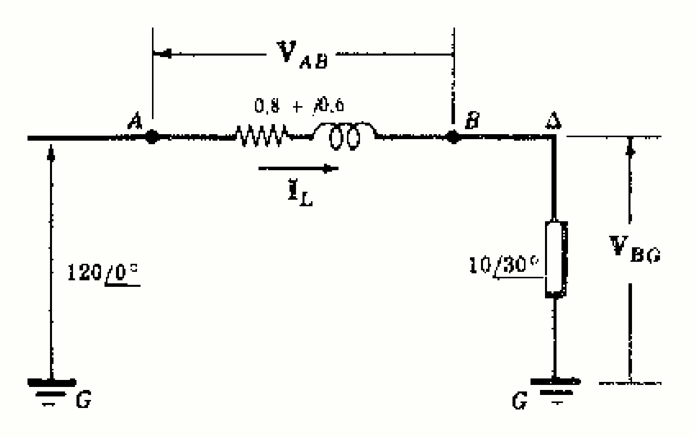


Fig. 14-41

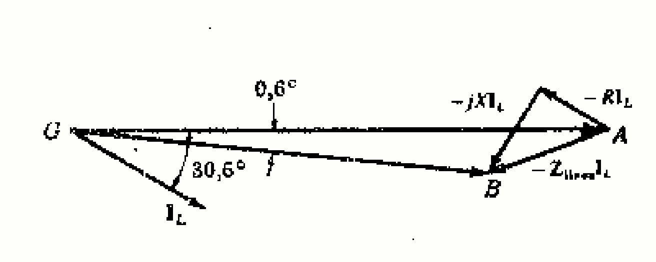


Fig. 14-42

El circuito se ha representado en la Fig. 14-41 con la impedancia equivalente en estrella de $\frac{1}{3}\mathbf{Z}_\Delta$ o $10\underline{/30°}\ \Omega$. La impedancia de la línea está en serie con la carga y

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_{\text{línea}} + \mathbf{Z}_{\text{carga}} = 0,8 + j0,6 + 8,66 + j5,0 = 9,46 + j5,6 = 11,0\underline{/30,6°}$$

Por tanto,
$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{120\underline{/0°}}{11,0\underline{/30,6°}} = 10,9\underline{/-30,6°}$$

La tensión en la carga es $\mathbf{V}_{BG} = \mathbf{Z}_{\text{carga}}\mathbf{I}_L = (10\underline{/30°})(10,9\underline{/-30,6°}) = 109\underline{/-0,6°}$.

La tensión compuesta pedida es
$$V_L = \sqrt{3}\,(109) = 189$$

Por tanto, la tensión del sistema de 208 V ha caído a 189 V a causa de la impedancia de la línea.

El diagrama fasorial se representa en la Fig. 14-42 con la caída en la línea $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{Z}_{\text{línea}}\mathbf{I}_L = (0,8 + j0,6)(10,9\underline{/-30,6°}) = 10,9\underline{/6,3°}$ y $\mathbf{V}_{AG} = \mathbf{V}_{AB} + \mathbf{V}_{BG}$.

**14-20** Hallar, en el problema anterior, la tensión compuesta en la carga si en paralelo con ésta se pone un conjunto de condensadores con una reactancia de $-j60$ ohmios.

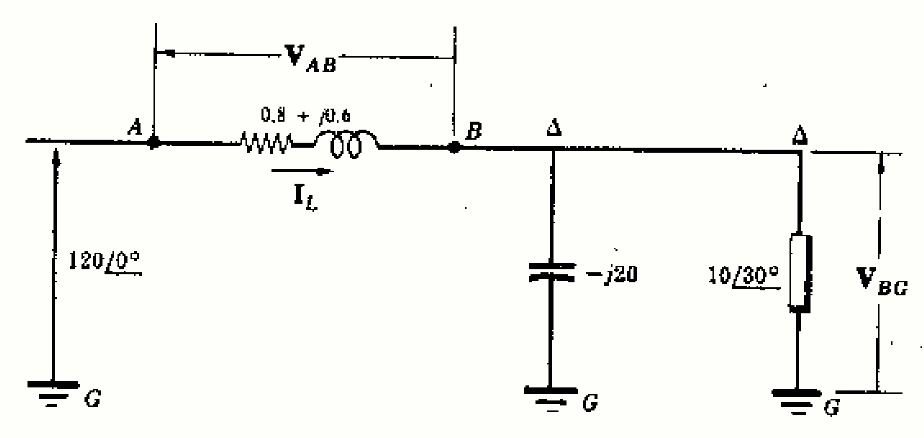



Fig. 14-43

En el circuito equivalente monofásico de la Fig. 14-43 están en paralelo $-j20$ y $10\underline{/30°}$.

$$\mathbf{Z}_P = \frac{10\underline{/30°}\,(-j20)}{(8,66 + j5) - j20} = 11,55\underline{/0°}$$

$\mathbf{Z}_P$ está, por tanto, en serie con las impedancias de la línea y

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_{\text{línea}} + \mathbf{Z}_P = (0,8 + j0,6) + (11,55\underline{/0°}) = 12,35\underline{/2,78°}$$

La corriente en la línea es, pues,

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{120\underline{/0°}}{12,35\underline{/2,78°}} = 9,73\underline{/-2,78°}$$

y la tensión en los extremos de la carga,

$$\mathbf{V}_{BG} = \mathbf{Z}_P\mathbf{I}_L = (11,55\underline{/0°})(9,73\underline{/-2,78°}) = 112\underline{/-2,78°}$$

La tensión compuesta correspondiente es $V_L = \sqrt{3}\,(112) = 194$ V.

Como ya se vio en el Capítulo 7, el factor de potencia se mejora al conectar condensadores en paralelo con la carga. Esto da lugar a una reducción en la caída de tensión en la impedancia de la línea. Y así, en este problema, la tensión del sistema ha caído a 194 voltios en lugar de a 189, como en el **Problema 14-19**.

# Problemas propuestos

**14-21** Se conectan en triángulo tres impedancias iguales de $10\angle 53{,}1^\circ$ ohmios a un sistema trifásico de tres conductores, 240 voltios y secuencia *CBA*. Hallar las intensidades de corriente de línea.
*Sol.* $41{,}6\angle -143{,}1^\circ$; $41{,}6\angle -23{,}1^\circ$, y $41{,}6\angle 96{,}9^\circ$ A.

**14-22** Se conectan en triángulo a un sistema trifásico de tres conductores, 100 voltios y secuencia *CBA* tres impedancias iguales de $15{,}9\angle 70^\circ$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia total.
*Sol.* $10{,}9\angle -160^\circ$; $10{,}9\angle -40^\circ$; $10{,}9\angle 80^\circ$ A; 646 W.

**14-23** Tres impedancias de $42\angle -35^\circ$ ohmios se conectan en triángulo a un sistema trifásico de tres conductores, 350 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia total.
*Sol.* $14{,}4\angle 125^\circ$; $14{,}4\angle 5^\circ$; $14{,}4\angle -115^\circ$ A; 7130 W.

**14-24** Se une a un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia *CBA* una carga equilibrada en estrella con impedancias de $6\angle 45^\circ$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente de línea, incluida la del neutro.
*Sol.* $20\angle -135^\circ$; $20\angle -15^\circ$; $20\angle 105^\circ$; 0 A.

**14-25** Una carga equilibrada con impedancias de $65\angle -20^\circ$ ohmios se conecta en estrella a un sistema trifásico de tres conductores, 480 voltios y secuencia *CBA*. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia total.
*Sol.* $4{,}26\angle -70^\circ$; $4{,}26\angle 50^\circ$; $4{,}26\angle 170^\circ$; 3320 W.

**14-26** Un motor de inducción de 37,3 kW, con un rendimiento a plena carga del 85 % y un factor de potencia 0,80, se conecta a un sistema trifásico de 480 voltios. Hallar la impedancia en estrella equivalente que puede sustituir a dicho motor. *Sol.* $4{,}2\angle 36{,}9^\circ$.

**14-27** Un motor de inducción trifásico de 186,5 kW, con rendimiento a plena carga del 82 % y un factor de potencia 0,75, se conecta a un sistema de 208 voltios. Hallar la impedancia equivalente en triángulo que puede sustituir a dicho motor y determinar las lecturas con el método de los dos vatímetros.
*Sol.* $4{,}28\angle 41{,}4^\circ$ Ω; 5,58 kW; 17,15 kW.

**14-28** Tres impedancias idénticas de $9\angle -30^\circ$ ohmios en triángulo y tres impedancias de $5\angle 45^\circ$ ohmios en estrella se conectan al mismo sistema trifásico de tres conductores, 480 voltios y secuencia *ABC*. Hallar el módulo de la intensidad de corriente de línea y la potencia total. *Sol.* 119,2 A; 99 kW.

**14-29** Una carga en triángulo equilibrada con impedancias de $27\angle -25^\circ$ ohmios y otra en estrella equilibrada con impedancias de $10\angle -30^\circ$ ohmios, se conectan a un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia en cada carga.
*Sol.* $25{,}3\angle 117{,}4^\circ$ A; $25{,}3\angle -2{,}6^\circ$ A; $25{,}3\angle -122{,}6^\circ$ A; 4340 W; 3740 W.

**14-30** Un sistema trifásico, a 100 voltios, alimenta a una carga equilibrada en triángulo con impedancias de $10\angle -36{,}9^\circ$ ohmios y una carga en estrella equilibrada con impedancias de $5\angle 53{,}1^\circ$ ohmios. Hallar la potencia en cada carga y el módulo de la intensidad de corriente en la línea total. *Sol.* 2400 W; 1200 W; 20,8 A.

**14-31** Dos cargas equilibradas en triángulo con impedancias de $20\angle -60^\circ$ y $18\angle 45^\circ$ ohmios, respectivamente, se conectan a un sistema trifásico de 150 voltios. Hallar la potencia en cada carga. *Sol.* 1690 y 2650 W.

**14-32** Un sistema trifásico de tres conductores, 173,2 voltios y secuencia *CBA* alimenta a tres cargas equilibradas con las siguientes conexiones e impedancias: en estrella de $10\angle 0^\circ$ ohmios, en triángulo de $24\angle 90^\circ$ ohmios y la tercera en triángulo con impedancia desconocida. Determinar esta impedancia sabiendo que la intensidad de corriente en la línea *A*, con sentido positivo hacia la carga, es $32{,}7\angle -138{,}1^\circ$ amperios.
*Sol.* $18\angle 45^\circ$ Ω.

**14-33** Los vatímetros situados en las líneas *A* y *B* de un sistema de 120 voltios y secuencia *CBA*, indican los valores 1500 y 500 vatios, respectivamente. Hallar las impedancias de la carga equilibrada en triángulo.
*Sol.* $16{,}3\angle -41^\circ$ Ω.

**14-34** Las lecturas de los vatímetros colocados en las líneas *A* y *B* de un sistema de 173,2 voltios y secuencia *ABC* son −301 y +1327 vatios, respectivamente. Hallar las impedancias de la carga equilibrada en estrella.
*Sol.* $10\angle -70^\circ$ Ω.

**14-35** Hallar las lecturas de los dos vatímetros utilizados en un sistema de tres conductores, de 240 voltios, con una carga, conectada en triángulo y equilibrada, de $20\angle 80^\circ$ ohmios. *Sol.* −1710, 3210 W.

**14-36** Hay dos vatímetros colocados en las líneas *B* y *C* de un sistema *CBA* de tres conductores y 173,2 voltios, que alimenta a una carga equilibrada. Determinar las lecturas de dichos vatímetros si la intensidad de corriente de línea es $\mathbf{I}_A = 32{,}7\angle -41{,}9^\circ$ amperios. *Sol.* 1170, 5370 W.

**14-37** Un sistema de 100 voltios y secuencia *CBA* alimenta a una carga equilibrada y tiene dos vatímetros en las líneas *A* y *B*. Si $\mathbf{I}_B = 10{,}9\angle -40^\circ$ amperios es la intensidad de corriente en la línea *B*, hallar las lecturas de ambos vatímetros. *Sol.* −189, 835 W.

**14-38** Una carga conectada en triángulo, con $\mathbf{Z}_{AB} = 10\angle 30^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 25\angle 0^\circ$ y $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle -30^\circ$ ohmios, se une a un sistema trifásico de tres conductores, 500 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y la potencia total. *Sol.* $75\angle 90^\circ$ A; $53{,}9\angle -68{,}2^\circ$ A; $32\angle 231{,}3^\circ$ A; 42,4 kW.

**14-39** Un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia *ABC* alimenta a una carga en triángulo en que $\mathbf{Z}_{AB} = 5\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 4\angle 30^\circ$, $\mathbf{Z}_{CA} = 6\angle -15^\circ$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente de línea y las lecturas de los vatímetros instalados en las líneas *A* y *C*.
*Sol.* $70{,}5\angle 99{,}65^\circ$ A; $90{,}5\angle -43{,}3^\circ$ A; $54{,}6\angle 187{,}9^\circ$ A; 13,7 kW; 11,25 kW.

**14-40** Una carga en estrella, con $\mathbf{Z}_A = 3 + j0$, $\mathbf{Z}_B = 2 + j3$ y $\mathbf{Z}_C = 2 - j1$ ohmios, se conecta a un sistema trifásico de cuatro conductores, 100 voltios y secuencia *CBA*. Determinar las intensidades de corriente en las líneas, incluido el neutro, suponiendo positivo el sentido hacia la carga.
*Sol.* $19{,}25\angle -90^\circ$ A; $16\angle -26{,}3^\circ$ A; $25{,}8\angle 176{,}6^\circ$ A; $27{,}3\angle 65{,}3^\circ$ A.

**14-41** Se conecta una carga en estrella en que $\mathbf{Z}_A = 12\angle 45^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 10\angle 30^\circ$ y $\mathbf{Z}_C = 8\angle 0^\circ$ ohmios a un sistema de cuatro conductores y 208 voltios. Hallar la potencia total. *Sol.* 3898 W.

**14-42** La intensidad de corriente de línea en un sistema trifásico de tres conductores, 220 voltios y secuencia *ABC* son $\mathbf{I}_A = 43{,}5\angle 116{,}6^\circ$, $\mathbf{I}_B = 43{,}3\angle -48^\circ$ e $\mathbf{I}_C = 11{,}39\angle 218^\circ$ amperios. Obtener las lecturas de los vatímetros en las líneas (*a*) *A* y *B*, (*b*) *B* y *C*, (*c*) *A* y *C*. *Sol.* (*a*) 5270, 6370 W; (*b*) 9310, 2330 W; (*c*) 9550, 1980 W.

**14-43** Las intensidades de corriente de línea en un sistema trifásico de tres conductores, 440 voltios y secuencia *ABC* son $\mathbf{I}_A = 19{,}72\angle 90^\circ$, $\mathbf{I}_B = 57{,}3\angle -9{,}9^\circ$ e $\mathbf{I}_C = 57{,}3\angle 189{,}9^\circ$ amperios. Hallar las lecturas de los vatímetros en las líneas (*a*) *A* y *B*, (*b*) *B* y *C*. *Sol.* (*a*) 7,52, 24,8 kW; (*b*) 16,15, 16,15 kW.

**14-44** El diagrama fasorial de la Fig. 14-44 representa las corrientes de línea y las tensiones compuestas entre líneas de un sistema trifásico de tres conductores, 346 voltios y secuencia *ABC*. Si el módulo de la corriente de línea es 10 amperios, hallar la impedancia de la carga conectada en estrella. *Sol.* $20\angle 90^\circ$ Ω.

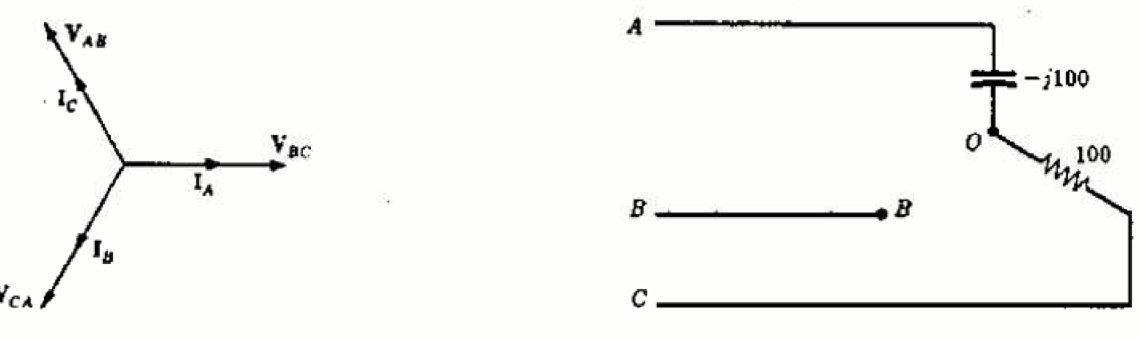



Fig. 14-44

Fig. 14-45

**14-45** El circuito de la Fig. 14-45 presenta una impedancia infinita (circuito abierto) en la fase *B* de la carga en estrella. Hallar el fasor tensión $\mathbf{V}_{OB}$ si el sistema es de 208 voltios y secuencia *ABC*. *Sol.* $284\angle 150^\circ$ V.

**14-46** Un alternador trifásico con conexión Y y 440 voltios tiene un límite de 35 amperios por arrollamiento. (*a*) ¿Cuál es la potencia aparente (kVA) de régimen de la máquina? (*b*) Si el alternador suministra una corriente de línea de 20 amperios de intensidad con un factor de potencia 0,65, ¿cuál es la potencia aparente (kVA) por fase de la máquina? *Sol.* 26,6 kVA; 5,08 kVA.

**14-47** El sistema de corrientes de línea equilibradas en el diagrama fasorial de la Fig. 14-46 tiene un valor absoluto de 10 amperios y la tensión compuesta es de 120 voltios. Determinar las correspondientes potencias activa y aparente. *Sol.* 1,47 kW; 2,08 kVA.

**14-48** Una carga en estrella con impedancias $\mathbf{Z}_A = 10\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 10\angle 60^\circ$ y $\mathbf{Z}_C = 10\angle -60^\circ$ ohmios se conecta a un sistema trifásico de tres conductores, 200 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las tensiones en las impedancias de carga $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$, $\mathbf{V}_{CO}$.
*Sol.* $173\angle 90^\circ$ V; $100\angle 0^\circ$ V; $100\angle 180^\circ$ V.

**14-49** Una carga en estrella con $\mathbf{Z}_A = 10\angle -60^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 10\angle 0^\circ$ y $\mathbf{Z}_C = 10\angle 60^\circ$ ohmios se conecta a una línea trifásica de tres conductores, 208 voltios y secuencia *CBA*. Hallar las tensiones en las impedancias de carga.
*Sol.* $208\angle -120^\circ$ V; 0 V; $208\angle 180^\circ$ V.

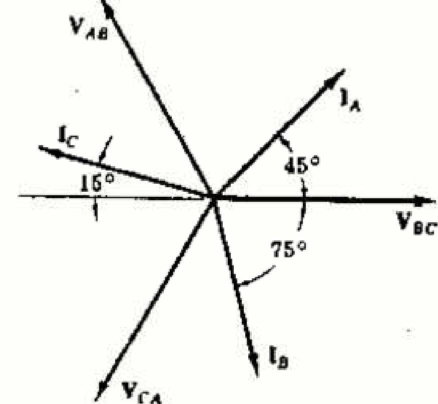



Fig. 14-46

**14-50** Un sistema de tres conductores, 480 voltios y secuencia *ABC* alimenta a una carga en estrella en la que $\mathbf{Z}_A = 10\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 5\angle -30^\circ$ y $\mathbf{Z}_C = 5\angle 30^\circ$ ohmios. Hallar las lecturas de los vatímetros en las líneas *A* y *B*.
*Sol.* 8,92 kW; 29,6 kW.

**14-51** Un sistema de tres conductores, 100 voltios y secuencia *CBA* alimenta a una carga con conexión Y en la que $\mathbf{Z}_A = 3 + j0$, $\mathbf{Z}_B = 2 + j3$ y $\mathbf{Z}_C = 2 - j1$ ohmios. Determinar las tensiones en las impedancias de la carga.
*Sol.* $31{,}6\angle -67{,}9^\circ$ V; $84{,}3\angle 42{,}7^\circ$ V; $68{,}6\angle 123{,}8^\circ$ V.

**14-52** Tres impedancias idénticas de $15\angle 60^\circ$ ohmios se conectan en estrella a un sistema trifásico de tres conductores a 240 voltios. Las líneas tienen entre la alimentación y la carga impedancias de $2 + j1$ ohmios. Hallar el módulo de la tensión compuesta en la carga. *Sol.* 213 V.

**14-53** Repetir el Problema 14-52 para impedancias en estrella de $15\angle -60^\circ$ ohmios y comparar los resultados dibujando el diagrama fasorial de tensiones. *Sol.* 235 V.

# Capítulo 15

## Análisis de las formas de onda por el método de Fourier

### INTRODUCCION

En los circuitos estudiados anteriormente se ha considerado la respuesta en régimen permanente a excitaciones de forma constante o senoidal. En tales casos, la función de entrada viene definida por una expresión sencilla para todos los valores del tiempo; por ejemplo, $v$ = constante en corriente continua y $v = V_{max}$ sen $\omega t$ en alterna, son válidas para cualquier valor de $t$, Figura 15-1($a$) y ($b$).

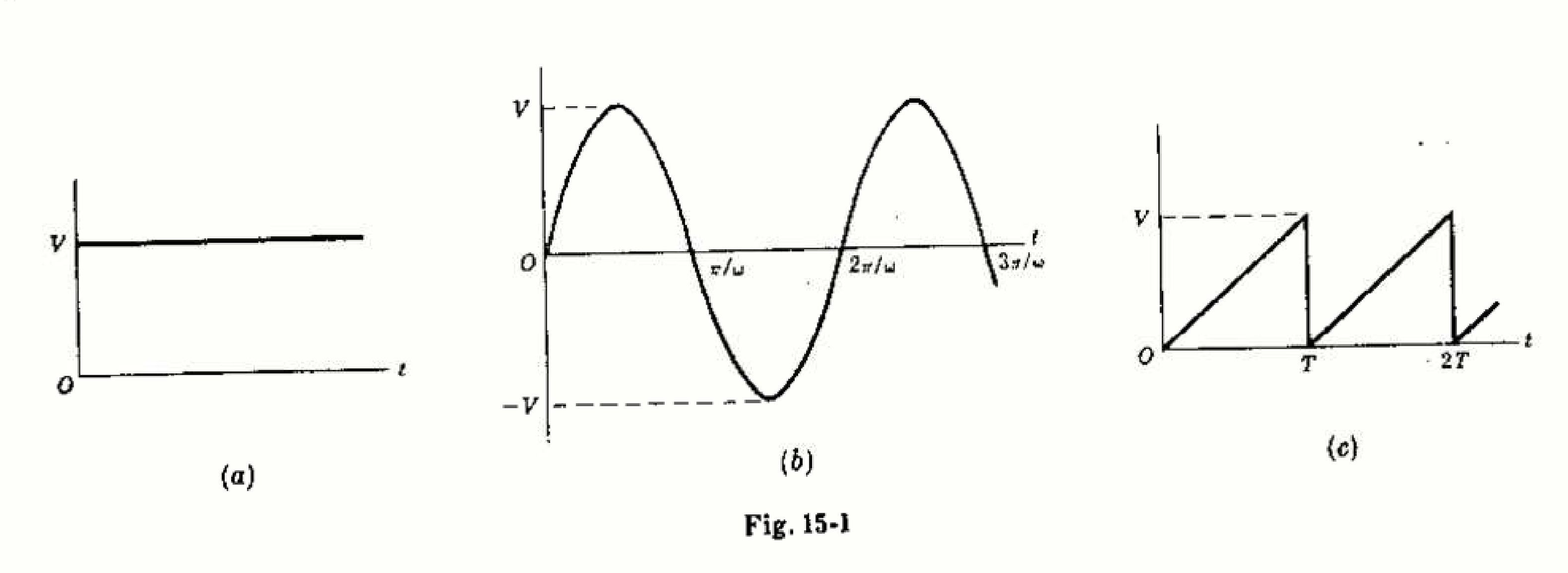



Fig. 15-1

Algunas formas de onda periódicas, de las que el diente de sierra, representada en la Fig. 15-1($c$) es un ejemplo, solo pueden definirse mediante una función singular dentro de un intervalo. Y así, el diente de sierra viene expresado por $f(t) = (V/T)t$ en el intervalo $0 < t < T$, y por $f(t) = (V/T)(t - T)$ en el intervalo $T < t < 2T$. Aunque estas expresiones por intervalos definen satisfactoriamente la forma de onda no permiten, sin embargo, determinar la respuesta del circuito. Ahora bien, si una función periódica puede expresarse como suma de un número finito o infinito de funciones senoidales, las respuestas de los circuitos lineales sometidos a excitaciones no senoidales se podrán determinar aplicando el teorema de superposición. El método de Fourier proporciona la manera de resolver este problema.

### SERIES TRIGONOMETRICAS DE FOURIER

Toda forma de onda periódica, esto es, aquella onda tal que $f(t) = f(t + T)$ puede expresarse por una serie de Fourier siempre que:

(1) tenga un número finito de discontinuidades en el periodo $T$, si es discontinua,
(2) el valor medio en el periodo $T$ sea finito,
(3) tenga un número finito de máximos positivos y negativos.

Si se satisfacen estas condiciones, que reciben el nombre de *condiciones de Dirichlet*, existe la serie de Fourier y puede escribirse en la forma trigonométrica:

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + b_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \cdots \qquad (1)$$

Los coeficientes de Fourier, $a$ y $b$, se determinan para cada forma de onda mediante el cálculo integral. El coeficiente del coseno se obtiene multiplicando ambos miembros de (*1*) por cos $n\omega t$ e integrando a lo largo de un periodo. El periodo fundamental, $2\pi/\omega$, es el periodo de la serie, puesto que cada uno de sus términos tiene una frecuencia múltiplo entero de la fundamental.

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\cos n\omega t\, dt \;=\; \int_0^{2\pi/\omega} \tfrac{1}{2}a_0 \cos n\omega t\, dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t\, dt + \cdots$$
$$+ \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t\, dt + \cdots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \operatorname{sen} \omega t \cos n\omega t\, dt$$
$$+ \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \operatorname{sen} 2\omega t \cos n\omega t\, dt + \cdots \qquad (2)$$

Las integrales definidas del segundo miembro de (*2*) son todas iguales a cero, excepto $\int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t\, dt$ que tiene el valor $\frac{\pi}{\omega}a_n$. Por tanto,

$$a_n \;=\; \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\cos n\omega t\, dt \;=\; \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\cos n\omega t\, dt \qquad (3)$$

Multiplicando (*1*) por sen $n\omega t$ e integrando en un periodo se obtiene el coeficiente del seno.

$$b_n \;=\; \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\operatorname{sen} n\omega t\, dt \;=\; \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\operatorname{sen} n\omega t\, dt \qquad (4)$$

Otra forma de hallar los coeficientes es tomar $\omega t$ como variable y el periodo correspondiente de $2\pi$ radianes,

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n\omega t\, d(\omega t) \qquad (5)$$

$$b_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} n\omega t\, d(\omega t) \qquad (6)$$

Los límites de integración tienen que incluir un periodo completo, pero no es preciso que sea desde 0 a $T$ o de 0 a $2\pi$. En lugar de esto, la integración puede efectuarse desde $-T/2$ a $T/2$ o desde $-\pi$ a $+\pi$ u otro periodo completo que la simplifique. La constante $a_0$ se obtiene a partir de (*3*) y (*5*) haciendo $n = 0$; no obstante, por ser $\frac{1}{2}a_0$ el valor medio de la función se puede determinar a veces por simple inspección de la forma de onda. La serie obtenida con los coeficientes determinados por las integrales anteriores converge uniformemente a la función en todos los puntos de continuidad y converge al valor medio en los puntos de discontinuidad.

**Ejemplo 1.**

Determinar la serie de Fourier para la onda representada en la Figura 15-2.

La onda es continua para $0 < \omega t < 2\pi$ y viene dada por $f(t) = (10/2\pi)\omega t$, con discontinuidades para $\omega t = n2\pi$, siendo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Las condiciones de Dirichlet se satisfacen y los coeficientes de Fourier se calculan utilizando las expresiones (*5*) y (*6*). El valor medio de la función es 5, por simple inspección; así, pues, $\frac{1}{2}a_0 = 5$. Utilizando ahora la Ecuación (*5*),

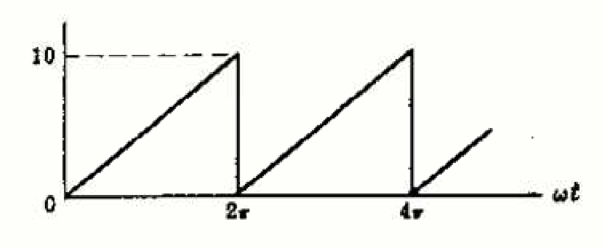



Fig. 15-2

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \cos n\omega t\, d(\omega t) \;=\; \frac{10}{2\pi^2}\left[\frac{\omega t}{n}\operatorname{sen} n\omega t + \frac{1}{n^2}\cos n\omega t\right]_0^{2\pi}$$
$$=\; \frac{10}{2\pi^2 n^2}(\cos n2\pi - \cos 0) \;=\; 0 \qquad \text{para todos los valores enteros de } n.$$

La serie no contiene, por tanto, términos en coseno. Utilizando la ecuación (*6*) se obtiene

$$b_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \operatorname{sen} n\omega t\, d(\omega t) \;=\; \frac{10}{2\pi^2}\left[-\frac{\omega t}{n}\cos n\omega t + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} n\omega t\right]_0^{2\pi} \;=\; -\frac{10}{\pi n}$$

Mediante estos coeficientes del seno y el valor medio la serie es

$$f(t) \quad = \quad 5 - \frac{10}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\omega t - \frac{10}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,2\omega t - \frac{10}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,3\omega t - \cdots \quad = \quad 5 - \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,n\omega t}{n}$$

Los términos en seno y coseno de la misma pulsación pueden combinarse en un término único, seno o coseno, con un ángulo de fase. Resultan así otras dos formas posibles de las series trigonométricas

$$f(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2}a_0 \; + \; \sum c_n \cos\,(n\omega t - \theta_n) \tag{7}$$

y

$$f(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2}a_0 \; + \; \sum c_n\,\mathrm{sen}\,(n\omega t + \phi_n) \tag{8}$$

en las que $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \mathrm{arc\ tg}\ (b_n/a_n)$ y $\phi_n = \mathrm{arc\ tg}\ (a_n/b_n)$. En *(7)* y *(8)*, $c_n$ es la amplitud de los armónicos y los ángulos de fase de dichos armónicos son $\theta_n$ o $\phi_n$.

## EXPRESION EXPONENCIAL DE LAS SERIES DE FOURIER

Si en las series trigonométricas se expresan todos los términos en seno y coseno por medio de sus equivalentes exponenciales el resultado será una serie de términos exponenciales

$$\begin{aligned} f(t) \quad = \quad & \frac{a_0}{2} + a_1\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) + a_2\left(\frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2}\right) + \cdots \\ & + b_1\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) + b_2\left(\frac{e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}}{2j}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

o bien

$$\begin{aligned} f(t) \quad = \quad & \cdots + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{b_2}{2j}\right)e^{-j2\omega t} + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{b_1}{2j}\right)e^{-j\omega t} \\ & + \frac{a_0}{2} + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2j}\right)e^{j\omega t} + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2j}\right)e^{j2\omega t} + \cdots \end{aligned} \tag{10}$$

Ahora puede definirse una nueva constante compleja **A** tal que

$$A_0 = \tfrac{1}{2}a_0, \qquad \mathbf{A}_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n), \qquad \mathbf{A}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n) \tag{11}$$

con lo que *(10)* se transforma en

$$f(t) \quad = \quad \{\cdots + \mathbf{A}_{-2}e^{-j2\omega t} + \mathbf{A}_{-1}e^{-j\omega t} + A_0 + \mathbf{A}_1 e^{j\omega t} + \mathbf{A}_2 e^{j2\omega t} + \cdots\} \tag{12}$$

Para obtener los coeficientes $\mathbf{A}_n$ se multiplican ambos miembros de *(12)* por $e^{-jn\omega t}$ y se integran en un periodo completo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) \quad = \quad & \cdots + \int_0^{2\pi}\mathbf{A}_{-2}\,e^{-j2\omega t}\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_0^{2\pi}\mathbf{A}_{-1}\,e^{-j\omega t}\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) \\ & + \int_0^{2\pi} A_0\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_0^{2\pi}\mathbf{A}_1\,e^{j\omega t}\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \cdots \\ & + \int_0^{2\pi}\mathbf{A}_n\,e^{jn\omega t}\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \cdots \end{aligned} \tag{13}$$

Las integrales definidades del segundo miembro de *(13)* son todas iguales a cero, a excepción de $\int_0^{2\pi}\mathbf{A}_n\,d(\omega t)$ que vale $2\pi\mathbf{A}_n$. Por tanto,

$$\mathbf{A}_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)$$

o bien, en la variable $t$, *(14)*

$$\mathbf{A}_n \quad = \quad \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt$$

De igual forma que en las integrales que se utilizan para determinar $a_n$ y $b_n$, los limites de integración en *(14)* deben abarcar el periodo completo que interese, que no será necesariamente de 0 a $2\pi$ o de 0 a $T$.

Los coeficientes de la serie trigonométrica se deducen de los de la serie exponencial en la forma siguiente: Se suman y luego se restan las expresiones de $\mathbf{A}_n$ y $\mathbf{A}_{-n}$ dadas en (11). Así,

$$\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n + a_n + jb_n)$$

de donde
$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} \tag{15}$$

y
$$\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n - a_n - jb_n)$$

o bien
$$b_n = j(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}) \tag{16}$$

**Ejemplo 2.**

Hallar la serie exponencial de Fourier para la onda de la Fig. 15-3. Utilizando los coeficientes de esta serie exponencial obtener $a_n$ y $b_n$ de la serie trigonométrica y comparar con el Ejemplo 1.

En el intervalo $0 < \omega t < 2\pi$ la función viene dada por $f(t) = (10/2\pi)\omega t$. El valor medio de la función se deduce por simple inspección, y vale 5. Sustituyendo $f(t)$ en (14) obtenemos los coeficientes $\mathbf{A}_n$.

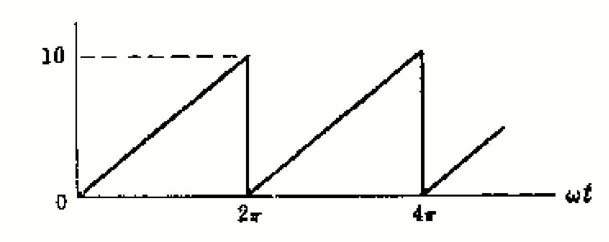


Fig. 15-3

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_0^{2\pi} = j\frac{10}{2\pi n}$$

Llevando los coeficientes $\mathbf{A}_n$ a (12), la forma exponencial de la serie de Fourier de la onda en cuestión es

$$f(t) = \cdots - j\frac{10}{4\pi}e^{-j2\omega t} - j\frac{10}{2\pi}e^{-j\omega t} + 5 + j\frac{10}{2\pi}e^{j\omega t} + j\frac{10}{4\pi}e^{j2\omega t} + \cdots \tag{17}$$

Los coeficientes de los cosenos de la serie trigonométrica son

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = j\frac{10}{2\pi n} + j\frac{10}{2\pi(-n)} = 0$$

y los correspondientes de los senos

$$b_n = j(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}) = j\left(j\frac{10}{2\pi n} - j\frac{10}{2\pi(-n)}\right) = -\frac{10}{\pi n}$$

La serie trigonométrica no tiene, pues, términos en coseno, ya que $a_n = 0$ para cualquier valor de $n$. Los coeficientes de los senos valen $-10/(\pi n)$. El valor medio es 5 y la serie es la siguiente:

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\operatorname{sen}\omega t - \frac{10}{2\pi}\operatorname{sen}2\omega t - \frac{10}{3\pi}\operatorname{sen}3\omega t - \cdots$$

idéntica a la del Ejemplo 1.

## SIMETRIA DE LAS FORMAS DE ONDA

Las series obtenidas en el Ejemplo 1 contienen únicamente términos en seno sumados a una constante. Otras formas de onda tienen solamente términos en coseno y, a veces, únicamente existen en la serie armónicos impares, tanto si la serie contiene senos, cosenos o ambos a la vez. Este es el resultado de ciertos tipos de simetría asociados a la forma de onda. El conocimiento de tal simetría da lugar a una reducción de los cálculos en la determinación de las series. A este respecto, son importantes las definiciones siguientes:

1. Una función $f(x)$ es par cuando $f(x) = f(-x)$.

La función $f(x) = 2 + x^2 + x^4$ es un ejemplo de función par, ya que los valores de la función para $x$ y para $-x$ son iguales. El coseno es una función par, puesto que su desarrollo en serie es

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

La suma de dos o más funciones pares es otra función par, y la adición de una constante no varía la naturaleza par de una función.

Las ondas dibujadas en la Fig. 15-4 representan funciones pares, siendo simétricas respecto del eje vertical.

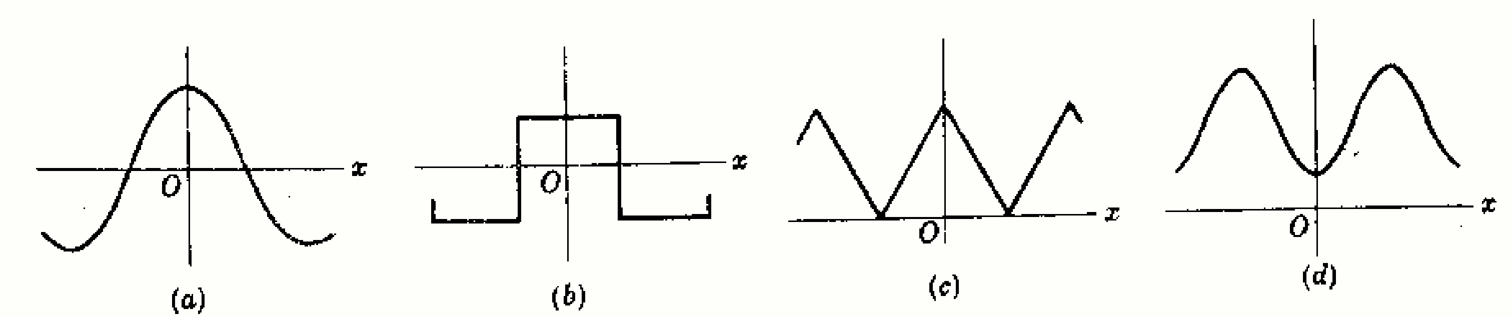



**Fig. 15-4**

2. Una función es impar cuando $f(x) = -f(x)$.

La función $f(x) = x + x^3 + x^5$ es un ejemplo de función impar, ya que los valores de la función para $x$ y $-x$ son de signo contrario. El seno es una función impar, puesto que su desarrollo en serie es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

La suma de dos o más funciones impares es otra función impar, pero la adición de una constante destruye la naturaleza impar de la función, ya que $f(x)$ no es ya igual a $-f(-x)$. El producto de dos funciones impares es una función par.

Las ondas dibujadas en la Fig. 15-5 representan funciones impares.

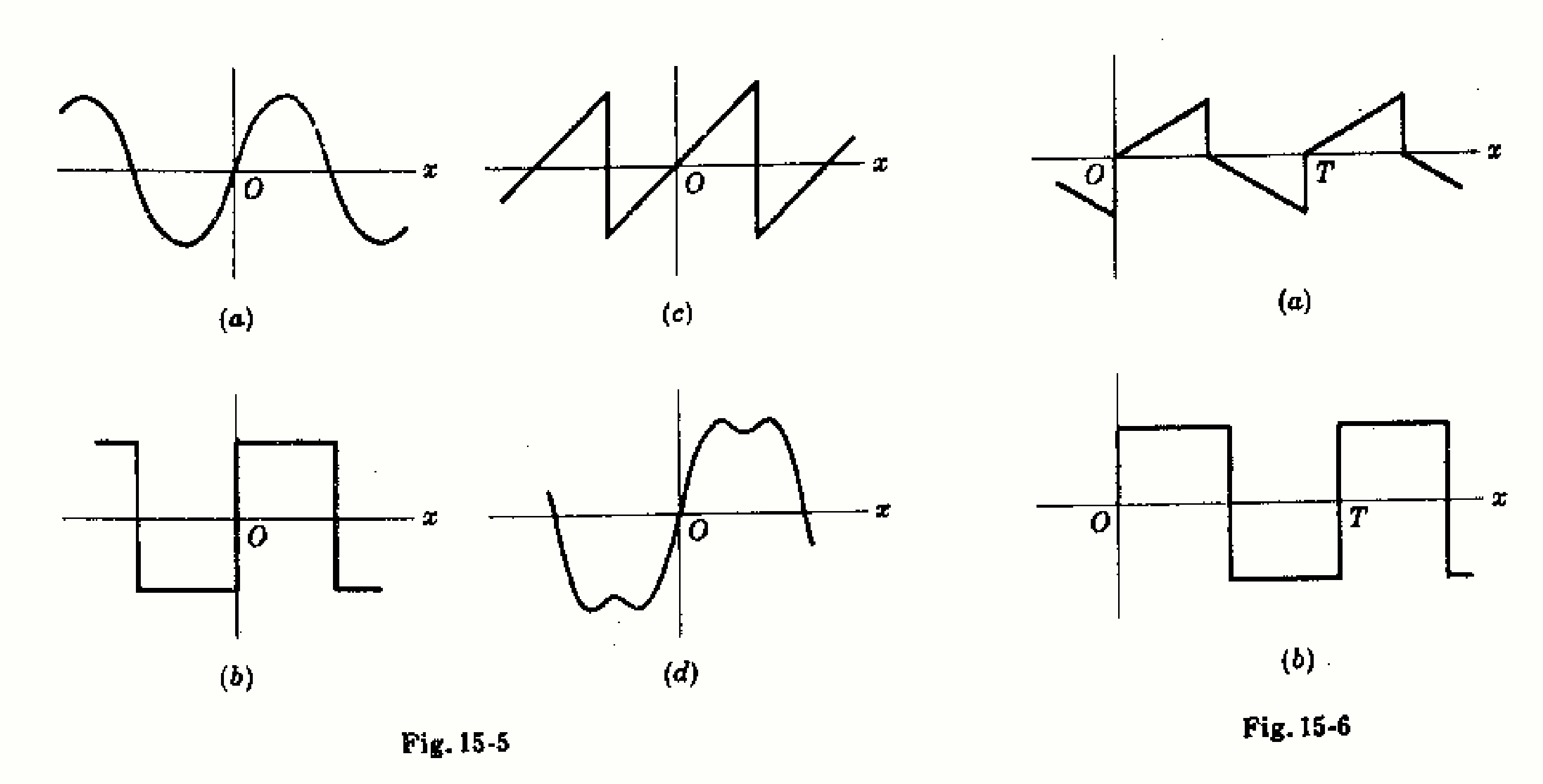



**Fig. 15-5** **Fig. 15-6**

3. Una función periódica $f(x)$ tiene una simetría de semionda si $f(x) = -f(x + T/2)$, siendo $T$ el periodo. En la Fig. 15-6 se representan dos ejemplos de este tipo.

Una vez establecido el tipo de simetría de una onda se llega a las conclusiones siguientes. Si la forma de onda es par, todos los términos de la serie correspondiente son cosenos con una constante si la onda tiene un valor medio distinto de cero. En consecuencia, no es preciso calcular las integrales para hallar

los coeficientes $b_n$, ya que no puede haber términos en seno. Si la forma de onda es impar, la serie solo contiene senos. La onda solo puede ser impar después de eliminar la constante, en cuyo caso su representación de Fourier contendrá simplemente tal constante y una serie de términos en seno. Si la onda tiene simetría de semionda, en la serie habrá solamente armónicos impares. Estas series contendrán términos en seno y coseno a menos que la función sea también par o impar. En todo caso, $a_n$ y $b_n$ son nulos para $n = 2, 4, 6, \ldots$ y para cualquier onda con simetría de semionda.

Algunas formas de onda pueden ser impares o pares según la situación del eje vertical. La onda cuadrada de la Fig. 15-7($a$) cumple la condición de una función par, esto es, $f(x) = f(-x)$. Si se desplaza el eje vertical hasta la posición de la Fig. 15-7($b$) se obtiene una función impar en la que $f(x) = -f(-x)$. Si el eje vertical está en cualquier otro punto que los de la Fig. 15-7, la onda cuadrada no será ni par ni impar y su serie contendrá senos y cosenos. Es esencial, pues, en el análisis de funciones periódicas la elección conveniente del eje vertical para tener una función par o impar siempre que el tipo de onda lo haga posible.

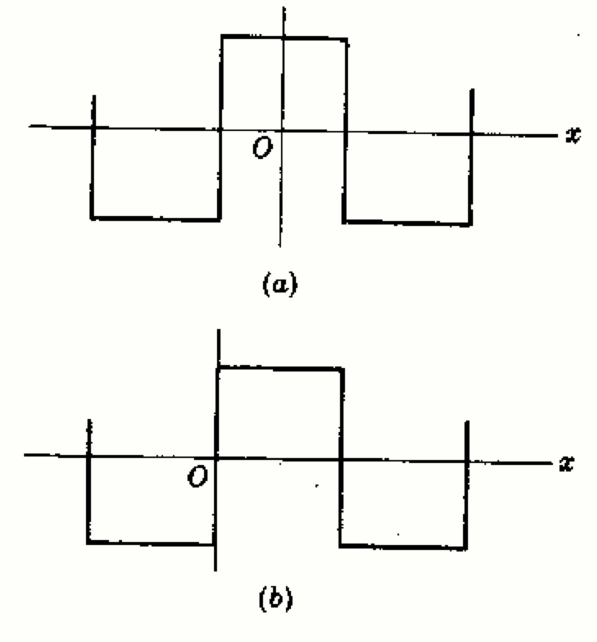


**Fig. 15-7**

El desplazamiento del eje horizontal puede simplificar la serie que representa a la función. La onda de la Fig. 15-8($a$), por ejemplo, no cumple los requisitos de una función impar hasta que se elimine el valor medio, como se observa en la Fig. 15-8($b$). Por tanto, su serie contendrá solamente un término constante y términos en seno.

Como el equivalente exponencial del seno es imaginario puro y el de coseno es real, las consideraciones anteriores de simetría pueden utilizarse para comprobar los coeficientes de las series exponenciales. Una forma de onda par contiene únicamente términos en coseno en su serie trigonométrica y, por tanto, los coeficientes de la serie exponencial de Fourier tienen que ser números reales. Análogamente, una función impar cuya serie trigonométrica está formada por términos en seno tiene coeficientes imaginarios puros en su serie exponencial.

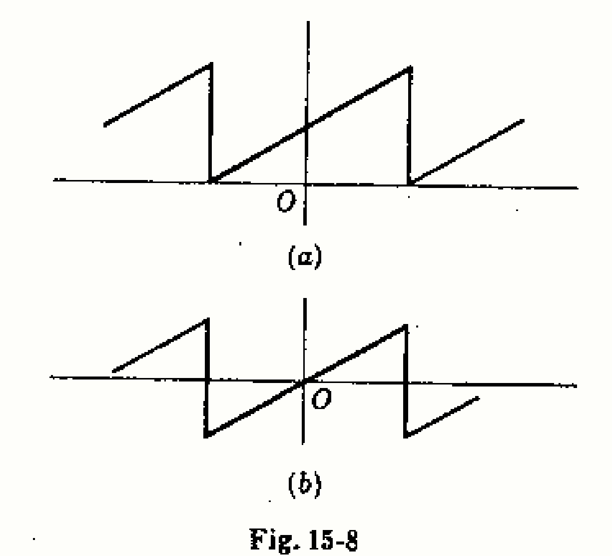


**Fig. 15-8**

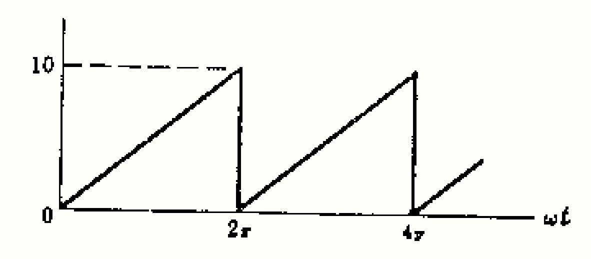
## ESPECTRO DE LINEAS

Se llama *espectro de líneas* a una representación gráfica en la que figuran todas las amplitudes de los armónicos. Las líneas decrecen rápidamente para ondas con series rápidamente convergentes. Las ondas con discontinuidades, tales como el diente de sierra y la onda cuadrada, tienen espectro con amplitudes que decrecen lentamente, ya que sus series poseen armónicos muy altos. Sus armónicos de orden 10 tendrán, normalmente, amplitudes de valor apreciable comparado con el fundamental. Por el contrario, la serie de formas de onda sin discontinuidades y de aspecto generalmente suave convergen rápidamente a la función y basta con pocos términos para generar la onda. Esta rápida convergencia se hace evidente en el espectro de líneas en que las amplitudes de los armónicos decrecen rápidamente de manera que por encima del quinto o del sexto son ya despreciables.

El número en armónicos y el espectro de líneas de una onda forman parte de su naturaleza y son invariantes respecto del método de análisis que se haga. El desplazamiento del eje al cero da a la serie

trigonométrica un aspecto completamente distinto y los coeficientes de la serie exponencial también varían mucho con dicho desplazamiento del eje, pero siempre aparecen los mismos armónicos en las series y sus amplitudes, dadas por $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ o $c_n = |\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_{-n}|$, son constantes.

En la Fig. 15-9 se representan la onda en diente de sierra del Ejemplo 1 y su espectro correspondiente. Como en la serie solo existen términos en seno, las amplitudes de los armónicos $c_n$ vienen dadas directamente por $b_n$.



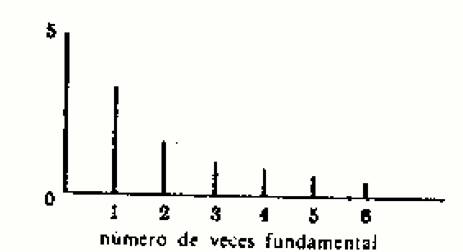




Fig. 15-9

La serie exponencial tiene términos con pulsaciones $+n\omega$ y $-n\omega$ [véase Ec. (17)] y el espectro se construye como se ve en la Fig. 15-10. La amplitud real de un armónico dado es la suma de las dos amplitudes, una para $+n\omega$ y la otra para $-n\omega$. En el espectro de la Fig. 15-10 aparecen líneas con amplitud $10/4\pi$ para $n = -2$ y $n = +2$. Sumándolas se tiene $10/2\pi$ que da la amplitud real de este armónico, lo que concuerda con el espectro de la Figura 15-9.

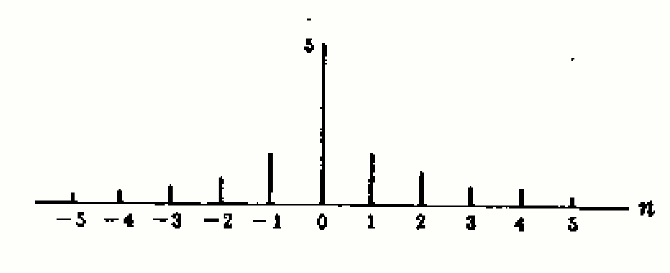



Fig. 15-10

## SINTESIS DE ONDAS

Síntesis es una combinación de las partes para formar un todo. En el análisis de Fourier se llama síntesis a la recombinación de los términos de la serie trigonométrica, ordinariamente los cuatro o cinco primeros, para reproducir la onda original. Con frecuencia, solo después de haber efectuado la síntesis de una onda nos convencemos de que la serie de Fourier expresa realmente la onda periódica de la que fue obtenida.

La serie trigonométrica para la onda en diente de sierra del Ejemplo 1 con una amplitud de pico igual a 10 es

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\operatorname{sen}\omega t - \frac{10}{2\pi}\operatorname{sen}2\omega t - \frac{10}{3\pi}\operatorname{sen}3\omega t - \cdots$$

Estos cuatro términos se han representado y sumado en la Fig. 15-11, y aunque el resultado no es un diente de sierra perfecto se vislumbra que tomando más términos se acercaría aún más. Como esta onda tiene discontinuidades, su serie no converge rápidamente y, en consecuencia, la síntesis utilizando solo cuatro términos no da un resultado demasiado bueno. El término siguiente para la pulsación $4\omega$ tiene una amplitud $10/4\pi$, que es apreciable todavía comparada con la fundamental de amplitud $10/\pi$. A medida que se añaden términos en la síntesis de la onda se van reduciendo las irregularidades de la resultante

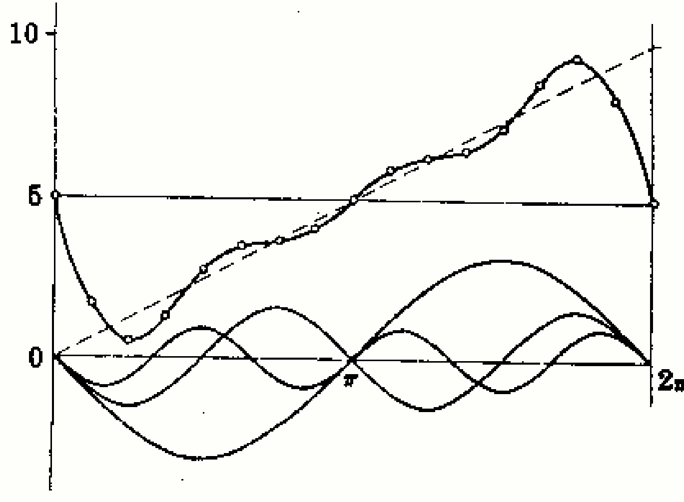



Fig. 15-11

y se mejora la aproximación a la onda original. Esto es lo que quería expresarse cuando se decía anteriormente que la *serie converge a la función en todos los puntos continuos y al valor medio en todos los puntos de discontinuidad.* En la Fig. 15-11 para 0 y $2\pi$ es evidente que habrá un valor 5, ya que todos los términos en senos son nulos en dichos puntos. Estos son los puntos de discontinuidad y el valor de la función es 10 cuando nos aproximamos por la izquierda y 0 cuando lo hacemos por la derecha; el valor medio es 5.

## VALOR EFICAZ Y POTENCIA

Una onda periódica, no senoidal, de corriente al circular por una resistencia da lugar a una potencia que viene determinada por el valor eficaz (o valor medio cuadrático) de la onda. En el Capítulo 2 se vio que el valor eficaz de una función del tipo

$$f(t) \;=\; \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \cdots$$

es

$$F_{ef} \;=\; \sqrt{(\tfrac{1}{2}a_0)^2 + \tfrac{1}{2}a_1^2 + \tfrac{1}{2}a_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}b_1^2 + \tfrac{1}{2}b_2^2 + \cdots} \qquad (18)$$

Expresando la amplitud armónica por $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y escribiendo $c_0$ para el valor medio de la Ecuación (*18*) tendremos,

$$F_{ef} \;=\; \sqrt{c_0^2 + \tfrac{1}{2}c_1^2 + \tfrac{1}{2}c_2^2 + \tfrac{1}{2}c_3^2 + \cdots}$$

Si se considera un circuito lineal con una tensión aplicada periódica podría esperarse que la corriente resultante tuviera los mismos armónicos que la tensión, pero con amplitudes de valor relativo diferente, ya que la impedancia varía con $n\omega$. Es posible que algunos armónicos no aparezcan en la corriente, puesto que la resonancia paralelo da lugar a una impedancia infinita. En general, se puede escribir:

$$v \;=\; V_0 + \sum V_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) \qquad \text{e} \qquad i \;=\; I_0 + \sum I_n \operatorname{sen}(n\omega t + \psi_n) \qquad (19)$$

con los correspondientes valores eficaces

$$V_{ef} \;=\; \sqrt{V_0^2 + \tfrac{1}{2}V_1^2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 + \cdots} \qquad \text{e} \qquad I_{ef} \;=\; \sqrt{I_0^2 + \tfrac{1}{2}I_1^2 + \tfrac{1}{2}I_2^2 + \cdots} \qquad (20)$$

La potencia media $P$ (activa) se obtiene por integración de la potencia instantánea dada por el producto de $v$ e $i$,

$$p \;=\; vi \;=\; [V_0 + \sum V_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \operatorname{sen}(n\omega t + \psi_n)] \qquad (21)$$

Puesto que $v$ e $i$ tienen periodos de $T$ segundos, su producto tiene que tener un número entero de periodos $T$. (Recuérdese que para una onda senoidal simple de tensión aplicada el producto $vi$ tiene un periodo mitad del de la onda de tensión.) La potencia media

$$P \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T [V_0 + \sum V_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \operatorname{sen}(n\omega t + \psi_n)]\, dt \qquad (22)$$

El examen de los términos posibles en el producto de dos series infinitas muestra que pueden ser de los siguientes tipos: Producto de dos constantes, producto de una constante y una función seno, producto de dos funciones seno de frecuencias diferentes y funciones senoidales al cuadrado. Después de la integración el producto de las dos constantes sigue siendo $V_0 I_0$ y las funciones senoidales al cuadrado, con los límites aplicados, resulta ser $(V_n I_n/2) \cos (\phi_n - \psi_n)$, mientras que todos los demás productos, por integración en un periodo $T$, son nulos. En estas condiciones la potencia media

$$P \;=\; V_0 I_0 + \tfrac{1}{2}V_1 I_1 \cos\theta_1 + \tfrac{1}{2}V_2 I_2 \cos\theta_2 + \tfrac{1}{2}V_3 I_3 \cos\theta_3 + \cdots \qquad (23)$$

siendo $\theta_n = (\phi_n - \psi_n)$ el ángulo en la impedancia equivalente del circuito a la pulsación $n\omega$ radianes por segundo y $V_n$ e $I_n$ son los valores máximos de las respectivas funciones seno. En los circuitos de corriente alterna (c.a.), con una frecuencia se vio que la potencia media (activa) es $P = VI \cos\theta$, que está incluida en (*23*), ya que $V$ es una tensión eficaz $V = V_{max}/\sqrt{2}$ e $I = I_{max}/\sqrt{2}$ de forma que $P = \frac{1}{2}V_{max}I_{max} \cos\theta$. En circuitos simples de corriente continua (c.c.) la potencia es $VI$, incluida en (*23*) como $V_0I_0$. Por tanto, la Ecuación (23) de la potencia es general, incluyendo circuitos de c.c. y de c.a. con una frecuencia, y también ondas periódicas no senoidales. Se observa también en (*23*) que no contribuyen a la potencia media las tensiones y corrientes de frecuencias diferentes. Por tanto, respecto de la potencia, cada armónico actúa independientemente.

## APLICACION AL ANALISIS DE CIRCUITOS

Se ha sugerido anteriormente la posibilidad de aplicar los términos de una tensión desarrollada en serie a un circuito lineal y obtener los armónicos correspondientes de la serie de la intensidad de corriente. Este resultado es consecuencia del teorema de superposición. Esto es, se puede considerar cada uno de los términos de la serie de Fourier como la tensión de una fuente independiente, tal como se ha hecho en la Fig. 15-12. Entonces, la impedancia equivalente del circuito para cada pulsación armónica se utiliza para calcular la corriente que corresponde al citado armónico. La suma de las respuestas individuales constituye la respuesta total a la tensión aplicada en forma de serie.

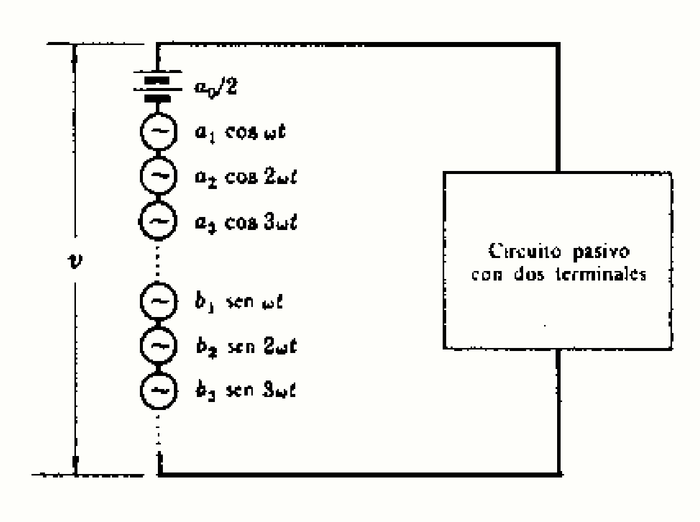



**Fig. 15-12**

**Ejemplo 3.**

A un circuito serie $RL$, en el que $R = 5$ ohmios y $L = 0{,}02$ henrios, se le aplica una tensión $v = 100 + 50$ sen $\omega t + 25$ sen $3\omega t$ voltios, siendo $\omega = 500$ radianes por segundo. Determinar la intensidad de corriente y la potencia media (activa).

Se calcula la impedancia equivalente del circuito para cada pulsación obteniéndose después corrientes respectivas.

Para $\omega = 0$, $\mathbf{Z} = 5$ y

$$I_0 = V_0/R = 100/5 = 20$$

**Fig. 15-13**

Para $\omega = 500$ rad/s, $\mathbf{Z}_1 = 5 + j(0{,}02)(500) = 5 + j10$ con lo que

$$i_1 = \frac{V_{1\,max}}{|\mathbf{Z}_1|} \text{sen}\,(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11{,}15} \text{sen}\,(\omega t - 63{,}4^\circ) = 4{,}48 \text{ sen}\,(\omega t - 63{,}4^\circ)$$

Para $3\omega = 1500$ rad/s, $\mathbf{Z}_3 = 5 + j30$, con lo que

$$i_3 = \frac{V_{3\,max}}{|\mathbf{Z}_3|} \text{sen}\,(3\omega t - \theta_3) = \frac{25}{30{,}4} \text{sen}\,(3\omega t - 80{,}54^\circ) = 0{,}823 \text{ sen}\,(3\omega t - 80{,}54^\circ)$$

La suma de las corrientes armónicas es la respuesta total pedida.

$$i = 20 + 4{,}48 \text{ sen}\,(\omega t - 63{,}4^\circ) + 0{,}823 \text{ sen}\,(3\omega t - 80{,}54^\circ)$$

Esta corriente tiene un valor eficaz

$$I_{ef} = \sqrt{20^2 + 4{,}48^2/2 + 0{,}823^2/2} = \sqrt{410{,}6} = 20{,}25$$

que da lugar en la resistencia de 5 Ω a una disipación de potencia

$$P = RI_{ef}^2 = (5)(410{,}6) = 2053 \text{ W}$$

Como comprobación, se puede calcular la potencia media total, hallando la potencia correspondiente a cada armónico y sumando los resultados obtenidos.

Para $\omega = 0$, $\quad P = V_0 I_0 = 100(20) = 2000$ W

Para $\omega = 500$ rad/s $\quad P = \frac{1}{2}V_1 I_1 \cos\theta_1 = \frac{1}{2}(50)(4,48)\cos 63,4^\circ = 50,1$ W

Para $3\omega = 1500$ rad/s, $\quad P = \frac{1}{2}V_3 I_3 \cos\theta_3 = \frac{1}{2}(25)(0,823)\cos 80,54^\circ = 1,69$ W

Entonces $\quad P_T = 2000 + 50,1 + 1,69 = 2052$ W

*Otro método*

El desarrollo en serie de la caída de tensión en la resistencia es

$$v_R = Ri = 100 + 22,4 \operatorname{sen}(\omega t - 63,4^\circ) + 4,11 \operatorname{sen}(3\omega t - 80,54^\circ)$$

de donde $\quad V_R = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22,4)^2 + \frac{1}{2}(4,11)^2} = \sqrt{10.259} = 101,3$

La potencia suministrada por la fuente vale $P = V_R^2/R = (101,3)^2/5 = 2052$ W.

La serie exponencial de Fourier se emplea de manera análoga, excepto que normalmente la impedancia del circuito es función de $n\omega$ y los coeficientes de la serie intensidad de corriente $\mathbf{I}_n$ se pueden calcular a partir de la relación $\mathbf{V}_n/\mathbf{Z}_n$, como se hace en el Ejemplo 4 siguiente.

**Ejemplo 4.**

A un condensador de capacidad $C$ faradios se le aplica la tensión representada por la onda triangular de la Fig. 15-14. Hallar la intensidad de la corriente resultante.

En el intervalo $-\pi < \omega t < 0$, la función tensión vale $v = V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t$, y para $0 < \omega t < \pi$, $v = V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t$. Los coeficientes de la serie exponencial se determinan por las integrales correspondientes en un periodo.

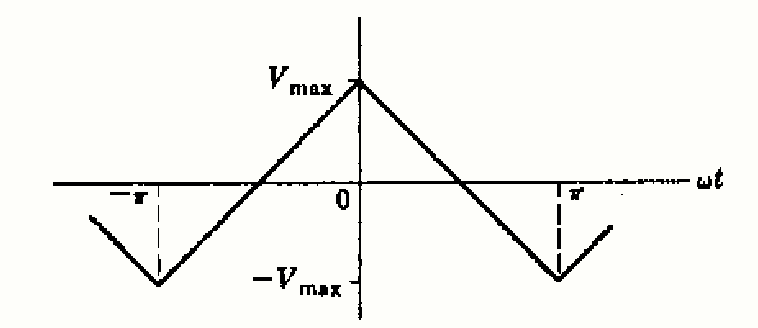



Fig. 15-14

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

de donde $\mathbf{A}_n = \dfrac{4V_{max}}{\pi^2 n^2}$ para $n$ impar, y $\mathbf{A}_n = 0$ para $n$ par.

La impedancia del circuito $\mathbf{Z} = 1/j\omega C$ puede expresarse en función de $n$, esto es, $\mathbf{Z}_n = 1/jn\omega C$. Ahora bien,

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_n} = \frac{4V_{max}}{\pi^2 n^2}(jn\omega C) = j\left(\frac{4V_{max}\,\omega C}{\pi^2 n}\right)$$

y la serie de la corriente es

$$i = j\left(\frac{4V_{max}\,\omega C}{\pi^2}\right)\sum \frac{e^{jn\omega t}}{n} \qquad \text{para } n \text{ impar únicamente}$$

La serie puede convertirse en la forma trigonométrica y hacer su síntesis para mostrar la forma de onda de la corriente. Sin embargo, esta serie es de la misma forma que el resultado del Problema 15-8, en el que el coeficiente $\mathbf{A}_n = -j(2V/n\pi)$ para $n$ impar solamente. El signo aquí es negativo, indicando que la onda de corriente es el negativo de la onda cuadrada del Problema 15-8 y con un valor de pico $(2V_{max}\omega C)/\pi$.

## Problemas resueltos

**15-1** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda cuadrada de la Fig. 15-15 y representar el espectro de líneas.

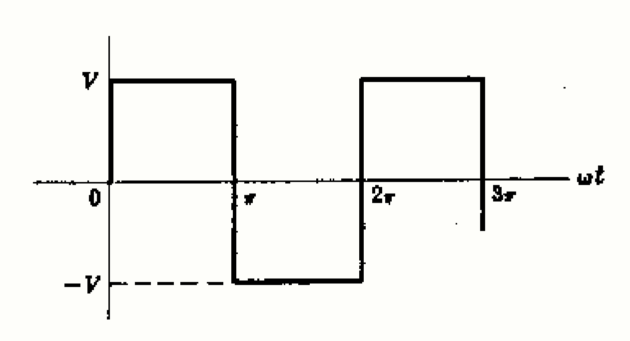



Fig. 15-15




Fig. 15-16

En el intervalo $0 < \omega t < \pi, f(t) = V$; para $\pi < \omega t < 2\pi, f(t) = -V$. El valor medio de la onda es cero; en consecuencia, $a_0/2 = 0$. Los coeficientes de los cosenos se obtienen haciendo la integral correspondiente en un periodo con las funciones en la forma siguiente:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} V \cos n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \cos n\omega t \, d(\omega t)\right\} = \frac{V}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= 0 \quad \text{para todos los valores de } n$$

Por consiguiente, la serie no contiene términos en coseno. Análogamente, para los términos en seno, los coeficientes son

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} V \operatorname{sen} n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \operatorname{sen} n\omega t \, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n} \cos n\omega t\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n} \cos n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi n}(-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n}(1 - \cos n\pi)$$

Por tanto, $b_n = 4V/\pi n$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$, y $b_n = 0$ para $n = 2, 4, 6, \ldots$ El desarrollo en serie de la onda cuadrada es

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \operatorname{sen} \omega t + \frac{4V}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{4V}{5\pi} \operatorname{sen} 5\omega t + \cdots$$

El espectro de líneas de esta serie es el representado en la Fig. 15-16. La serie contiene solamente términos en seno de armónicos impares, lo que se podría haber deducido sin más que examinar la simetría de la forma de onda. Como la onda de la Fig. 15-15 es impar, su serie contendrá únicamente términos en seno y, puesto que tiene también simetría de semionda, solo habrá armónicos impares.

**15-2** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda triangular de la Fig. 15-17 y representar el espectro de líneas.

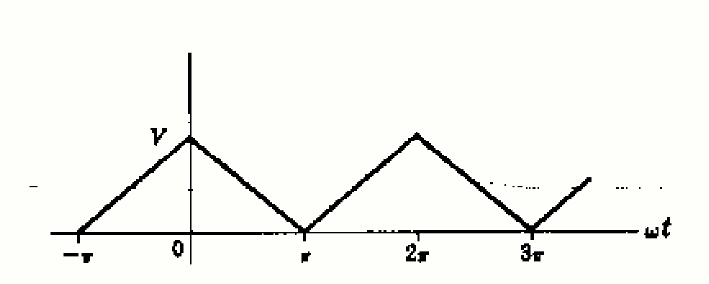



Fig. 15-17

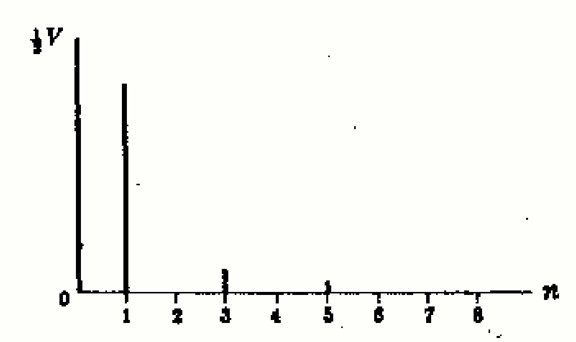



Fig. 15-18

La onda es una función par, puesto que $f(t) = f(-t)$, y suprimiendo el valor medio $V/2$ tiene también simetría de semionda, esto es, $f(t) = -f(t + T/2)$. En el intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$; para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. Como las formas de onda pares solo tienen términos en coseno, $b_n = 0$ para todos los valores enteros de $n$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [V + (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t \, d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega t \, d(\omega t) + \int_{-\pi}^{0} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t \, d(\omega t) - \int_{0}^{\pi} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t \, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\operatorname{sen} n\omega t\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\operatorname{sen} n\omega t\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 n^2}\{\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0\} = \frac{2V}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi)$$

Como predice la simetría de semionda, la serie solo tiene términos impares, ya que $a_n = 0$ para $n = 2, 4, 6, \ldots$ Para $n = 1, 3, 5, \ldots$, $a_n = 4V/\pi^2 n^2$. Por tanto, la serie de Fourier pedida es

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2}\cos \omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t + \cdots$$

Los coeficientes disminuyen como $1/n^2$ y, por tanto, la serie converge más rápidamente que la del Problema 15-1. Este hecho se hace evidente en el espectro de la Figura 15-18.

**15-3** Hallar la serie trigonométrica de la onda en diente de sierra de la Fig. 15-19 y dibujar el espectro de líneas.

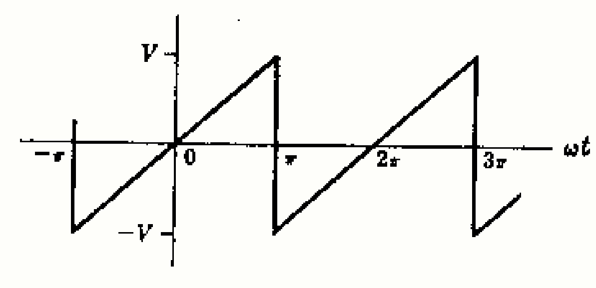



Fig. 15-19

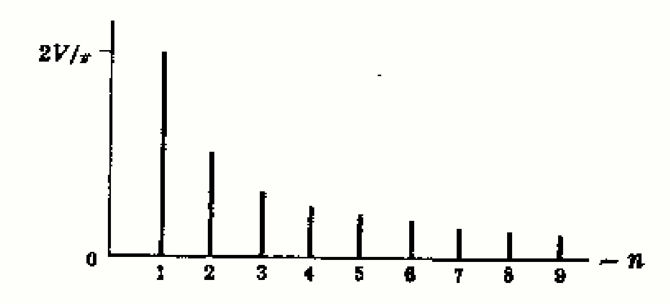



Fig. 15-20

Por simple inspección se deduce que el valor medio de la onda es cero y que se trata de una onda impar. En consecuencia, la serie solo contiene términos en seno. En el periodo de $-\pi$ a $+\pi$ la onda viene dada por la expresión $f(t) = (V/\pi)\omega t$, por lo que utilizaremos estos límites para el cálculo de la integral correspondiente $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (V/\pi)\omega t \operatorname{sen} n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2V}{n\pi}(\cos n\pi)$$

La función $\cos n\pi$ es positiva para $n$ par y negativa para $n$ impar, con lo que el signo de los coeficientes es alternativamente positivo y negativo.

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{\operatorname{sen}\omega t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\omega t + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\omega t + \cdots\}$$

Los coeficientes disminuyen como $1/n$ y, por consiguiente, la serie converge lentamente, lo cual se ve en el espectro de la Fig. 15-20. Excepto en lo que se refiere al desplazamiento del eje al cero y al término medio, la forma de onda es idéntica a la del Ejemplo 1. Si se comparan los espectros de las Figs. 15-20 y 15-19 se observará su semejanza.

**15-4** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda representada en la Fig. 15-21 y dibujar el espectro de líneas.

En el intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = (V/\pi)\omega t$, y en $\pi < \omega t < 2\pi$, $f(t) = 0$. El valor medio, por simple inspección de la onda es $V/4$. Como la onda no es ni par ni impar, la serie contendrá senos y cosenos. En el intervalo de 0 a $\pi$, se tiene

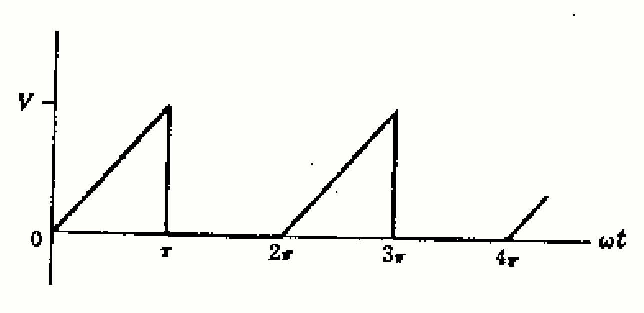


Fig. 15-21

Fig. 15-22

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(V/\pi)\omega t\cos n\omega t\,d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\operatorname{sen} n\omega t\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1)$$

Cuando $n$ es par, $(\cos n\pi - 1) = 0$ y $a_n = 0$. Cuando $n$ es impar, $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$. Los coeficientes $b_n$ son

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(V/\pi)\omega t\operatorname{sen} n\omega t\,d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} = -\frac{V}{\pi n}(\cos n\pi)$$

El signo cambia con $b_n = -V/\pi n$ para $n$ par y $b_n = +V/\pi n$ para $n$ impar. La serie de Fourier pedida es

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2}\cos\omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t - \cdots$$
$$+ \frac{V}{\pi}\operatorname{sen}\omega t - \frac{V}{2\pi}\operatorname{sen} 2\omega t + \frac{V}{3\pi}\operatorname{sen} 3\omega t - \cdots$$

Las amplitudes de los armónicos pares vienen dadas directamente por los coeficientes $b_n$, puesto que no hay términos en coseno pares. Sin embargo, las amplitudes de los armónicos impares han de calcularse utilizando $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Por consiguiente, $c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2} = (0{,}377)V$. Análogamente, $c_3 = (0{,}109)V$ y $c_5 = (0{,}064)V$. El espectro de líneas aparece representado en la Figura 15-22.

**15-5** Hallar la serie trigonométrica de la onda senoidal rectificada de la Fig. 15-23 y dibujar su espectro de líneas.

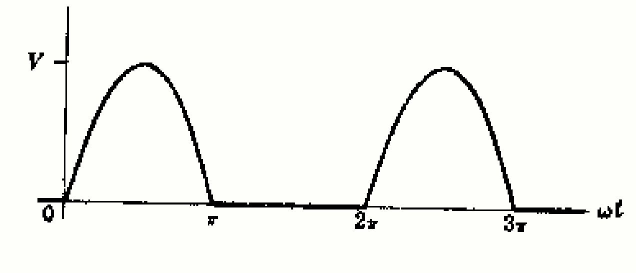


Fig. 15-23

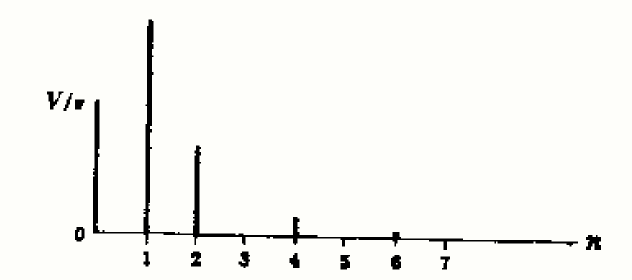


Fig. 15-24

La onda no presenta simetría y, por tanto, es de esperar que las series contendrán senos y cosenos. Como el valor medio no se puede deducir por simple inspección, se calcula $a_0$ del término $a_0/2$ de la serie

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V\operatorname{sen}\omega t\,d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\Big[-\cos\omega t\Big]_0^{\pi} = \frac{2V}{\pi}$$

A continuación, se determina $a_n$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V\operatorname{sen}\omega t\cos n\omega t\,d(\omega t)$$
$$= \frac{V}{\pi}\left[\frac{-n\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen} n\omega t - \cos n\omega t\cos\omega t}{-n^2+1}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + 1)$$

Con $n$ par, $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$; y con $n$ impar, $a_n = 0$. Sin embargo, esta expresión es indeterminada para $n = 1$ y, por tanto, hay que integrar por separado para hallar $a_1$,

$$a_1 \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad 0$$

Ahora se calcula $b_n$:

$$b_n \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen} n\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad \frac{V}{\pi}\left[\frac{n \operatorname{sen}\omega t \cos n\omega t - \operatorname{sen} n\omega t \cos\omega t}{-n^2+1}\right]_0^{\pi} \quad = \quad 0$$

La expresión es indeterminada, como antes, para $n = 1$, con lo que $b_1$ debe calcularse por separado,

$$b_1 \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \operatorname{sen}^2\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad \frac{V}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4}\right]_0^{\pi} \quad = \quad \frac{V}{2}$$

Con esto, la serie de Fourier pedida es

$$f(t) \quad = \quad \frac{V}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\}$$

El espectro de líneas de la Fig. 15-24 muestra el término fundamental y las amplitudes rápidamente decrecientes de los armónicos superiores.

**15-6** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda senoidal rectificada que se representa en la Fig. 15-25, cuyo eje vertical se ha desplazado de la posición que tenía en el Problema 15-5.

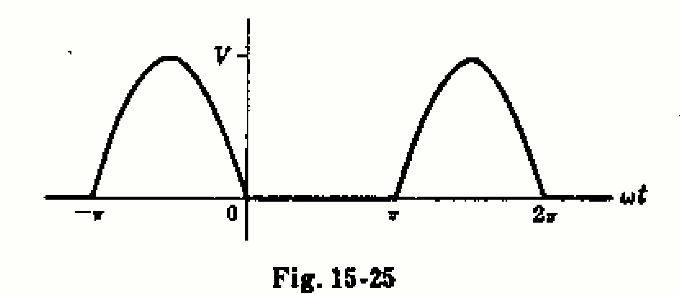



Fig. 15-25

La función está definida en el intervalo $-\pi < \omega t < 0$ por $f(t) = -V \operatorname{sen}\omega t$. El valor medio es el mismo que en el Problema 15-5, esto es, $a_0 = 2V/\pi$. Para los coeficientes $a_n$ tenemos

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \operatorname{sen}\omega t)\cos n\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad \frac{V}{\pi(1-n^2)}(1+\cos n\pi)$$

Para $n$ par, $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$, y para $n$ impar, $a_n = 0$ excepto para $n = 1$, cuyo caso hay que considerarlo por separado.

$$a_1 \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \operatorname{sen}\omega t)\cos\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad 0$$

Para los coeficientes $b_n$ resulta

$$b_n \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \operatorname{sen}\omega t)\operatorname{sen} n\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad 0$$

También aquí esta expresión es indeterminada para $n = 1$; se calcula, pues, $b_1$ por separado.

$$b_1 \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V)\operatorname{sen}^2\omega t \; d(\omega t) \quad = \quad -\frac{V}{2}$$

Por tanto, la serie pedida es

$$f(t) \quad = \quad \frac{V}{\pi}\left\{1 - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\}$$

Esta serie es idéntica a la del Problema 15-5, excepto el término fundamental que ahora es negativo. El espectro de líneas es, evidentemente, idéntico al de la Figura 15-24.

**15-7** Hallar la serie trigonométrica de Fourier para el pulso rectangular de la Fig. 15-26 y representar el espectro de líneas.

Con el eje vertical en la posición mostrada la onda es par y la serie contendrá solamente cosenos y un término constante. El periodo que se considera para el cálculo de los coeficientes es desde $-\pi$ hasta $+\pi$, y la función es nula excepto en el intervalo de $-\pi/6$ a $+\pi/6$.

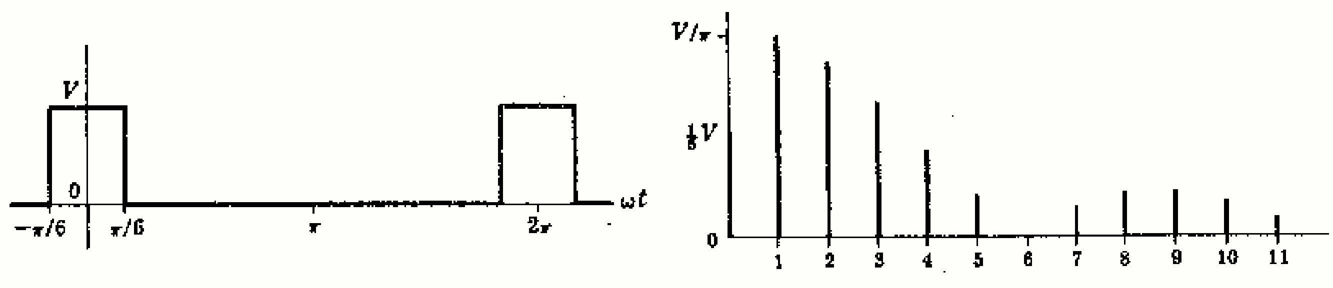



Fig. 15-26 Fig. 15-27

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\,d(\omega t) = \frac{V}{3}, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\cos n\omega t\,d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$$

Puesto que sen $n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, \ldots$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$, respectivamente, la serie es

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2\omega t + 1\left(\frac{1}{3}\right)\cos 3\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\cos 4\omega t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\cos 5\omega t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)\cos 7\omega t - \cdots\right\}$$

o

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(n\pi/6)\cos n\omega t$$

El espectro de líneas representado en la Fig. 15-27 decrece muy lentamente, ya que la serie converge muy lentamente a la función. Tiene particular interés el hecho de que las amplitudes de los armónicos octavo, noveno y décimo son superiores a la del séptimo. Con las ondas simples antes consideradas, las amplitudes de los armónicos superiores eran progresivamente decrecientes.

**15-8** Determinar la serie exponencial de Fourier de la onda cuadrada de la Fig. 15-28 y dibujar el espectro de líneas. Obtener los coeficientes de la serie trigonométrica y compararlos con los del Problema 15-1.

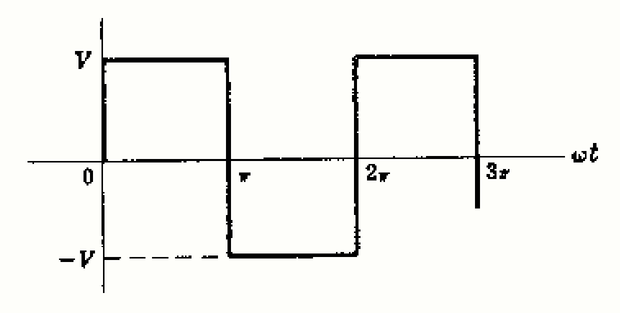



Fig. 15-28

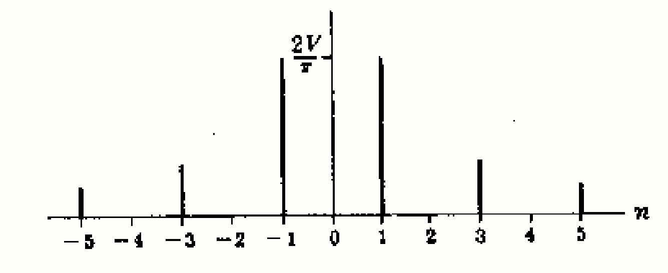



Fig. 15-29

En el intervalo $-\pi < \omega t < 0, f(t) = -V$, y para $0 < \omega t < \pi, f(t) = V$. El valor medio de la onda es cero. La onda es impar; por tanto, los coeficientes $\mathbf{A}_n$ son números imaginarios puros.

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-V)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} Ve^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi}\left\{-\left[\frac{1}{(-jn)}e^{-jn\omega t}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{(-jn)}e^{-jn\omega t}\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{(-j2\pi n)}(-e^0 + e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^0) = j\frac{V}{n\pi}(e^{jn\pi} - 1)$$

Para $n$ par, $e^{jn\pi} = +1$ y $\mathbf{A}_n = 0$; para $n$ impar, $e^{jn\pi} = -1$ y $\mathbf{A}_n = -j(2V/n\pi)$. La serie de Fourier pedida es

$$f(t) = \cdots + j\frac{2V}{3\pi}e^{-j3\omega t} + j\frac{2V}{\pi}e^{-j\omega t} - j\frac{2V}{\pi}e^{j\omega t} - j\frac{2V}{3\pi}e^{j3\omega t} - \cdots$$

El espectro de la Fig. 15-29 representa las amplitudes para pulsaciones positivas y negativas. Combinando los valores para $+n$ y $-n$ se tienen las amplitudes representadas para la serie trigonométrica en la Figura 15-16.

Los coeficientes de los cosenos en la serie trigonométrica son

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = -j\frac{2V}{n\pi} + \left(-j\frac{2V}{(-n\pi)}\right) = 0$$

y
$$b_n = j[\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}] = j\left[-j\frac{2V}{n\pi} + j\frac{2V}{(-n\pi)}\right] = \frac{4V}{n\pi} \quad \text{solo para } n \text{ impar}$$

que coincide con los coeficientes de la serie trigonométrica obtenidos en el Problema 15-1.

**15-9** Hallar la serie exponencial de Fourier para la onda triangular de la Fig. 15-30 y dibujar el espectro de líneas.

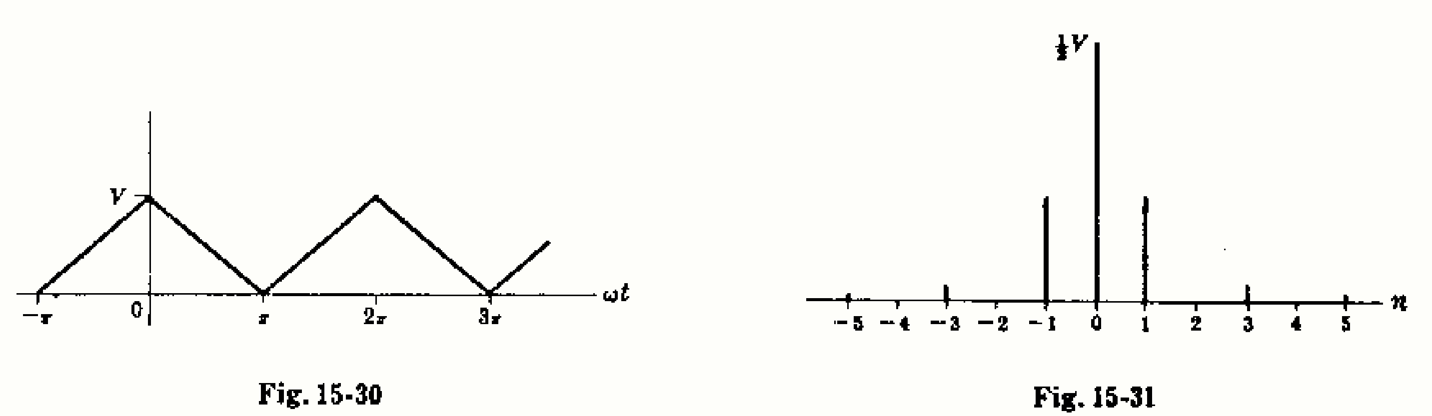



**Fig. 15-30** **Fig. 15-31**

En el intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$, y para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. La onda es par y, por tanto, los coeficientes $\mathbf{A}_n$ son reales. Por simple inspección, el valor medio es $V/2$.

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} [V + (V/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left\{\int_{-\pi}^{0} \omega t\, e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} (-\omega t)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{-\pi}^{\pi} \pi\, e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left\{\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{0}^{\pi}\right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2}[1 - e^{jn\pi}]$$

Para $n$ par, $e^{jn\pi} = +1$ y $\mathbf{A}_n = 0$; para $n$ impar, $\mathbf{A}_n = 2V/\pi^2 n^2$. Por tanto, la serie es

$$f(t) = \cdots + \frac{2V}{(-3\pi)^2}e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2}e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2}e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2}e^{j3\omega t} + \cdots$$

El espectro se representa en la Fig. 15-31 con líneas para $+n$ y $-n$, que, si se suman, da las mismas amplitudes del espectro de la Figura 15-18.

Los coeficientes de la serie trigonométrica son

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = \frac{2V}{\pi^2 n^2} + \frac{2V}{\pi^2(-n)^2} = \frac{4V}{\pi^2 n^2} \quad \text{solo para } n \text{ impar}$$

y
$$b_n = j[\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}] = j\left[\frac{2V}{\pi^2 n^2} - \frac{2V}{\pi^2(-n)^2}\right] = 0$$

Estos coeficientes concuerdan con los resultados del Problema 15-2.

**15-10** Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda senoidal rectificada que se representa en la Figura 15-32.

En el intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V \operatorname{sen} \omega t$; y desde $\pi$ a $2\pi$, $f(t) = 0$. Entonces,

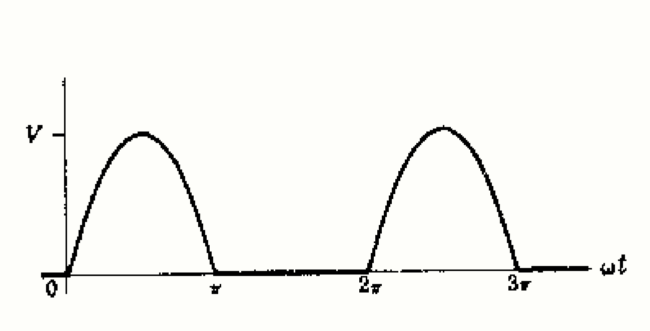



Fig. 15-32

V/π

−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 n

Fig. 15-33

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \operatorname{sen} \omega t\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{2\pi}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)}(-jn \operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t)\right]_0^{\pi} = \frac{V}{2\pi(1-n^2)}(e^{-jn\pi}+1)$$

Para $n$ par, $\mathbf{A}_n = V/\pi(1-n^2)$; para $n$ impar, $e^{-jn\pi} = -1$ y $\mathbf{A}_n = 0$. Ahora bien, para $n = \pm 1$ la expresión de $\mathbf{A}_n$ es indeterminada. Puede aplicarse la regla de L'Hôpital, esto es, se derivan numerador y denominador respecto de $n$ y, después, se hace que $n$ tienda a 1; en estas condiciones, $\mathbf{A}_1 = -j(V/4)$ y $\mathbf{A}_{-1} = j(V/4)$. El valor medio es

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \operatorname{sen} \omega t\, d(\omega t) = \frac{V}{2\pi}\Big[-\cos \omega t\Big]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}$$

La serie exponencial, por tanto, es

$$f(t) = \cdots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + j\frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} - j\frac{V}{4}e^{j\omega t} - \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} - \cdots$$

Es interesante observar que solo hay dos coeficientes imaginarios en la serie, para $n = \pm 1$, y que el coeficiente del seno en la serie trigonométrica del Problema 15-6 es $b_1 = j[\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_{-1}] = j[-j(V/4) - j(V/4)] = \frac{1}{2}V$.

El espectro de líneas de la Fig. 15-33 representa las amplitudes de los armónicos de la onda y debe compararse con la Figura 15-24.

**15-11** Hallar la potencia media (activa) disipada en una resistencia $R = 10$ ohmios si la corriente tiene una intensidad $i = 10 \operatorname{sen} \omega t + 5 \operatorname{sen} 3\omega t + 2 \operatorname{sen} 5\omega t$.

La corriente tiene un valor eficaz $I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64{,}5} = 8{,}03$. La potencia media es, pues, $P = RI^2 = (10)(64{,}5) = 645$ W.

*Otro método.*

La potencia total es la suma de las potencias de los armónicos y viene dada por $\frac{1}{2}V_{max}I_{max} \cos \theta$. Ahora bien, la tensión en bornes de la resistencia y la corriente están en fase para todos los armónicos y $\theta_n = 0$. Por tanto,

$$v_R = Ri = 100 \operatorname{sen} \omega t + 50 \operatorname{sen} 3\omega t + 20 \operatorname{sen} 5\omega t$$

y $P = \frac{1}{2}(10)(100) + \frac{1}{2}(5)(50) + \frac{1}{2}(2)(20) = 645$ W.

**15-12** Hallar la potencia media suministrada a un circuito si la tensión aplicada y la corriente resultante son

$$v = 50 + 50 \operatorname{sen} 5 \times 10^3 t + 30 \operatorname{sen} 10^4 t + 20 \operatorname{sen} 2 \times 10^4 t$$
$$i = 11{,}2 \operatorname{sen} (5 \times 10^3 t + 63{,}4°) + 10{,}6 \operatorname{sen} (10^4 t + 45°) + 8{,}97 \operatorname{sen} (2 \times 10^4 t + 26{,}6°)$$

La potencia media total es la suma de la potencia de los armónicos:

$$P = \tfrac{1}{2}(50)(11{,}2) \cos 63{,}4° + \tfrac{1}{2}(30)(10{,}6) \cos 45° + \tfrac{1}{2}(20)(8{,}97) \cos 26{,}6° = 317{,}7 \text{ W.}$$

**15-13** Obtener las constantes del circuito serie de dos elementos con la tensión aplicada y la corriente resultante dadas en el Problema 15-12.

La serie de la tensión tiene un término constante igual a 50, pero no existe un término correspondiente en la serie de intensidad de corriente, lo cual quiere decir que uno de los elementos ha de ser un condensador. Puesto que se suministra potencia al circuito, el otro elemento tiene que ser una resistencia.

La intensidad eficaz es $I = \sqrt{\frac{1}{2}(11,2)^2 + \frac{1}{2}(10,6)^2 + \frac{1}{2}(8,97)^2} = 12,6$.

La potencia media es $P = RI^2$, de donde $R = P/I^2 = 317,7/159,2 = 2\ \Omega$.

Para $\omega = 5 \times 10^3$, $|\mathbf{Z}| = V_{max}/I_{max} = 50/11,2 = 4,47$. Como $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ la reactancia capacitiva es $X_C = \sqrt{(4,47)^2 - 4} = 4\ \Omega$. Por otra parte, $X_C = 1/(\omega C)$, de donde $C = 1/(\omega X_C) = 1/(4 \times 5 \times 10^3) = 50\ \mu F$.

Por tanto, los dos elementos son una resistencia de 2 Ω y un condensador de 50 μF de capacidad.

**15-14** La onda de tensión de la Fig. 15-34 se aplica a un circuito serie de $R = 2000$ ohmios y $L = 10$ henrios. Utilizando la serie trigonométrica de Fourier, obtener la tensión en bornes de la resistencia. Representar el espectro de líneas de la tensión aplicada y $v_R$ para mostrar el efecto de la autoinducción en los armónicos. $\omega = 377$ radianes por segundo.

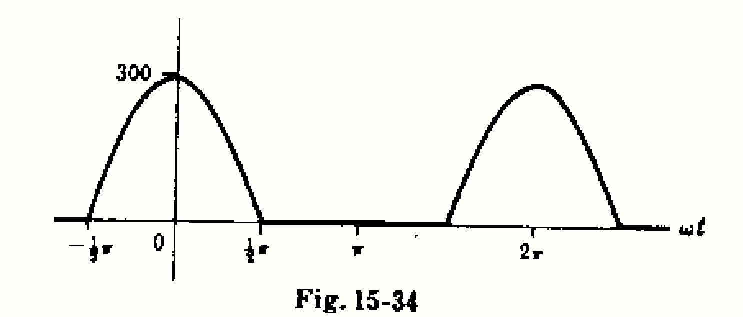


Fig. 15-34

La tensión aplicada tiene un valor medio $V_{max}/\pi$, el mismo que en el Problema 15-5. La función de onda es par y, por tanto, la serie solo contendrá términos en coseno, cuyos coeficientes se obtienen de la siguiente integral:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n\omega t \; d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi/2$$

La función $\cos n\pi/2$ toma el valor $-1$ para $n = 2, 6, 10, \ldots$ y $+1$ para $n = 4, 8, 12, \ldots$ Para $n$ impar, $\cos n\pi/2 = 0$. Sin embargo, para $n = 1$ la expresión es indeterminada y el coeficiente ha de calcularse por separado.

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t \; d(\omega t) = \frac{300}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2}$$

La serie de la tensión es, pues,

$$v = \frac{300}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\cos \omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\}$$

La impedancia total del circuito serie $\mathbf{Z} = R + jn\omega L$ se calcula para cada armónico de la expresión de la tensión. El resultado figura en la tabla adjunta.

Los coeficientes de los términos de la serie de intensidad de corriente son los de la serie de tensión divididos por $Z$, y los correspondientes términos de corriente están defasados, en retraso, un ángulo $\theta$.

| $n$ | $n\omega$ | $R$ | $n\omega L$ | $\|Z\|$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 kΩ | 0 | 2 kΩ | 0° |
| 1 | 377 | 2 kΩ | 3,77 kΩ | 4,26 kΩ | 62° |
| 2 | 754 | 2 kΩ | 7,54 kΩ | 7,78 kΩ | 75,1° |
| 4 | 1508 | 2 kΩ | 15,08 kΩ | 15,2 kΩ | 82,45° |
| 6 | 2262 | 2 kΩ | 22,62 kΩ | 22,6 kΩ | 84,92° |

$$n = 0, \quad I_0 = \frac{300/\pi}{2\ \text{k}\Omega};$$

$$n = 1, \quad i_1 = \frac{300/2}{4,26\ \text{k}\Omega}\cos(\omega t - 62^\circ);$$

$$n = 2, \quad i_2 = \frac{600/3\pi}{7,78\ \text{k}\Omega}\cos(2\omega t - 75,1^\circ);\ \text{etc.}$$

La serie de intensidad de corriente es, por tanto,

$$i = \frac{300}{2\text{ k}\Omega\ \pi} + \frac{300}{(2)4{,}26\text{ k}\Omega}\cos(\omega t - 62°) + \frac{600}{3\pi(7{,}78\text{ k}\Omega)}\cos(2\omega t - 75{,}1°)$$

$$- \frac{600}{15\pi(15{,}2\text{ k}\Omega)}\cos(4\omega t - 82{,}45°) + \frac{600}{35\pi(22{,}6\text{ k}\Omega)}\cos(6\omega t - 84{,}92°) - \cdots$$

La tensión en bornes de la resistencia de 2 kΩ es, sencillamente, $i(2\text{ k}\Omega)$ o bien

$$v_R = 95{,}5 + 70{,}4\cos(\omega t - 62°) + 16{,}4\cos(2\omega t - 75{,}1°)$$

$$- 1{,}67\cos(4\omega t - 82{,}45°) + 0{,}483\cos(6\omega t - 84{,}92°) - \cdots$$

En la Fig. 15-35 el espectro de la tensión aplicada y $v_R$ muestra claramente cómo han sido reducidas las amplitudes de los armónicos por la inductancia en serie de 10 H.

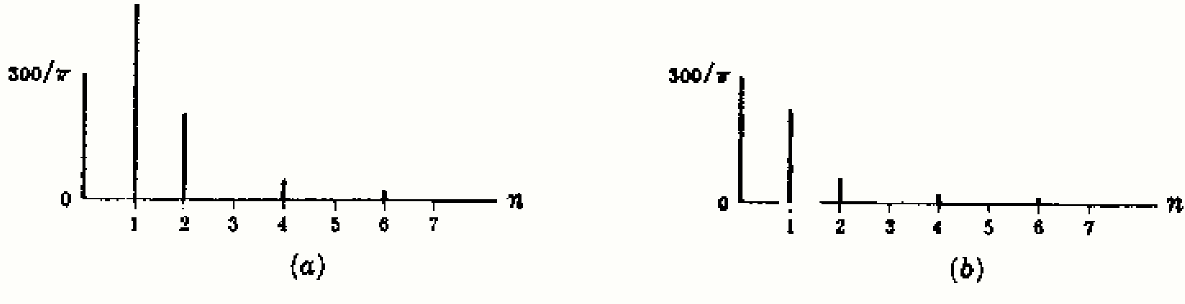



Fig. 15-35

**15-15** La corriente en una bobina de autoinducción $L = 0{,}01$ henrios tiene la forma de onda dada en la Fig. 15-36. Obtener la serie trigonométrica de $v_L$, tensión en bornes de la bobina. $\omega = 500$ radianes por segundo.

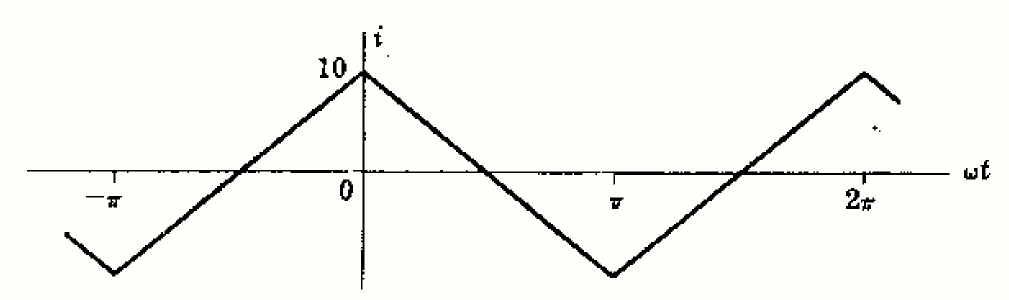



Fig. 15-36

El valor medio de la intensidad de corriente es cero y la onda es par. La serie, pues, solo contiene términos en coseno. En el intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $i = 10 + (20/\pi)\omega t$; y en el intervalo $0 < \omega t < \pi$, $i = 10 - (20/\pi)\omega t$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}[10 + (20/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t) + \int_{0}^{\pi}[10 - (20/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{40}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{80}{\pi^2 n^2} \quad \text{solo para } n \text{ impar.}$$

La serie de la corriente es

$$i = \frac{80}{\pi^2}\left\{\cos\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \frac{1}{49}\cos 7\omega t + \cdots\right\}$$

La tensión en bornes de la bobina es

$$v_L = L\frac{di}{dt} = 0{,}01\left(\frac{80}{\pi^2}\right)\frac{d}{dt}\{\cos\omega t + \tfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots\}$$

$$= \frac{400}{\pi^2}\{-\operatorname{sen}\omega t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t - \tfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5\omega t - \tfrac{1}{7}\operatorname{sen} 7\omega t - \cdots\}$$

La forma de onda podrá obtenerse por síntesis, pero esta serie difiere de la del Problema 15-1 en un signo menos. Así, pues, $v_L$ es una onda cuadrada y es la opuesta de la onda de la Figura 15-15.

# Problemas propuestos

**15-16** Sintetizar la forma de onda dada cuya serie trigonométrica de Fourier es

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2}\{\text{sen}\,\omega t - \tfrac{1}{9}\,\text{sen}\,3\omega t + \tfrac{1}{25}\,\text{sen}\,5\omega t - \tfrac{1}{49}\,\text{sen}\,7\omega t + \cdots\}$$

**15-17** Sintetizar la forma de onda cuyo desarrollo de Fourier es

$$f(t) = 5 - \frac{40}{\pi^2}(\cos\omega t + \tfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots)$$
$$+ \frac{20}{\pi}(\text{sen}\,\omega t - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\omega t + \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,3\omega t - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,4\omega t + \cdots)$$

**15-18** Sintetizar la forma de una onda cuya serie de Fourier es

$$f(t) = V\left\{\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\cos\omega t - \frac{1}{3\pi}\cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi}\cos 3\omega t - \frac{1}{15\pi}\cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi}\cos 6\omega t\right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,\omega t - \frac{2}{3\pi}\,\text{sen}\,2\omega t + \frac{4}{15\pi}\,\text{sen}\,4\omega t - \cdots\right\}$$

**15-19** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda en diente de sierra representada en la Fig. 15-37 y dibujar el espectro de líneas. Compárese con el Ejemplo 1.

*Sol.* $f(t) = \dfrac{V}{2} + \dfrac{V}{\pi}\{\text{sen}\,\omega t + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\omega t + \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,3\omega t + \cdots\}$

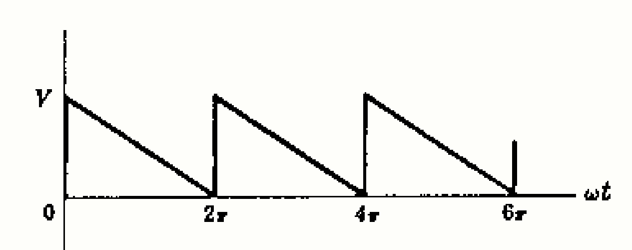



Fig. 15-37

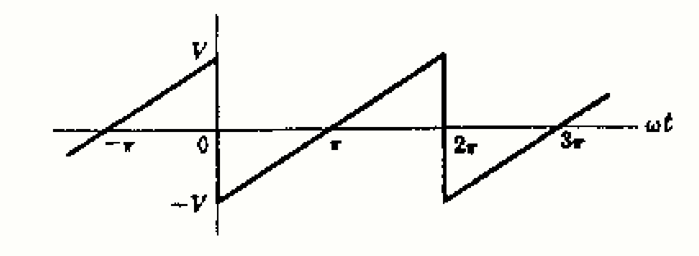



Fig. 15-38

**15-20** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda en diente de sierra de la Fig. 15-38 y dibujar su espectro de líneas. Compárese con el resultado del Problema 15-3.

*Sol.* $f(t) = \dfrac{-2V}{\pi}\{\text{sen}\,\omega t + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\omega t + \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,3\omega t + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,4\omega t + \cdots\}$

**15-21** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda representada en la Fig. 15-39 y dibujar el espectro de líneas correspondiente.

*Sol.* $$f(t) = \frac{4V}{\pi^2}\{\cos\omega t + \tfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots\}$$
$$- \frac{2V}{\pi}\{\text{sen}\,\omega t + \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,3\omega t + \tfrac{1}{5}\,\text{sen}\,5\omega t + \cdots\}$$

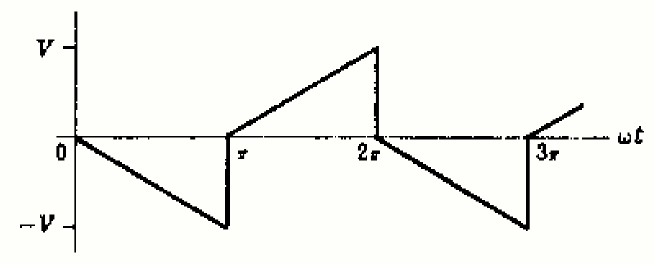



Fig. 15-39

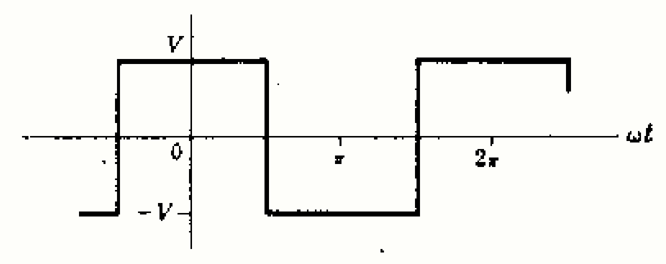



Fig. 15-40

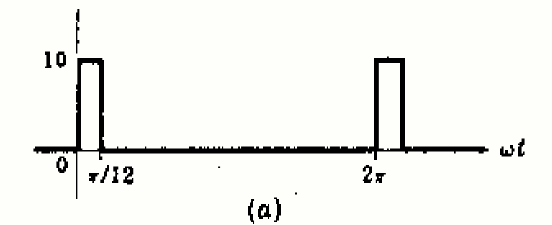
**15-22** Escribir la serie trigonométrica de Fourier de la onda cuadrada representada en la Fig. 15-40 y dibujar su espectro de líneas. Compárese con el resultado del Problema 15-1.

*Sol.* $f(t) = \dfrac{4V}{\pi}\{\cos\omega t - \tfrac{1}{3}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{5}\cos 5\omega t - \tfrac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\}$

**15-23** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de las formas de onda representadas en las Figs. 15-41(*a*) y (*b*). Dibujar el espectro de líneas de cada una y comparar los resultados.

*Sol.* $$f_1(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{10}{n\pi}\left(\text{sen}\,\frac{n\pi}{12}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{12}\right)\text{sen}\,n\omega t\right\}$$

$$f_2(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{10}{n\pi}\left(\text{sen}\,\frac{n5\pi}{3}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n5\pi}{3}\right)\text{sen}\,n\omega t\right\}$$



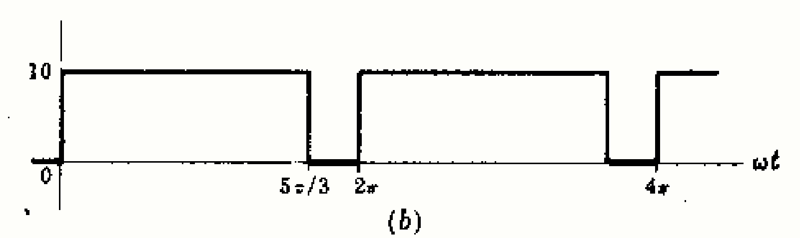




Fig. 15-41

**15-24** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda senoidal rectificada de la Fig. 15-42 y dibujar su espectro de líneas. Comparar el resultado con el de los Problemas 15-5 y 15-6.

*Sol.* $$f(t) = \frac{V}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\cos\omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\}$$

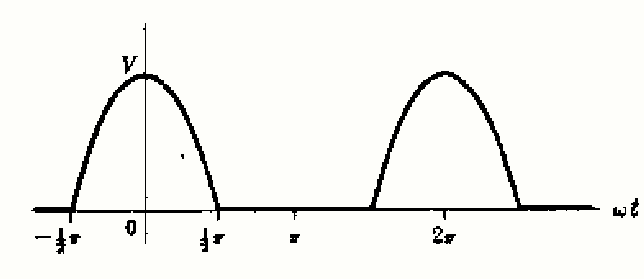



Fig. 15-42

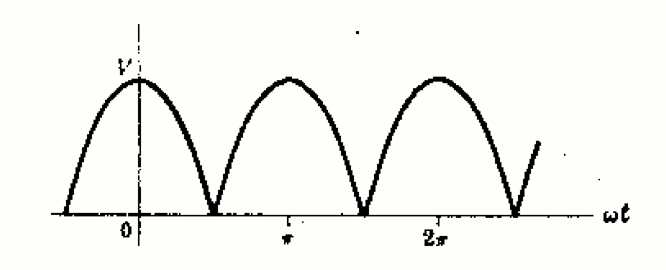



Fig. 15-43

**15-25** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de la onda senoidal rectificada de la Fig. 15-43 y dibujar el espectro de líneas.

*Sol.* $$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{1 + \tfrac{2}{3}\cos 2\omega t - \tfrac{2}{15}\cos 4\omega t + \tfrac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\}$$

**15-26** La onda de la Fig. 15-44 es análoga a la del problema anterior, pero con el eje vertical desplazado. Hallar su desarrollo en serie de Fourier y comparar los dos resultados.

*Sol.* $$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{1 - \tfrac{2}{3}\cos 2\omega t - \tfrac{2}{15}\cos 4\omega t - \tfrac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\}$$

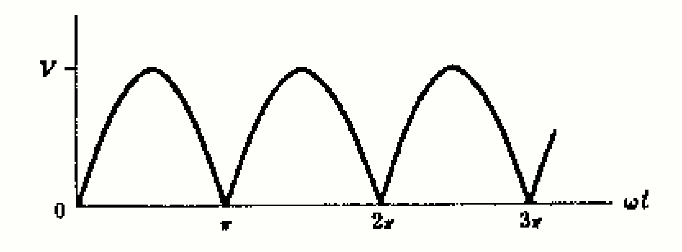



Fig. 15-44

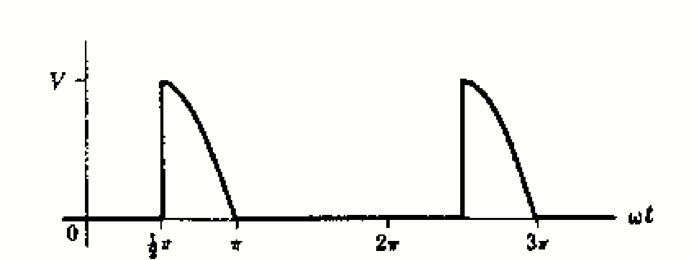



Fig. 15-45

**15-27** Determinar la serie de Fourier de la onda representada en la Figura 15-45.

*Sol.* $$f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + n\,\text{sen}\,n\pi/2)\cos n\omega t$$

$$+ \frac{V}{4}\,\text{sen}\,\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{-nV\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\right]\text{sen}\,n\omega t$$

**15-28** Determinar la serie de Fourier de la onda de la Fig. 15-46. Sumar esta serie con la del Problema 15-27 y comparar la suma con las series obtenidas en el Problema 15-5.

*Sol.* $$f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{V[n\,\text{sen}\,n\pi/2 - 1]}{\pi(n^2-1)}\cos n\omega t + \frac{V}{4}\,\text{sen}\,\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{Vn\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\,\text{sen}\,n\omega t$$

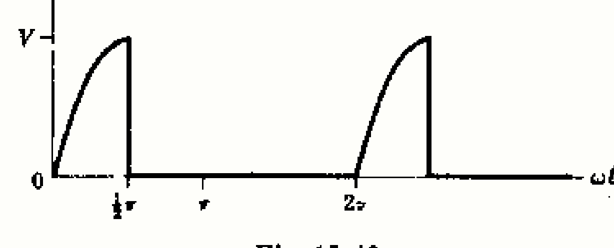



Fig. 15-46

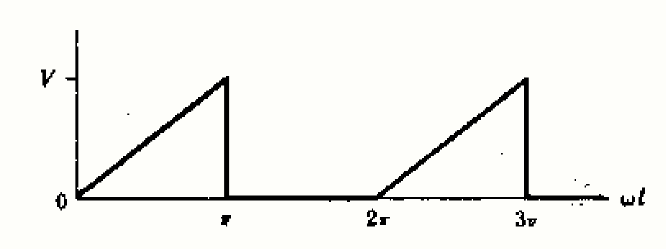



Fig. 15-47

**15-29** Hallar la serie exponencial de Fourier de la onda de la Fig. 15-47 y representar el espectro de líneas. Convertir los coeficientes obtenidos aquí en los coeficientes de la serie trigonométrica, escribir la serie trigonométrica y compararla con el resultado del Problema 15-4.

*Sol.* $$f(t) = V\left\{\cdots - \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} - \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} - \cdots\right\}$$

**15-30** Hallar la serie exponencial de Fourier de la onda representada en la Fig. 15-48 y dibujar su espectro de líneas.

*Sol.* $$f(t) = V\left\{\cdots + \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} + \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} + \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} + \cdots\right\}$$

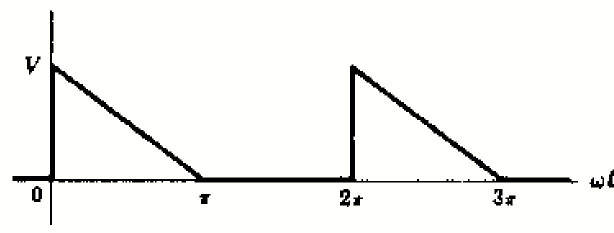



Fig. 15-48

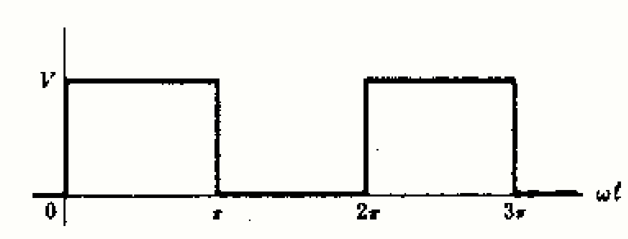



Fig. 15-49

**15-31** Escribir la serie exponencial de Fourier de la onda cuadrada de la Fig. 15-49 y representar su espectro de líneas. Sumar las series exponenciales de los Problemas 15-29 y 15-30 y comparar la suma con la serie aquí obtenida

*Sol.* $$f(t) = V\left\{\cdots + j\frac{1}{3\pi}e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t} - j\frac{1}{3\pi}e^{j3\omega t} - \cdots\right\}$$

**15-32** Hallar la serie exponencial de Fourier de la onda en diente de sierra representada en la Fig. 15-50 y dibujar su espectro de líneas. Convertir los coeficientes obtenidos aquí en los de la serie trigonométrica, escribir ésta y comparar el resultado con la serie obtenida en el Problema 15-19.

*Sol.* $$f(t) = V\left\{\cdots + j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} + j\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\pi}e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \cdots\right\}$$

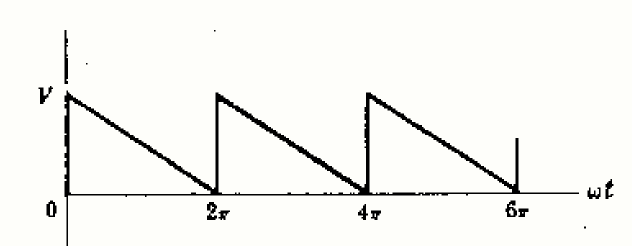



Fig. 15-50

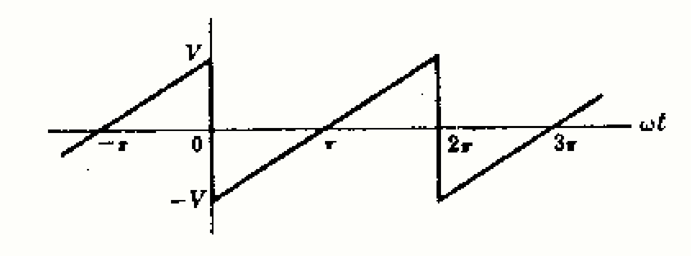



Fig. 15-51

**15-33** Hallar la serie exponencial de la onda representada en la Fig. 15-52 anterior y dibujar su espectro de líneas. Convertir los coeficientes de la serie trigonométrica calculados en el Problema 15-20 en los de la serie exponencial y compararlos con los coeficientes de la serie aquí obtenida.

*Sol.* $$f(t) = V\left\{\cdots - j\frac{1}{2\pi}e^{-j2\omega t} - j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t} + j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t} + j\frac{1}{2\pi}e^{j2\omega t} + \cdots\right\}$$

**15-34** Determinar la serie exponencial de Fourier de la onda representada en la Fig. 15-52 y dibujar su espectro de líneas. Convertir los coeficientes a coeficientes de la serie trigonométrica, escribir esta serie y compararla con la obtenida en el Problema 15-21.

*Sol.* $$f(t) = V\left\{\cdots + \left(\frac{2}{9\pi^2} - j\frac{1}{3\pi}\right)e^{-j3\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} - j\frac{1}{\pi}\right)e^{-j\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} + j\frac{1}{\pi}\right)e^{j\omega t} + \left(\frac{2}{9\pi^2} + j\frac{1}{3\pi}\right)e^{j3\omega t} + \cdots\right\}$$

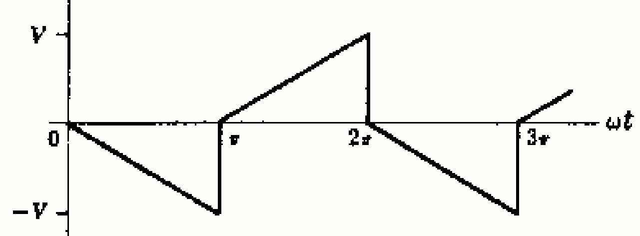


Fig. 15-52

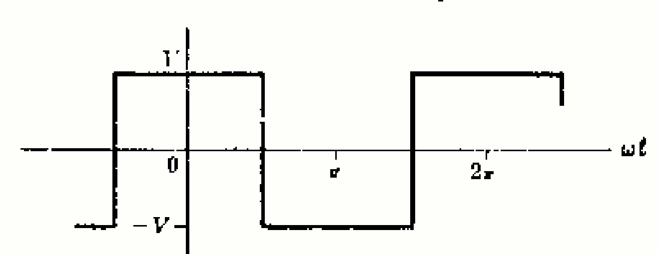


Fig. 15-53

**15-35** Hallar la serie exponencial de Fourier de la onda cuadrada representada en la Fig. 15-53 y dibujar su espectro de líneas. Convertir los coeficientes de la serie trigonométrica del Problema 15-22 en los de la serie exponencial y compararlos con los obtenidos aquí.

*Sol.* $$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{\cdots + \tfrac{1}{5}e^{-j5\omega t} - \tfrac{1}{3}e^{-j3\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \tfrac{1}{3}e^{j3\omega t} + \tfrac{1}{5}e^{j5\omega t} - \cdots\}$$

**15-36** Hallar la serie exponencial de Fourier de la onda representada en la Fig. 15-54. Dibujar el espectro de líneas correspondiente.

*Sol.* $$f(t) = \cdots - \frac{V}{2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-2\pi}{6}\right)e^{-j2\omega t} - \frac{V}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} + \frac{V}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)e^{j2\omega t} + \cdots$$

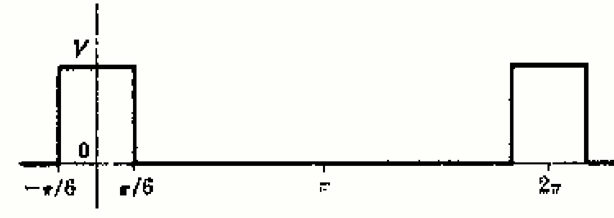


Fig. 15-54

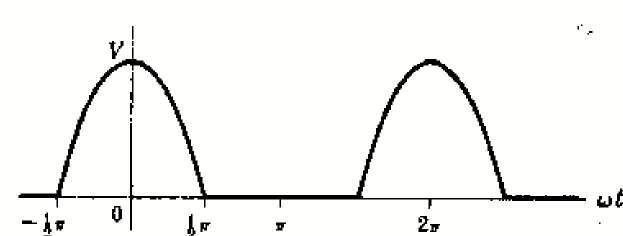


Fig. 15-55

**15-37** Determinar la serie exponencial de Fourier de la onda senoidal rectificada de la Fig. 15-55. Convertir estos coeficientes en los de la serie trigonométrica y compararlos con los resultados del Problema 15-24.

*Sol.* $$f(t) = \cdots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \frac{V}{4}e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \cdots$$

**15-38** Hallar la serie exponencial de Fourier de la onda rectificada de la Fig. 15-56 y dibujar su espectro de líneas.

*Sol.* $$f(t) = \cdots - \frac{2V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{2V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \cdots$$

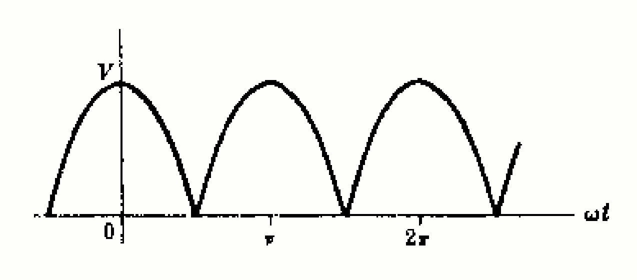


Fig. 15-56

**15-39** Determinar la tensión e intensidad de corriente eficaces y la potencia media (activa) suministrada a un circuito pasivo si la tensión aplicada es $v = 200 + 100 \cos (500t + 30°) + 75 \cos (1500 + 60°)$ voltios y la corriente $i = 3{,}53 \cos (500t + 75°) + 3{,}55 \cos (1500 + 78{,}45°)$ amperios. *Sol.* 218,5 V; 3,54 A; 250,8 W.

**15-40** Se aplica una tensión $v = 50 + 25$ sen $500t + 10$ sen $1500t + 5$ sen $2500t$ voltios a los terminales de un circuito pasivo, siendo la intensidad de la corriente que resulta

$$i = 5 + 2{,}23 \text{ sen } (500t - 26{,}6°) + 0{,}556 \text{ sen } (1500t - 56{,}3°) + 0{,}186 \text{ sen } (2500t - 68{,}2°)$$

Calcular la tensión eficaz, la intensidad eficaz y la potencia media (activa). *Sol.* 53,6 V; 5,25 A; 276,5 W.

**15-41** Un circuito de tres elementos en serie, $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}005$ henrios y $C = 50$ microfaradios, tiene aplicada una tensión $v = 150$ sen $1000t + 100$ sen $2000t + 75$ sen $3000t$ voltios. Calcular la corriente eficaz y la potencia media (activa) del circuito. Dibujar los espectros de líneas de la tensión y de la corriente y observar el efecto de la resonancia serie. *Sol.* 16,58 A; 1374 W.

**15-42** Por un circuito serie de dos elementos con $R = 10$ ohmios y $L = 0{,}02$ henrios circula una corriente $i = 5$ sen $100t + 3$ sen $300t + 2$ sen $500t$ amperios. Hallar la tensión eficaz aplicada y la potencia media (activa). *Sol.* 48 V; 190 W.

**15-43** Una bobina pura de autoinducción $L = 0{,}01$ henrios tiene una onda de corriente triangular, Fig. 15-57, con $\omega = 500$ radianes por segundo. Escribir la serie exponencial de Fourier de la corriente y hallar la serie representativa de la tensión $v_L$ en bornes de la bobina. Compárese el resultado con el del Problema 15-8.

*Sol.* $$v_L = \frac{200}{\pi^2}\{\cdots - j\tfrac{1}{3}e^{-j3\omega t} - je^{-j\omega t} + je^{j\omega t} + j\tfrac{1}{3}e^{j3\omega t} + \cdots\}$$

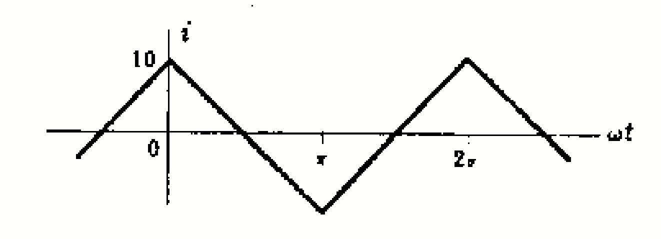



Fig. 15-57

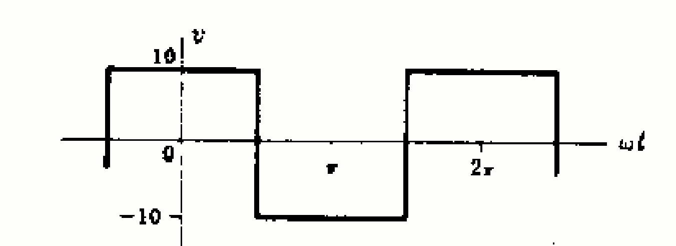



Fig. 15-58

**15-44** A una bobina pura de autoinducción $L = 0{,}01$ henrios se le aplica una tensión cuya forma de onda se ha dibujado en la Fig. 15-58, siendo $\omega = 200$ radianes por segundo. Obtener la serie de la corriente en forma trigonométrica e identificar su forma de onda.

*Sol.* $$i = \frac{20}{\pi}\{\text{sen}\,\omega t - \tfrac{1}{9}\text{ sen } 3\omega t + \tfrac{1}{25}\text{ sen } 5\omega t - \tfrac{1}{49}\text{ sen } 7\omega t + \cdots\}$$

**15-45** La onda de la Fig. 15-59, senoidal rectificada por completo, representa la tensión aplicada a un circuito $LC$. El valor máximo de la tensión es 170 voltios y $\omega = 377$ radianes por segundo. Utilizando la serie trigonométrica de Fourier, hallar la tensión en la bobina y en el condensador. Representar el espectro de líneas de cada una.

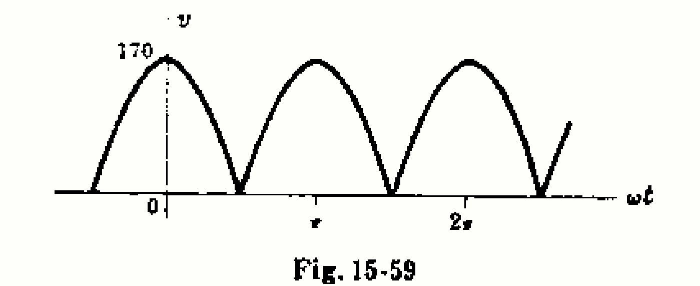



Fig. 15-59

**15-46** Un circuito de tres elementos está formado por una resistencia $R = 5$ ohmios en serie con una combinación en paralelo de $L$ y $C$. Para $\omega = 500$ radianes por segundo, las reactancias correspondientes son $j2$ y $-j8$ ohmios. Hallar la corriente total si la tensión aplicada es $v = 50 + 20$ sen $500t + 10$ sen $1000t$ voltios. *Sol.* $i = 10 + 3{,}53$ sen $(500t - 28{,}1°)$ A.

# Capítulo 16

# Régimen transitorio en circuitos

### INTRODUCCION

Cuando se hace pasar a un circuito de una condición a otra, sea por un cambio en la tensión aplicada o por una modificación de uno de sus elementos, se produce un periodo de transición, durante el cual, las corrientes en las ramas y las caídas de tensión en los elementos varían desde sus valores iniciales hasta otros nuevos. Transcurrido este periodo de transición, llamado *régimen transitorio*, el circuito pasa al estado o régimen permanente.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a un circuito que contenga elementos que almacenen energía resulta una ecuación diferencial que se resuelve por los métodos conocidos. La solución está formada por dos partes: la solución de la ecuación homogénea o *función complementaria* y una *solución particular* de la ecuación completa. En el sistema de ecuaciones de análisis de circuitos, la función complementaria tiende a cero en un tiempo relativamente corto y es la parte transitoria de la solución. La solución particular es la respuesta en el régimen permanente, que hemos estudiado en los capítulos anteriores. Los métodos aplicados en este capítulo por los cuales se obtiene la solución particular son, generalmente, largos y engorrosos y nunca tan directos como los ya utilizados. Sin embargo, la aplicación de dichos métodos permite profundizar en el sentido físico de la respuesta en régimen permanente como parte de la respuesta completa.

## *Régimen transitorio en corriente continua*

### REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS *RL*

El circuito serie *RL* de la Fig. 16-1, al cerrar el interruptor, se le aplica una tensión constante $V$. La segunda ley de Kirchhoff conduce a la ecuación diferencial.

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V \qquad (1)$$

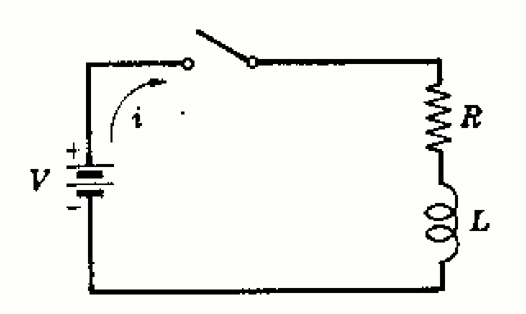



**Fig. 16-1**

Utilizando la notación del operador $D = d/dt$ y despejando $V/L$ se tiene

$$\left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V}{L} \qquad (2)$$

La ecuación (2) es una ecuación diferencial lineal de primer grado

$$\frac{dy}{dx} - ay = \mathcal{R} \quad \text{o bien} \quad (D-a)y = \mathcal{R} \qquad (3)$$

siendo $D = d/dx$, $a$ una constante y $\mathcal{R}$ una función de $x$, pero no de $y$. La solución completa de (3) está formada por la función complementaria y la solución particular, y es

$$y = y_c + y_p = ce^{ax} + e^{ax}\int e^{-ax}\mathcal{R}\,dx \qquad (4)$$

en donde $c$ es una constante arbitraria determinada por las condiciones iniciales del problema. Según (4), la solución de (2) es

$$i = ce^{-(R/L)t} + e^{-(R/L)t}\int e^{(R/L)t}\left(\frac{V}{L}\right)dt = ce^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} \qquad (5)$$

Para hallar la constante $c$ hacemos $t = 0$ en (5) y sustituimos la corriente $i$ por su valor inicial $i_0$. Esta corriente inicial es la corriente inmediatamente después de cerrar el interruptor. La autoinducción está relacionada con la tensión y la corriente por las expresiones $v = L\frac{di}{dt}$ e $i = \frac{1}{L}\int v\,dt$. La segunda expresión nos dice que cualquiera que sea la tensión aplicada, la corriente que circula por una bobina ha de ser una función continua. Por tanto, si la corriente es cero para $t = 0-$, tiene que ser nula para $t = 0+$. Sustituyendo en (5) se tiene

$$i_0 = 0 = c(1) + V/R \text{ o bien } c = -V/R \qquad (6)$$

y llevando este valor de $c$ a (5) resulta

$$i = -\frac{V}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad (7)$$

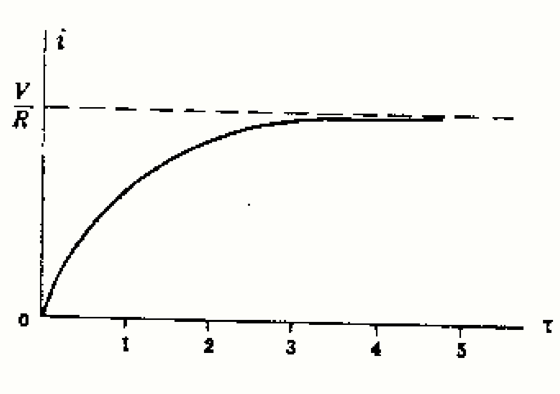


Fig. 16-2

Esta ecuación representa un crecimiento exponencial, como se observa en la Fig. 16-2. El gráfico muestra el periodo de transición durante el cual pasa la corriente desde su valor inicial nulo hasta el final $V/R$ del régimen permanente.

La constante de tiempo $\tau$ de una función como la definida en (7) es el tiempo para el cual el exponente de $e$ es igual a la unidad. Así, para el circuito $RL$, $\tau = L/R$ segundos. Para 1 $\tau$ la cantidad dentro del paréntesis en (7) toma el valor $(1 - e^{-1}) = (1 - 0{,}368) = 0{,}632$. Para este tiempo, la corriente es el 63,2 % de su valor final. De igual forma, para 2 $\tau$, $(1 - e^{-2}) = (1 - 0{,}135) = 0{,}865$, y la corriente es el 86,5 % de su valor final. Después de 5 $\tau$, generalmente, se considera terminado el régimen transitorio. Por conveniencia, la constante de tiempo es la unidad que se utiliza para representar gráficamente la corriente dada por la ecuación (7).

Otro ejemplo puede ser la caída exponencial, representado en la Fig. 16-3 con la siguiente ecuación:

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \qquad (8)$$

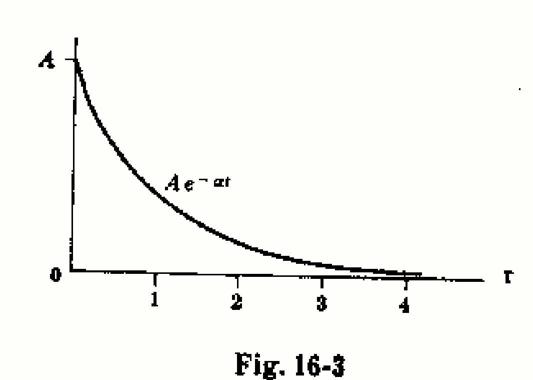


Fig. 16-3

en donde la constante de tiempo, con la definición dada, es $\tau = 1/\alpha$. Para el valor 1 $\tau$ $e^{-1} = 0{,}368$ y la función habrá caído al 36,8 % de su valor inicial $A$. Para 2 $\tau$, $e^{-2} = 0{,}135$ y la función es el 13,5 % de $A$. Después de 5 $\tau$ se considera terminado el régimen transitorio.

La tensión transitoria en los elementos del circuito $RL$ se obtiene a partir de la corriente. En estas condiciones, la tensión en bornes de la resistencia,

$$v_R = Ri = V(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad (9)$$

y en bornes de la bobina

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left\{\frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t})\right\} = Ve^{-(R/L)t} \qquad (10)$$

La tensión transitoria en la resistencia es una exponencial creciente con la misma constante de tiempo que la corriente, mientras que en la bobina es una exponencial decreciente, pero con la misma constante de tiempo. La suma de $v_R$ y $v_L$ satisface la ley de Kirchhoff en el periodo transitorio. (Véase Figura 16-4.)

$$v_R + v_L = V(1 - e^{-(R/L)t}) + Ve^{-(R/L)t} = V \qquad (11)$$

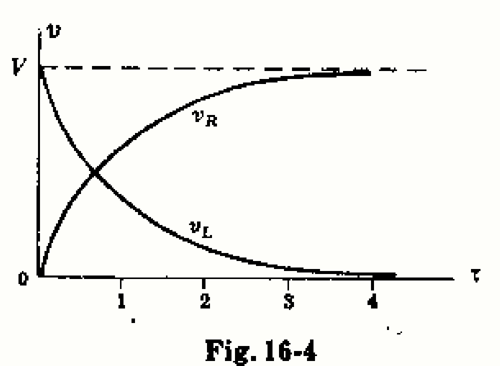


Fig. 16-4

La potencia instantánea en cualquier elemento de circuito viene dada por el producto de la tensión y la corriente. Así, la potencia disipada en la resistencia es

$$p_R = v_R i = V(1 - e^{-(R/L)t})\frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R}(1 - 2e^{-(R/L)t} + e^{-2(R/L)t}) \quad (12)$$

y en la bobina

$$p_L = v_L i = Ve^{-(R/L)t}\frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t}) \quad (13)$$

Por tanto, la potencia total es

$$p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \quad (14)$$

En la Fig. 16-5 se han representado las tres funciones potencia, siendo los valores en régimen permanente $p_R$ y $p_T$, $V^2/R$ y $RI^2$, en donde $I$ representa la intensidad de corriente en régimen permanente. La potencia transitoria en la bobina tiene su valor inicial y final nulos y es la potencia que corresponde a la energía almacenada en el campo magnético de la misma. Para demostrarlo, integramos $p_L$ desde cero a infinito.

$$W = \int_0^\infty \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t})\,dt = \frac{V^2}{R}\left[-\frac{L}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{L}{2R}e^{-2(R/L)t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\frac{V^2}{R}\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}LI^2 \text{ J} \quad (15)$$

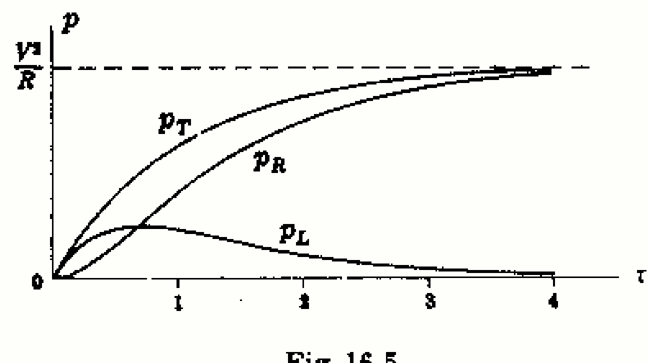



Fig. 16-5

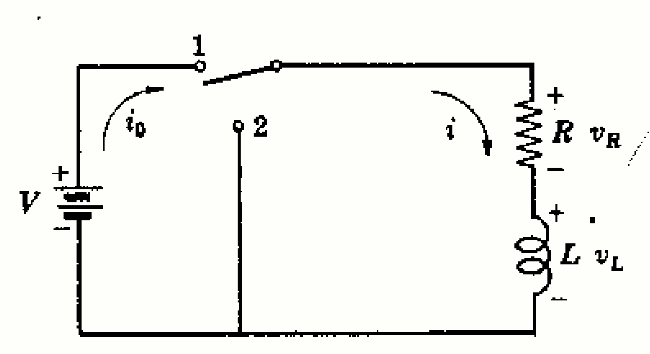



Fig. 16-6

El circuito $RL$ de la Fig. 16-6 tiene una corriente inicial $i_0 = V/R$. En el instante $t = 0$ se conmuta el interruptor a la posición 2 que elimina la fuente y pone en cortocircuito a la rama $RL$ serie. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito sin fuente tendremos la ecuación

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{o bien} \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = 0 \quad (16)$$

cuya solución es

$$i = ce^{-(R/L)t} \quad (17)$$

Para $t = 0$, la corriente inicial es $i_0 = V/R$. Sustituyendo en (17) $c = V/R$, con lo que la ecuación de la intensidad de corriente es

$$i = \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \quad (18)$$

Este decrecimiento o caída exponencial se representa en la Fig. 16-7(a). Las tensiones correspondientes en bornes de la resistencia y de la bobina son

$$v_R = Ri = Ve^{-(R/L)t} \quad \text{y} \quad v_L = L\frac{di}{dt} = -Ve^{-(R/L)t} \quad (19)$$

representados en la Fig. 16-7(b). la suma $v_R + v_L$ satisface a la ley de Kirchhoff ya que, con el interruptor en 2, la tensión aplicada es cero. Las potencias instantáneas $p_R = \frac{V^2}{R}e^{-2(R/L)t}$ y $p_L = -\frac{V^2}{R}e^{-2(R/L)t}$

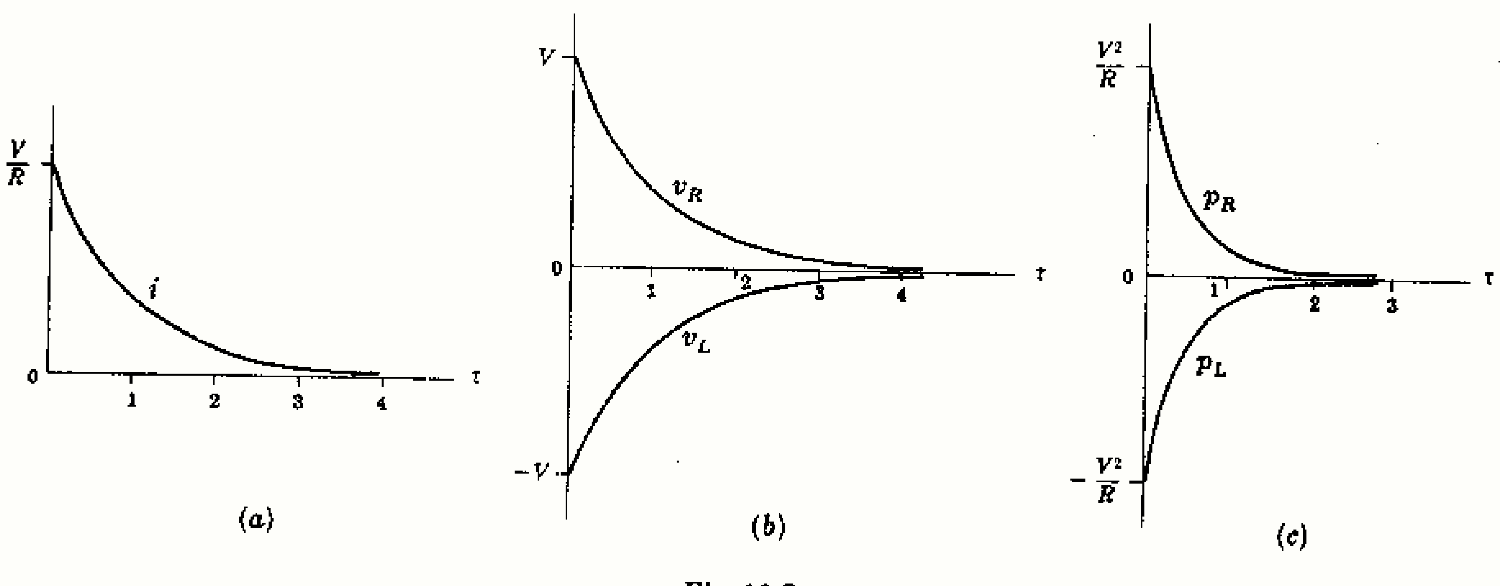



Fig. 16-7

se representan en la Fig. 16-7(*c*). Si $p_L$ se integra desde cero hasta infinito se ve que la energía disipada es exactamente la que fue almacenada en el campo magnético durante el régimen transitorio previo, $\frac{1}{2}LI^2$. Durante el transitorio, esta energía se transfiere a la resistencia.

## REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS *RC*

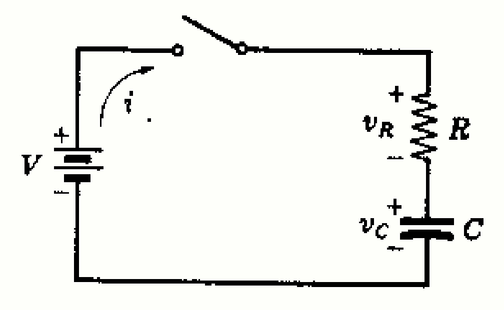



Fig. 16-8

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito *RC* de la Fig. 16-8 resulta la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = V \tag{20}$$

y derivando,

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{o bien} \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \tag{21}$$

La solución de esta ecuación homogénea solo contiene la función complementaria ya que la solución particular es cero. Por tanto,

$$i = ce^{-t/RC} \tag{22}$$

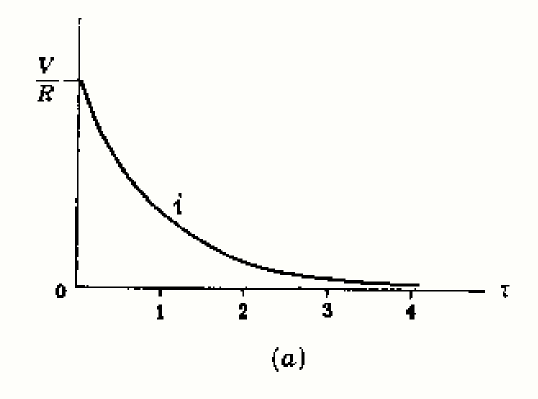
Para determinar la constante $c$, obsérvese que la ecuación (*20*) para $t = 0$ es $Ri_0 = V$ o bien $i_0 = V/R$. Sustituyendo el valor de $i_0$ en (*22*) se obtiene $c = V/R$ para $t = 0$. Entonces,

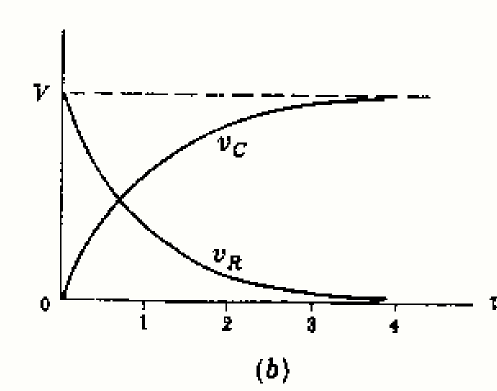
$$i = \frac{V}{R}e^{-t/RC} \tag{23}$$

La ecuación (*23*) tiene la forma de una caída exponencial, Figura 16-9(*a*).

Las correspondientes tensiones transitorias son

$$v_R = Ri = Ve^{-t/RC} \quad \text{y} \quad v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = V(1 - e^{-t/RC}) \tag{24}$$



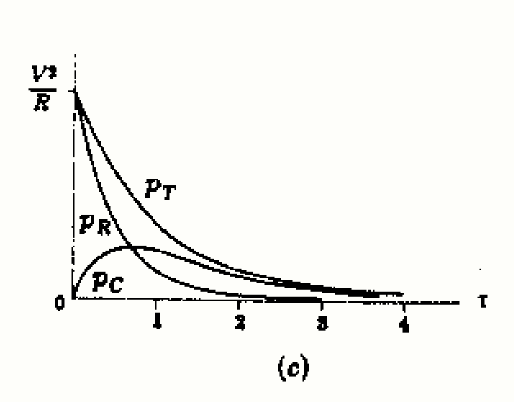




Fig. 16-9

y aparecen representadas en la Fig. 16-9(*b*). Las potencias instantáneas

$$p_R = v_R i = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC} \qquad y \qquad p_C = v_C i = \frac{V^2}{R}(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) \tag{25}$$

se pueden observar en la Figura 16-9(*c*).

La potencia transitoria $p_C$, cuyos valores inicial y final son nulos, corresponde a la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador con una tensión constante $V$ entre sus placas. Puede comprobarse por integración de $p_C$ desde cero hasta infinito.

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{V^2}{R}(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC})\,dt = \frac{1}{2}CV^2 \tag{26}$$

El circuito serie $RC$ de la Fig. 16-10 tiene el interruptor en la posición 1 el tiempo suficiente para que se establezca el régimen permanente y, en el instante $t = 0$, se conmuta a la posición 2. Con el interruptor en esta posición la ecuación del circuito es

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = 0 \qquad o \qquad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \tag{27}$$

cuya solución es

$$i = ce^{-t/RC} \tag{28}$$

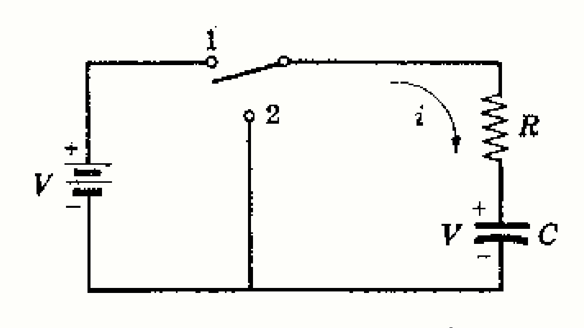



Fig. 16-10

Para determinar la constante $c$ se hace $t = 0$ en (*28*) y se sustituye la corriente inicial $i_0$. Como el condensador se carga a una tensión $V$ con la polaridad indicada en el esquema, la corriente inicial es opuesta a $i$; en consecuencia, $i_0 = -V/R$. Entonces, $c = -V/R$ y la intensidad de corriente es

$$i = -\frac{V}{R}e^{-t/RC} \tag{29}$$

Este decrecimiento transitorio se ha representado en la Fig. 16-11(*a*). Las tensiones transitorias correspondientes en los elementos del circuito

$$v_R = Ri = -Ve^{-t/RC} \qquad y \qquad v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = V\,e^{-t/RC} \tag{30}$$

se representan en la Fig. 16-11(*b*). Obsérvese que $v_R + v_C = 0$ satisface a la ley de Kirchhoff ya que no hay ninguna tensión aplicada con el interruptor en la posición 2. Las potencias transitorias

$$p_R = v_R i = \frac{V^2}{R}e^{-2t/RC} \qquad y \qquad p_C = v_C i = -\frac{V^2}{R}e^{-2t/RC} \tag{31}$$

se representan en la Fig. 16-11(*c*). No hay ninguna fuente responsable de $p_R$, pero es evidente que la energía almacenada en el condensador se transfiere a la resistencia durante este régimen transitorio. La comprobación de que al integrar $p_C$ entre cero e infinito se obtiene el valor $-\frac{1}{2}CV^2$ se deja como ejercicio.

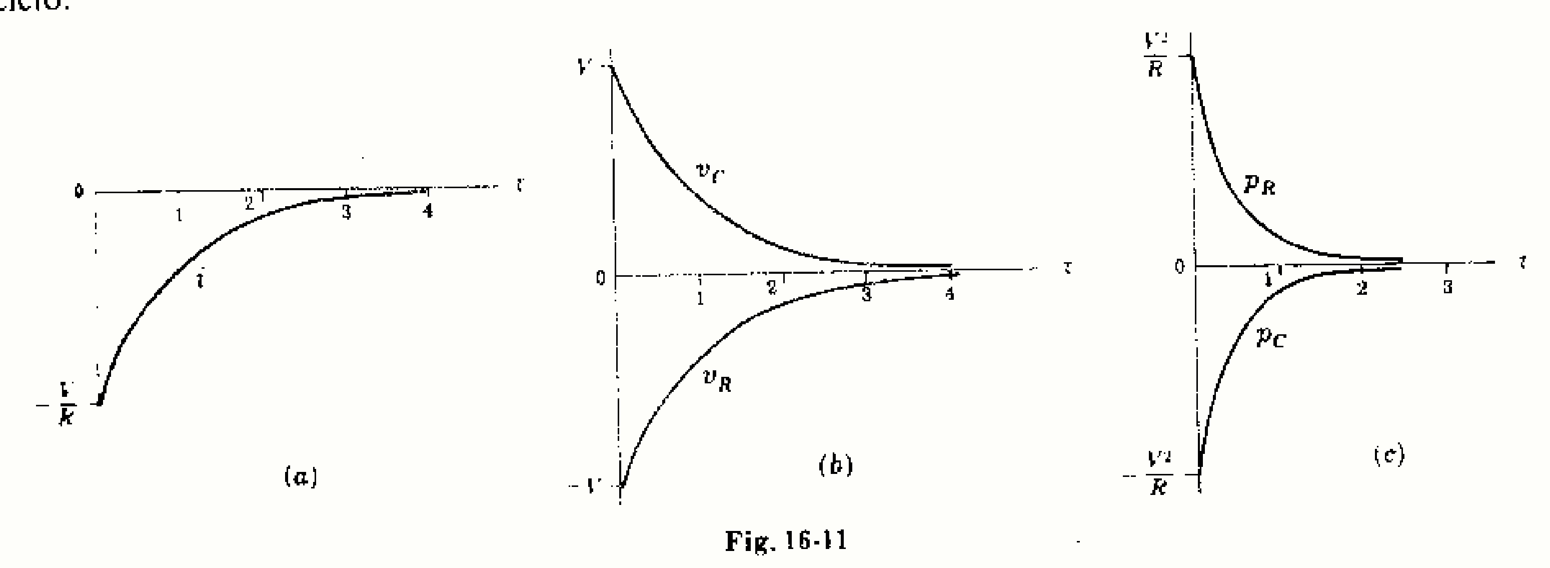



Fig. 16-11

## REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS *RC* REFERIDO A LA CARGA

En un circuito serie $RC$ es conveniente, con frecuencia, conocer la ecuación que representa la carga transitoria $q$. Entonces, puesto que la intensidad de corriente y la carga eléctrica están relacionadas por $i = dq/dt$, se puede obtener dicha intensidad por simple derivación respecto del tiempo.

En la Fig. 16-12 se ha cargado el condensador con la polaridad que se indica ya que $q$ tiene el mismo sentido que $i$ en la Fig. 16-8. La ecuación referida a la intensidad de corriente es

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = V \qquad (32)$$

y puede escribirse en la carga sustituyendo $i$ por $dq/dt$. Por tanto,

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = V \quad \text{o bien} \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)q = \frac{V}{R} \qquad (33)$$

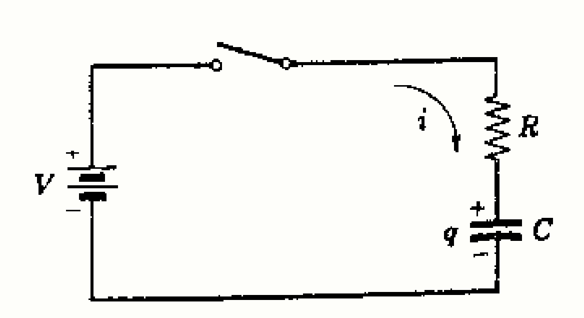



Fig. 16-12

Utilizando el método seguido en la deducción de la ecuación (5), la solución es

$$q = ce^{-t/RC} + CV \qquad (34)$$

Para $t = 0$, la carga inicial del condensador es $q_0 = 0$ y

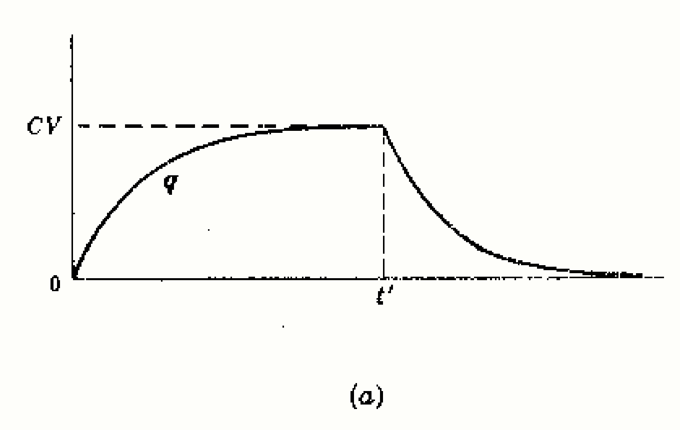
$$q_0 = 0 = c(1) + CV \quad \text{o bien} \quad c = -CV \qquad (35)$$

Llevando a (34) este valor de $c$ se obtiene

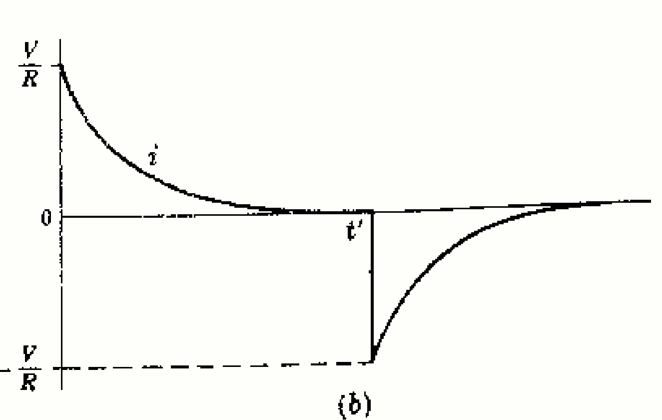
$$q = CV(1 - e^{-t/RC}) \qquad (36)$$

La carga en régimen transitorio es una exponencial creciente hasta un valor final $CV$. Entonces, si se analiza un circuito como el de la Fig. 16-10, tomando como base la carga, el resultado es un decrecimiento de la carga desde el valor $CV$ como representa la ecuación

$$q = CVe^{-t/RC} \qquad (37)$$




(a)




(b)

Fig. 16-13

En la Fig. 16-13(a) se ha trazado la función $q$ en carga y descarga, representándose las funciones de intensidad correspondientes en la Fig. 16-13(b). Como la carga $q$ tiene que ser una función continua, $q = CV$ para $t'(-)$ y $t'(+)$, mientras que $i$ es cero para $t'(-)$ y vale $-V/R$ para $t'(+)$.

## REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS *RLC*

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito serie $RLC$ de la Fig. 16-14 se obtiene la siguiente ecuación integrodiferencial

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad (38)$$

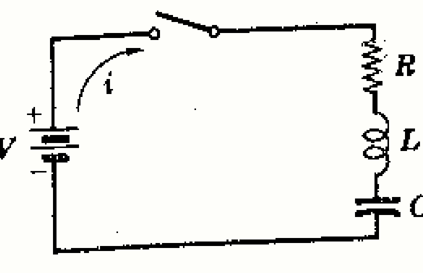



Fig. 16-14

Derivando se obtiene

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{o bien} \quad \left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i = 0 \qquad (39)$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo grado y homogénea cuya solución particular es cero. La función complementaria puede ser de tres tipos según los valores relativos de $R$, $L$ y $C$. Los coeficientes de la ecuación característica $D^2 + (R/L)D + 1/LC = 0$ son constantes y las raíces son

$$D_1 = \frac{-R/L + \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} \quad \text{y} \quad D_2 = \frac{-R/L - \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} \qquad (40)$$

Haciendo $\alpha = -R/2L$ y $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$,

$$D_1 = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad D_2 = \alpha - \beta \qquad (41)$$

El subradical $\beta$ puede ser positivo, cero o negativo y la solución es, entonces, amortiguada, supercrítica, crítica y subcrítica (oscilatoria), respectivamente.

*Caso 1.* $(R/2L)^2 > 1/LC$. Las raíces $D_1$ y $D_2$ son reales y distintas, dando lugar al caso de amortiguamiento supercrítico. La ecuación (*39*) se puede escribir, entonces, en forma de producto

$$[D - (\alpha + \beta)][D - (\alpha - \beta)]i = 0 \qquad (42)$$

y la intensidad de corriente es

$$i = c_1 e^{(\alpha+\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta)t} \quad \text{o} \quad i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) \qquad (43)$$

*Caso 2.* $(R/2L)^2 = 1/LC$. Las raíces $D_1$ y $D_2$ son iguales y la solución corresponde al caso de amortiguamiento crítico. En forma de producto, la ecuación (*39*) se convierte en

$$(D - \alpha)(D - \alpha)i = 0 \qquad (44)$$

cuya solución es

$$i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) \qquad (45)$$

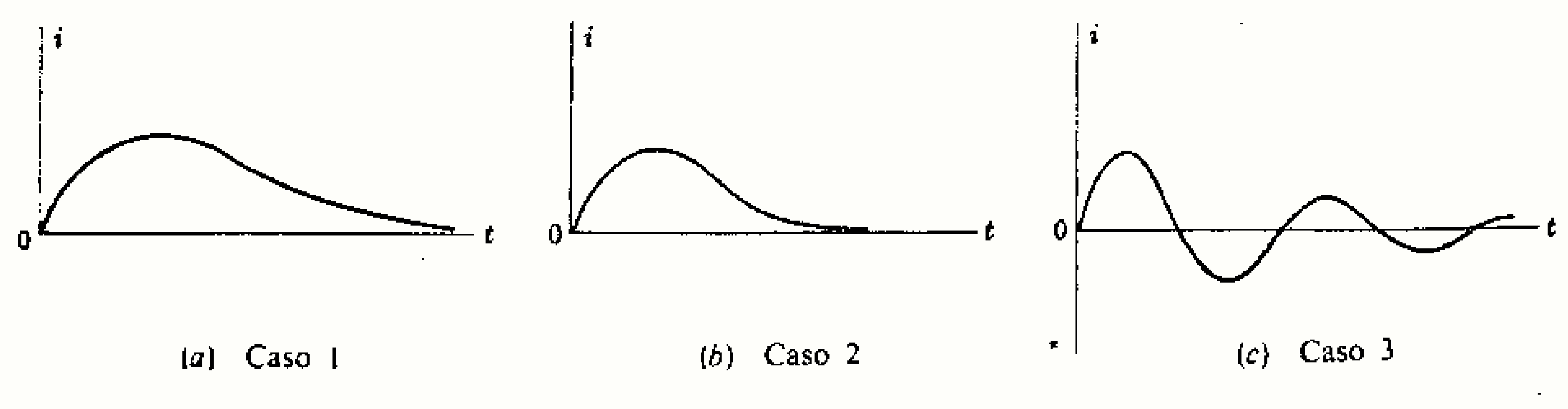
*Caso 3.* $(R/2L)^2 < 1/LC$. Las raíces $D_1$ y $D_2$ son complejas conjugadas y la solución corresoinde al caso de amortiguamiento subcrítico u oscilatorio. Definiendo $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$, y $\alpha$ como antes, la forma de producto de la ecuación con operador es

$$[D - (\alpha + j\beta)][D - (\alpha - j\beta)]i = 0 \qquad (46)$$

cuya solución viene dada por

$$i = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t) \qquad (47)$$

La intensidad de corriente contiene, en todos los casos, el factor $e^{\alpha t}$, y como $\alpha = -R/2L$, el valor final es cero, garantizando que la función complementaria desaparece, en un tiempo relativamente corto. Los tres casos se esquematizan en la Fig. 16-15 cuando el valor inicial es cero y la pendiente inicial es positiva.




(*a*) Caso 1 (*b*) Caso 2 (*c*) Caso 3

**Fig. 16-15**

# Régimen transitorio en corriente alterna

## REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS $RL$ CON ALIMENTACION SENOIDAL

En el circuito serie $RL$ de la Fig. 16-16 al cerrar el interruptor se aplica una tensión senoidal. En dicho momento, la función de tensión puede estar en un punto cualquiera del periodo y, por tanto, el ángulo de fase $\phi$ puede tomar valores desde 0 hasta $2\pi$ radianes por segundo. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff se obtiene la siguiente ecuación:

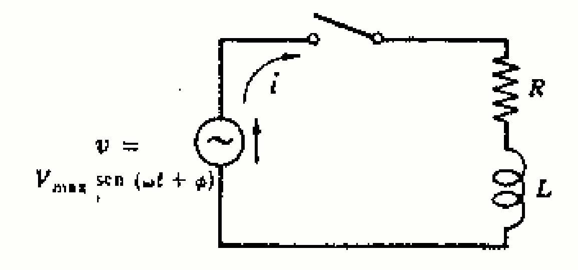



Fig. 16-16

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_{max}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \quad \text{o bien} \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V_{max}}{L}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad (48)$$

La función complementaria es $i_c = ce^{-(R/L)t}$ y la solución particular

$$i_p = e^{-(R/L)t}\int e^{(R/L)t}\frac{V_{max}}{L}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)\,dt = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi - \text{arc tg}\,\omega L/R)$$

La solución completa, por tanto, es

$$i = i_c + i_p = ce^{-(R/L)t} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi - \text{arc tg}\,\omega L/R) \qquad (49)$$

La bobina impide cualquier cambio brusco de la corriente y, como antes de cerrar el circuito la intensidad es cero, se deduce que $i_0 = 0$. Por consiguiente, para $t = 0$

$$i_0 = 0 = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\,\text{sen}\,(\phi - \text{arc tg}\,\omega L/R) \quad \text{y} \quad c = \frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\,\text{sen}\,(\phi - \text{arc tg}\,\omega L/R)$$

Sustituyendo en (49), la intensidad es

$$i = e^{-(R/L)t}\left[\frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\,\text{sen}\,(\phi - \text{arc tg}\,\omega L/R)\right] + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi - \text{arc tg}\,\omega L/R) \qquad (50)$$

El primer sumando de (50) contiene al factor $e^{-(R/L)t}$ que se anula en un tiempo relativamente corto. La expresión entre corchetes es, simplemente, una constante, cuyo valor depende del momento del ciclo $\phi$ en el que se ha producido el cierre del circuito. Si $(\phi - \text{arc tg}\,\omega L/R) = n\pi$, siendo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, la constante vale cero y la corriente pasa directamente al régimen permanente. Y si $(\phi - \text{arc tg}\,\omega L/R) = (1 + 2n)\pi/2$, el régimen transitorio tendrá la amplitud máxima posible.

El segundo sumando de (50) es la intensidad en régimen permanente, retrasada respecto de la tensión aplicada un ángulo arc tg $\omega L/R$. Esta solución particular, obtenida anteriormente por integración, puede determinarse por el método de los coeficientes indeterminados. El método es aplicable cuando la función de entrada es un seno, un coseno o una exponencial, ya que en estas funciones las derivaciones sucesivas repiten el mismo conjunto de funciones. Para aplicar el método a la ecuación (48), en la que el segundo miembro es $V_{max}$ sen $(\omega t + \phi)$, suponemos una intensidad particular

$$i_p = A\cos(\omega t + \phi) + B\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad (51)$$

en la que $A$ y $B$ son constantes. La primera derivada vale

$$i_p' = -A\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) + B\omega\cos(\omega t + \phi) \qquad (52)$$

Sustituyendo estas expresiones de $i_p$ e $i_p'$ en (48) se obtiene

$$\{-A\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) + B\omega\cos(\omega t + \phi)\} + \frac{R}{L}\{A\cos(\omega t + \phi) + B\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)\} = \frac{V_{max}}{L}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad (53)$$

Agrupando términos semejantes,

$$(-A\omega + BR/L)\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) + (B\omega + AR/L)\cos(\omega t + \phi) = \frac{V_{max}}{L}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad (54)$$

e igualando los coeficientes de dichos términos, se obtienen dos ecuaciones en $A$ y $B$,

$$-A\omega + BR/L = V_{max}/L \quad \text{y} \quad B\omega + AR/L = 0 \tag{55}$$

de donde

$$A = \frac{-\omega L V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{R V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{56}$$

Sustituyendo los valores encontrados de $A$ y $B$ en (51), se obtiene la intensidad de corriente

$$i_p = \frac{-\omega L V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \phi) + \frac{R V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \phi) \tag{57}$$

o bien

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi - \operatorname{arc\,tg} \omega L/R) \tag{58}$$

que es la misma que la solución particular obtenida antes por integración.

## REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS $RC$ CON ALIMENTACION SENOIDAL

En el circuito serie $RC$ de la Fig. 16-17, al cerrar el interruptor se tiene aplicada una tensión senoidal. La segunda ley de Kirchhoff conduce a la ecuación

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{max} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{59}$$

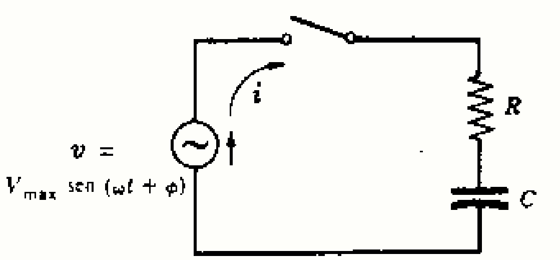



Fig. 16-17

Derivando y teniendo en cuenta la notación del operador resulta,

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right) i = \frac{\omega V_{max}}{R} \cos(\omega t + \phi) \tag{60}$$

La función complementaria es $\qquad i_c = ce^{-t/RC} \qquad (61)$

y la solución particular, obtenida por integración o por coeficientes indeterminados, es

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi + \operatorname{arc\,tg} 1/\omega CR) \tag{62}$$

Por tanto, la solución completa es

$$i = ce^{-t/RC} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi + \operatorname{arc\,tg} 1/\omega CR) \tag{63}$$

Para determinar la constante $c$ hagamos $t = 0$ en la ecuación (59); la corriente inicial es, entonces, $i_0 = \frac{V_{max}}{R} \operatorname{sen} \phi$. Sustituyendo en (63) y haciendo $t = 0$ resulta

$$\frac{V_{max}}{R} \operatorname{sen} \phi = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \operatorname{sen}(\phi + \operatorname{arc\,tg} 1/\omega CR) \tag{64}$$

o bien

$$c = \frac{V_{max}}{R} \operatorname{sen} \phi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \operatorname{sen}(\phi + \operatorname{arc\,tg} 1/\omega CR) \tag{65}$$

Llevando el valor de $c$ de (65) a (63) se obtiene el valor completo de la intensidad de corriente

$$i = e^{-t/RC}\left[\frac{V_{max}}{R} \operatorname{sen} \phi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \operatorname{sen}(\phi + \operatorname{arc\,tg} 1/\omega CR)\right] + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi + \operatorname{arc\,tg} 1/\omega CR) \tag{66}$$

El primer sumando es el transitorio con un factor de decrecimiento $e^{-t/RC}$. La magnitud entre corchetes es una constante. El segundo sumando representa la intensidad de corriente en el régimen permanente que va en adelanto de fase, respecto de la tensión aplicada, en un ángulo arc tg $1/\omega CR$.

## REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS $RLC$ CON ALIMENTACION SENOIDAL

Al cerrar el interruptor en el circuito serie $RLC$ de la Fig. 16-18 se aplica una tensión senoidal. La ecuación resultante es

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{max}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad (67)$$

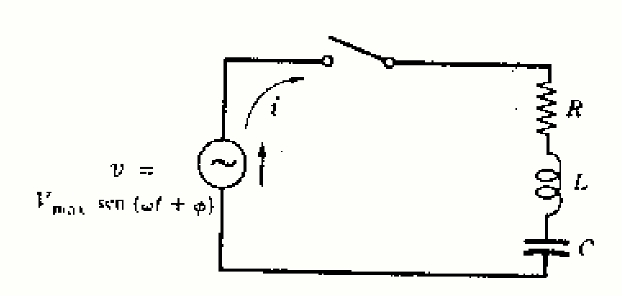



Fig. 16-18

Derivando y teniendo en cuenta la notación operacional resulta

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i = \frac{\omega V_{max}}{L}\cos\,(\omega t + \phi) \qquad (68)$$

La solución particular se obtiene por el método de los coeficientes indeterminados en la forma siguiente. Suponemos $i_p = A\cos\,(\omega t + \phi) + B\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)$. Se calculan después $i'_p$ e $i''_p$ y se sustituyen en la ecuación (67). Los valores de $A$ y $B$ se determinan entonces igualando los coeficientes de los términos semejantes, como se hizo en el caso del circuito serie $RL$. Expresando el resultado como función de un solo seno, la solución particular es

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi + \text{arc tg}\,\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (69)$$

La función complementaria es idéntica a la del circuito serie $RLC$ en corriente continua, que ya fue estudiada y cuyo amortiguamiento es supercrítico, crítico o subcrítico (oscilatorio), según los valores de $R$, $L$ y $C$.

*Caso 1.* $(R/2L)^2 > 1/LC$. Las raíces son reales y distintas, dando lugar al caso de amortiguamiento supercrítico. $D_1 = \alpha + \beta$ y $D_2 = \alpha - \beta$, siendo $\alpha = -R/2L$ y $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$. La solución completa es

$$i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi + \text{arc tg}\,\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (70)$$

*Caso 2.* $(R/2L)^2 = 1/LC$. Las raíces son reales y distintas, dando lugar al caso de amortiguamiento crítico. La intensidad de corriente completa es

$$i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi + \text{arc tg}\,\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (71)$$

*Caso 3.* $(R/2L)^2 < 1/LC$. Las raíces son complejas conjugadas resultando el caso de amortiguamiento subcrítico u oscilatorio y la intensidad de corriente completa es

$$i = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\,\text{sen}\,\beta t) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi + \text{arc tg}\,\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (72)$$

siendo $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$.

Las soluciones particulares de las ecuaciones (70), (71) y (72) son idénticas, mientras que la corriente transitoria dada por la función complementaria es diferente en cada caso. Por ejemplo, en el caso 3, la parte transitoria contiene un conjunto de funciones senoidales de pulsación $\beta$ radianes por segundo, que es, en general, distinta de $\omega$ de la solución particular. En consecuencia, es imposible predecir la forma de la intensidad de corriente durante el periodo transitorio, siendo muchas veces muy irregular. Una vez que al factor de decrecimiento ha anulado la parte transitoria, la corriente adelanta o retrasa en fase respecto de la tensión aplicada, según los valores relativos de las reactancias $1/\omega C$ y $\omega L$, un ángulo arc tg $(1/\omega C - \omega L)/R$.

## Régimen transitorio en circuitos de dos mallas

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito de dos mallas de la Fig. 16-19 conduce al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 &= V \\ R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} &= V \end{aligned} \qquad (73)$$

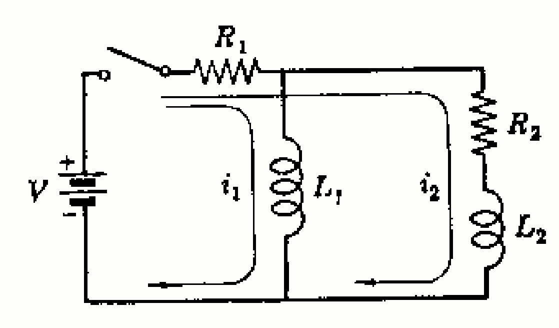



Fig. 16-19

Utilizando la notación operacional y agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned} (D + R_1/L_1) i_1 + (R_1/L_1) i_2 &= V/L_1 \\ (R_1/L_2) i_1 + \left(D + \frac{R_1 + R_2}{L_2}\right) i_2 &= V/L_2 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/L_1 \\ V/L_2 \end{bmatrix} \qquad (74)$$

Con objeto de obtener una ecuación de $i_1$ independiente de $i_2$, resolvemos el sistema por la regla de Cramer,

$$\begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_1 = \begin{vmatrix} V/L_1 & R_1/L_1 \\ V/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} \qquad (75)$$

El determinante del primer miembro se desarrolla y ordena según las potencias decrecientes de $D$. En el desarrollo del determinante del segundo miembro aparece el término $D(V/L_1)$; ahora bien, como $D = d/dt$ y $V/L_1$ es constante, dicho término es cero.

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2}\right) D + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}\right] i_1 = V R_2 / L_1 L_2 \qquad (76)$$

La ecuación característica es de la forma $D^2 + AD + B = 0$, pero como en este caso, $A^2 - 4B > 0$ para todos los valores de las constantes del circuito (siempre que ni $L_1$ ni $L_2$ sean nulos) la función complementaria es de la forma dada en la ecuación (43). Como la función de entrada es constante, una solución particular es la constante que satisface a la ecuación

$$\left(\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}\right) i_{1p} = V R_2 / L_1 L_2 \quad \text{o bien} \quad i_{1p} = V/R_1 \qquad (77)$$

Aplicando ahora los mismos métodos a $i_2$ resulta

$$\begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_2 = \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & V/L_1 \\ R_1/L_2 & V/L_2 \end{vmatrix} \qquad (78)$$

Después de desarrollar los dos determinantes se tiene

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2}\right) D + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}\right] i_2 = 0$$

La ecuación característica es la misma que la de (76) y, en consecuencia, las funciones complementarias son idénticas. Sin embargo, la solución particular de $i_2$ es cero, ya que la ecuación es homogénea.

El examen del circuito demuestra que esto es perfectamente razonable ya que, en régimen permanente, $L_1$ aparece como un cortocircuito de la rama $R_2 L_2$ derivando de este modo la corriente de esta rama. Entonces, $R_1$ es la única impedancia limitadora en el régimen permanente y, por tanto, la corriente es $i_1 = V/R_1$ tal como muestra la ecuación (77).

# Problemas resueltos

**16-1** A un circuito serie $RL$, con $R = 50$ ohmios y $L = 10$ henrios, se le aplica una tensión constante $V = 100$ voltios en el instante $t = 0$ en que se cierra el interruptor. Determinar (*a*) las ecuaciones de $i$, $v_R$ y $v_L$, (*b*) la intensidad para $t = 0{,}5$ segundos y (*c*) el instante en que $v_R = v_L$.

(*a*) La ecuación diferencial del circuito dado es

$$50i + 10\frac{di}{dt} = 100 \quad \text{o bien} \quad (D+5)i = 10 \tag{1}$$

y la solución completa es

$$i = i_c + i_p = ce^{-5t} + 2 \tag{2}$$

Para $t = 0$, $i_0 = 0$, con lo que $0 = c(1) + 2$, de donde $c = -2$. Por tanto,

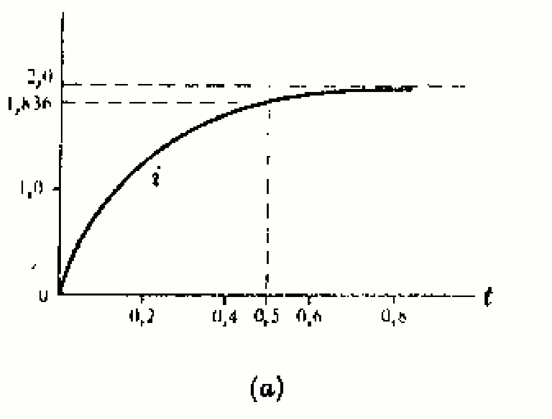
$$i = 2(1 - e^{-5t}) \tag{3}$$

que se ha dibujado en la Figura 16-20(*a*).

Las tensiones correspondientes en bornes de los elementos del circuito son las representadas en la

$$v_R = Ri = 100(1 - e^{-5t}) \qquad \text{y} \qquad v_L = L\frac{di}{dt} = 100e^{-5t} \tag{4}$$

Figura 16-20(*b*).




(*a*)

(*b*)

Fig. 16-20

(*b*) Haciendo $t = 0{,}5$ s en (*3*), se obtiene $i = 2(1 - e^{-5(0,5)}) = 2(1 - 0{,}082) = 1{,}836$ A.

(*c*) Cuando sea $v_R = v_L$, cada una deberá valer 50 voltios y, puesto que la tensión aplicada es 100, hacemos $v_R$ o bien $v_L$ igual a 50 y se halla el valor de $t$. De (*4*), $v_L = 50 = 100e^{-5t}$. De donde $e^{-5t} = 0{,}5$ o bien $5t = 0{,}693$ y $t = 0{,}1386$ s.

**16-2** En el Problema 16-1 hallar las ecuaciones de $p_R$ y $p_L$ y demostrar que la potencia en la bobina corresponde a la energía almacenada en el régimen permanente en su campo magnético.

Con las intensidades y tensiones obtenidas en el problema anterior,

$$p_R = v_R i = 100(1 - e^{-5t})\,2(1 - e^{-5t}) = 200(1 - 2e^{-5t} + e^{-10t})$$

$$p_L = v_L i = 100e^{-5t}\,2(1 - e^{-5t}) = 200(e^{-5t} - e^{-10t})$$

$$p_T = p_R + p_L = 200(1 - e^{-5t})$$

La energía almacenada en el régimen permanente por el campo magnético es $W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(10)(2)^2 = 20$ julios.

La integral de $p_L$ desde $t = 0$ a $t = \infty$ es $W = \int_0^\infty 200(e^{-5t} - e^{-10t})\,dt = 20$ J.

**16-3** En el circuito serie de la Fig. 16-21 se pone el interruptor en la posición 1 en el instante $t = 0$, aplicando con ello una fuente de 100 voltios a la rama $RL$. En el instante $t = 500$ microsegundos se conmuta el interruptor a la posición 2. Obtener las ecuaciones de la intensidad de corriente en ambos intervalos y dibujar el periodo transitorio.

En la posición 1 la ecuación es

$$100i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 100 \quad \text{o bien} \quad (D + 500)i = 500 \qquad (1)$$

y la intensidad de corriente vale

$$i = c_1 e^{-500} + 1{,}0 \qquad (2)$$

Para $t = 0$, $i = 0$. Llevando la condición inicial (2), $0 = c_1(1) + 1{,}0$ o bien $c_1 = -1{,}0$. La intensidad es

$$i = 1{,}0(1 - e^{-500t}) \qquad (3)$$

Al llegar a los 500 $\mu s$, este periodo transitorio se interrumpe, siendo la intensidad

$$i = 1{,}0(1 - e^{-500(500 \times 10^{-6})}) = 1{,}0(1 - 0{,}779) = 0{,}221 \text{ A} \qquad (4)$$

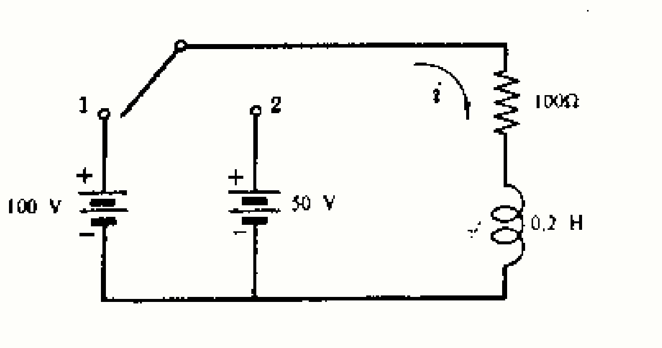



**Fig. 16-21**

**Fig. 16-22**

Con el interruptor en la posición 2 la tensión aplicada es 50 V, con igual polaridad que con la fuente de 100 V, y la ecuación es

$$100i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 50 \quad \text{o bien} \quad (D + 500)i = 250 \qquad (5)$$

y su solución,

$$i = c_2 e^{-500(t-t')} + 0{,}5 \qquad (6)$$

en donde $t' = 500\ \mu s$. Para $t = t'$ en la Ecuación (6), el valor de la intensidad es 0,221 A, como ya se encontró en (4).

$$i = 0{,}221 = c_2(1) + 0{,}5 \quad \text{y} \quad c_2 = -0{,}279$$

Entonces, para $t > t'$,

$$i = -0{,}279e^{-500(t-t')} + 0{,}5 \qquad (7)$$

La Ecuación (3) se aplica para $0 < t < t'$ y el periodo transitorio, de trazos en la Fig. 16-22, tiende al valor 1,0 del régimen permanente. Al llegar a $t'$ cuando la corriente es de 0,221 A, el interruptor pasa a la posición 2, y para $t > t'$ se aplica la Ecuación (7) con un valor final de 0,5 A.

**16-4** Repetir el Problema 16-3 suponiendo que la polaridad de la fuente de 50 voltios se ha invertido.

La primera parte del régimen transitorio, con el interruptor en la posición 1, es igual que la obtenida en el Problema 16-3: $i = 1{,}0(1 - e^{-500t})$ con $i = 0{,}221$ A para $t = 500\ \mu s$.

Al invertir la polaridad de la fuente de 50 V se obtiene la siguiente ecuación

$$100i + 0{,}2\frac{di}{dt} = -50 \quad \text{o bien} \quad (D + 500)i = -250 \qquad (1)$$

cuya solución es

$$i = ce^{-500(t-t')} - 0{,}5 \qquad (2)$$

Ahora bien, para $t = t'$ la intensidad vale 0,221 A. Sustituyendo en la Ecuación (2), $0{,}221 = c(1) - 0{,}5$, o sea, $c = 0{,}721$. La ecuación de la corriente para $t > t'$ es, por consiguiente,

$$i = 0{,}721e^{-500(t-t')} - 0{,}5$$

En la Fig. 16-23 se ha representado la intensidad en el régimen transitorio. El valor final es $-0{,}5$ A, ya que con la inversión de la fuente de 50 V su sentido es opuesto al tomado como positivo.

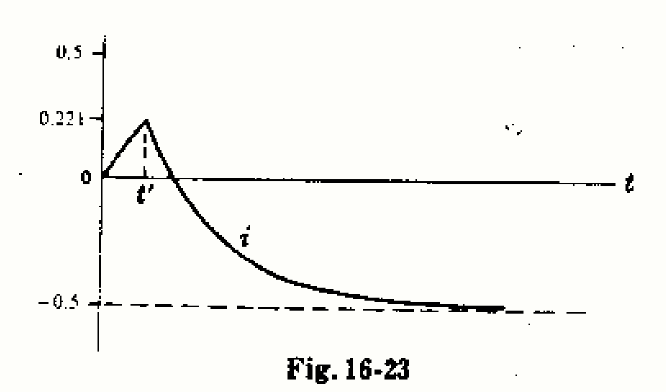



Fig. 16-23

**16-5** A un circuito serie $RC$, con $R = 5000$ ohmios y $C = 20$ microfaradios, se le aplica en el instante $t = 0$ una tensión constante $V = 100$ voltios (el condensador no tiene carga inicial). Hallar las ecuaciones de $i$, $v_R$ y $v_C$.

Al cerrar el circuito, la ecuación es

$$5000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i\,dt = 100 \qquad (1)$$

Derivando y utilizando la notación operacional resulta,

$$(D + 10)i = 0 \quad \text{cuya solución es} \quad i = c\,e^{-10t} \qquad (2)$$

Haciendo $t = 0$ en la Ecuación (1) la corriente inicial vale $i_0 = 100/5000 = 0{,}02$ A. Sustituyendo en (2), $c = 0{,}02$. La intensidad es, entonces,

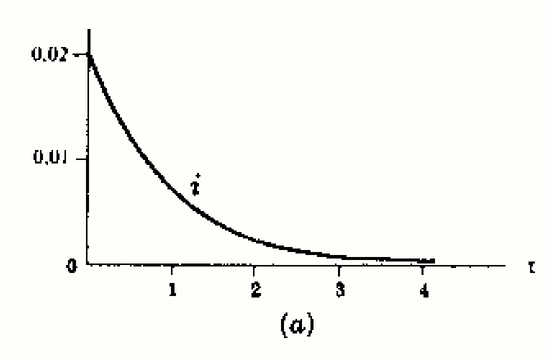
$$i = 0{,}02e^{-10t} \qquad (3)$$

y las tensiones de régimen permanente en bornes de los elementos del circuito son

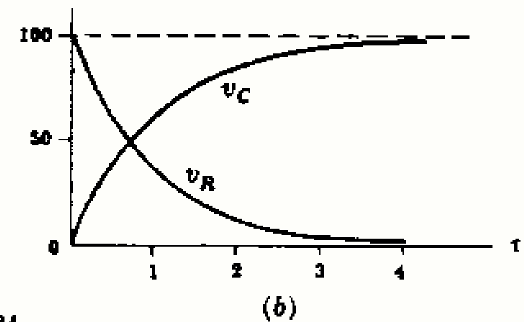
$$v_R = Ri = 5000(0{,}02\,e^{-10t}) = 100\,e^{-10t}$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{20 \times 10^{-6}}\int 0{,}02\,e^{-10t}\,dt = 100(1 - e^{-10t})$$

Los regimenes transitorios se han representado en la Fig. 16-24. En el régimen permanente $v_R = 0$ y $v_C = 100$ V.




(a)




(b)

Fig. 16-24

**16-6** El condensador de 20 microfaradios del circuito $RC$ de la Fig. 16-25 tiene una carga inicial $q_0 = 500$ microculombios con la polaridad indicada en el esquema. En el instante $t = 0$ se cierra el interruptor aplicándose, en consecuencia, la tensión constante $V = 50$ voltios. Determinar la intensidad de corriente en el régimen transitorio.

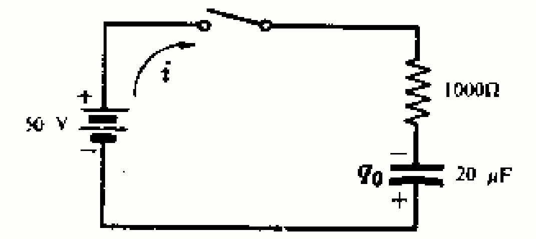



Fig. 16-25

Al cerrar el circuito, la ecuación es

$$1000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 50 \quad \text{o bien} \quad (D + 50)i = 0 \qquad (1)$$

cuya solución es

$$i = c\,e^{-50t} \qquad (2)$$

Ahora bien, la fuente de 50 V da lugar a una corriente con el sentido dibujado en el diagrama, originando una carga + en la placa superior del condensador. La carga inicial del condensador $q_0$ tiene una tensión equivalente $V_0 = q_0/C = (500 \cdot 10^{-6})/(20 \cdot 10^{-6}) = 25$ V, que también produce una corriente en el sentido marcado de $i$. Por tanto, para $t = 0$ la corriente inicial es $i_0 = (V + q_0/C)/R = (50 + 25)/1000 = 0{,}075$ A. Sustituyendo en la Ecuación (2), $c = 0{,}075$ y, por consiguiente, $i = 0{,}075e^{-50t}$ A.

**16-7** Repetir el Problema 16-6 refiriendo el régimen transitorio a la carga.

La ecuación, tomando como variable la carga, es

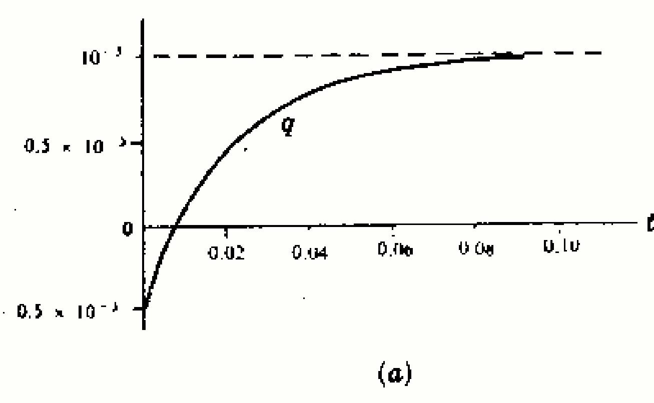
$$1000\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{20 \times 10^{-6}} \;=\; 50 \qquad \text{o bien} \qquad (D+50)q \;=\; .05 \tag{1}$$

cuya solución es

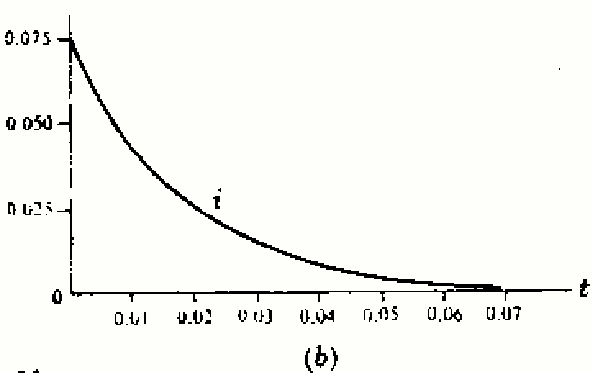
$$q \;=\; c\,e^{-50t} + 10^{-3} \tag{2}$$

Para $t = 0$ el condensador tiene una carga positiva de $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ C en la placa inferior. La polaridad de la carga acumulada durante el régimen transitorio en la placa superior es positiva. En consecuencia, se hace $q_0 = -0{,}5 \cdot 10^{-3}$ y $t = 0$ en la Ecuación (2), con lo que $c = -1{,}5 \cdot 10^{-3}$. Entonces, $q = -1{,}5 \cdot 10^{-3} e^{-50t} + 10^{-3}$ y la corriente en el régimen transitorio es $i = dq/dt = 0{,}075e^{-50t}$ A.

En la Fig. 16-26(*a*) se ve que el condensador tiene una carga inicial positiva de $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ C en la placa inferior y una final positiva de $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ C en la placa superior. La corriente en el régimen transitorio, $i = dq/dt$, se ha dibujado en la Figura 16-26(*b*).




(*a*)




(*b*)

Fig. 16-26

**16-8** En el circuito *RC* de la Fig. 16-27 se pone el interruptor, en el instante $t = 0$, en la posición 1 y después de una constante de tiempo ($1\ \tau$) se pasa a la posición 2. Determinar el régimen transitorio completo de corriente.

Fig. 16-27

En la posición 1 la solución de la ecuación diferencial obtenida al aplicar la segunda ley de Kirchhoff al circuito es

$$i \;=\; c_1\,e^{-t/RC} \;=\; c_1\,e^{-4000t} \tag{1}$$

Para $t = 0$, $i_0 = V/R = 20/500 = 0{,}04$ A. Sustituyendo en (1), $c_1 = 0{,}04$ y la corriente en el intervalo $0 < t < 1\ \tau$ es

$$i = 0{,}04e^{-4000t} \tag{2}$$

Este régimen transitorio continúa hasta que $t = 1\ \tau = RC = 500(0{,}5 \cdot 10^{-6}) = 250\ \mu$s. En este instante, la intensidad de corriente tiene un valor $i = 0{,}04e^{-1} = 0{,}0147$ A.

Al pasar el interruptor a la posición 2, el condensador tiene una carga en las placas que origina una tensión $v_C = 20(1 - e^{-1}) = 12{,}65$ V. Esta tensión, junto con la fuente de 40 voltios, hace circular la corriente en sentido opuesto a la originada por la fuente de 20 V. Haciendo $t' = 1\ \tau$, la ecuación de la intensidad en el segundo período de transición es

$$i = c_2 e^{-4000(t-t')} \tag{3}$$

Para $t = t'$, $i = -(40 + 12{,}65)/500 = -0{,}1053$ A. Sustituyendo en (3), $c_2 = -0{,}1053$, con lo que la intensidad es

$$i = -0{,}1053e^{-4000(t-t')} \tag{4}$$

El régimen transitorio completo es el representado en la Fig. 16-28. Para $1\ \tau$ la corriente tiene un valor de pico de $-0{,}1053$ A.

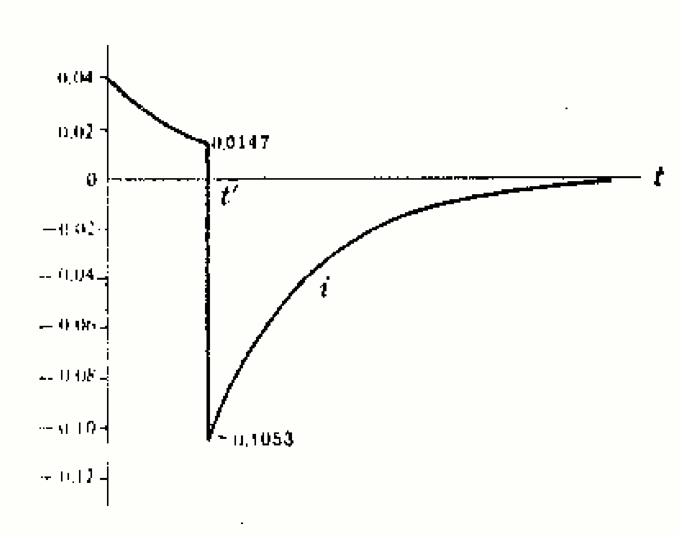



Fig. 16-28

**16-9** Determinar el régimen transitorio de carga en el Problema 16-8 y derivar para obtener el de la intensidad de corriente.

En la posición 1 la ecuación referida a la carga es

$$500\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0{,}5\times 10^{-6}} = 20 \quad \text{o bien} \quad (D+4000)q = 0{,}04 \qquad (1)$$

cuya solución es

$$q = c_1 e^{-4000t} + 10\times 10^{-6} \qquad (2)$$

Para $t = 0$, $q_0 = 0$. Con las condiciones iniciales en (2), se obtiene $c_1 = -10\cdot 10^{-6}$ y, por tanto,

$$q = 10\times 10^{-6}(1 - e^{-4000t}) \qquad (3)$$

Esta ecuación es válida en el intervalo $0 < t < t'$, siendo $t' = 1\ \tau$. Para $1\ \tau$, la carga en el condensador es $q = 10\cdot 10^{-6}(1 - e^{-1}) = 6{,}32\cdot 10^{-6}$ C.

Con el interruptor en 2 la ecuación diferencial es

$$500\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0{,}5\times 10^{-6}} = -40 \quad \text{o bien} \quad (D+4000)q = -0{,}08 \qquad (4)$$

y su solución

$$q = c_2 e^{-4000(t-t')} - 20\times 10^{-6} \qquad (5)$$

Se determina $c_2$ por sustitución del valor de $q$ para $1\ \tau$ y haciendo $t = 1\ \tau$ en la Ecuación (5). En estas condiciones, $6{,}32\cdot 10^{-6} = c_2(1) - 20\cdot 10^{-6}$, de donde $c_2 = 26{,}32\cdot 10^{-6}$. Por tanto,

$$q = 26{,}32\times 10^{-6} e^{-4000(t-t')} - 20\times 10^{-6} \qquad (6)$$

La Fig. 16-29 representa el régimen transitorio completo. La intensidad se halla derivando las Ecuaciones (3) y (6). Por consiguiente, en el intervalo $0 < t < t'$, la intensidad vale

$$i = \frac{d}{dt}\{10\times 10^{-6}(1 - e^{-4000t})\} = 0{,}04\, e^{-4000t}$$

y para $t > t'$,

$$i = \frac{d}{dt}\{26{,}32\times 10^{-6} e^{-4000(t-t')} - 20\times 10^{-6}\}$$
$$= -0{,}1053\, e^{-4000(t-t')}$$

Estos resultados son idénticos a los obtenidos en las Ecuaciones (2) y (4) del Problema 16-8.

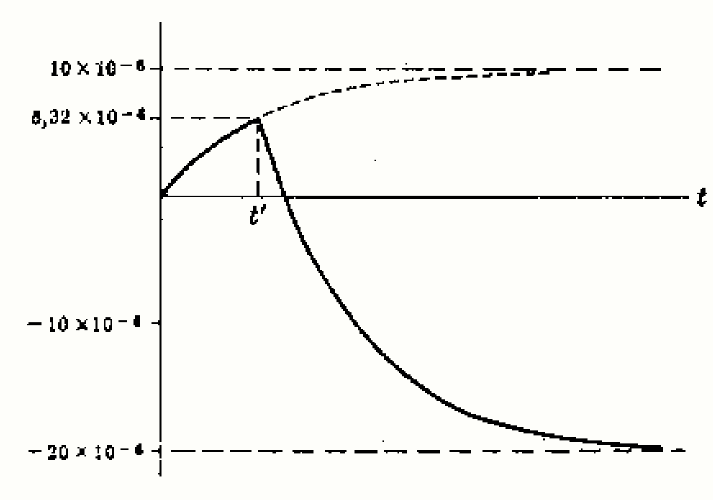



**Fig. 16-29**

**16-10** A un circuito serie *RLC* con $R = 3000$ ohmios, $L = 10$ henrios y $C = 200$ microfaradios, se le aplica una tensión constante $V = 50$ voltios en el instante $t = 0$. Hallar el régimen transitorio de corriente y el valor máximo de la intensidad si el condensador no tiene carga inicial.

La ecuación, una vez cerrado el circuito, es

$$3000i + 10\frac{di}{dt} + \frac{1}{200\times 10^{-6}}\int i\,dt = 50 \quad \text{o bien} \quad (D^2 + 300D + 500)i = 0 \qquad (1)$$

Las raíces de la ecuación característica son $D_1 = -298{,}3$ y $D_2 = -1{,}67$, con lo que

$$i = c_1 e^{-1{,}67t} + c_2 e^{-298{,}3t} \qquad (2)$$

Para calcular $c_1$ y $c_2$ se utilizan dos condiciones iniciales. Al contener una bobina el circuito serie, la función de intensidad tiene que ser continua. Por tanto, si $i = 0$ para $t = 0-$, también vale 0 para $t = 0+$. Entonces, de la Ecuación (1), $10\, di/dt = 50$ y $di/dt = 5$. Si se escribe ahora (2) para $t = 0$ resulta, $0 = c_1(1) + c_2(1)$, de donde $c_1 + c_2 = 0$. Haciendo $t = 0$ en la primera derivada de (2) y sustituyendo el valor $di/dt = 5$ se obtiene $5 = -1{,}67c_1 - 298{,}3c_2$. Resolviendo el sistema de ecuaciones que relacionan las constantes se obtienen los valores $c_1 = 0{,}0168$ y $c_2 = -0{,}0168$. Por tanto,

$$i = 0{,}0168e^{-1{,}67t} - 0{,}0168e^{-298{,}3t} \qquad (3)$$

Para hallar el máximo de la corriente se hace $di/dt$ igual a cero y se despeja $t$.

$$di/dt = (0{,}0168)(-1{,}67)e^{-1{,}67t} - (0{,}0168)(-298{,}3)e^{-298{,}3t} = 0 \quad \text{o bien} \quad t = 0{,}0175 \text{ s}$$

Llevando este valor de $t$ a la Ecuación (3) se obtiene 0,0161 A.

**16-11** Un circuito serie $RLC$, con $R = 50$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 50$ microfaradios, tiene aplicada una tensión constante $V = 100$ voltios en el instante $t = 0$. Hallar el régimen transitorio de corriente, supuesta cero la carga inicial del condensador.

Al cerrar el circuito, la ecuación diferencial es

$$50i + 0{,}1\frac{di}{dt} + \frac{1}{50\times 10^{-6}}\int i\,dt = 100 \quad \text{o bien} \quad (D^2 + 500D + 2\times 10^5)i = 0 \qquad (1)$$

Las raíces de la ecuación característica son $D_1 = -250 + j371$ y $D_2 = -250 - j371$; en consecuencia, la intensidad de corriente es

$$i = e^{-250t}(c_1 \cos 371t + c_2 \operatorname{sen} 371t) \qquad (2)$$

Para $t = 0$ la corriente es cero. Entonces, de (2) se reduce, $i_0 = 0 = (1)(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0)$ y $c_1 = 0$. La Ecuación (2) se transforma en

$$i = e^{-250t} c_2 \operatorname{sen} 371t \qquad (3)$$

Derivando (3), $$di/dt = c_2\{e^{-250t}(371)\cos 371t + e^{-250t}(-250)\operatorname{sen} 371t\} \qquad (4)$$

De (1), para $t = 0$, $0{,}1(di/dt) = 100$, de donde, $di/dt = 1000$. Sustituyendo en (4), para $t = 0$, $di/dt = 1000 = c_2\, 371 \cos 0$ y $c_2 = 2{,}7$. Por tanto, la intensidad buscada es $i = e^{-250t}(2{,}7 \operatorname{sen} 371t)$.

**16-12** Un circuito serie $RL$, con $R = 50$ ohmios y $L = 0{,}2$ henrios, tiene una fuente de tensión senoidal $v = 150 \operatorname{sen}(500t + \phi)$ voltios que se aplica en el instante en que $\phi = 0$. Hallar la corriente completa.

Al cerrar el circuito, la ecuación diferencial es

$$50i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 150 \operatorname{sen} 500t \quad \text{o bien} \quad (D + 250)i = 750 \operatorname{sen} 500t \qquad (1)$$

La función complementaria es $i_c = ce^{-250t}$.

Para hallar la solución particular utilizamos el método de los coeficientes indeterminados y suponemos una intensidad de corriente particular

$$i_p = A\cos 500t + B \operatorname{sen} 500t \qquad (2)$$

Entonces, $$i_p' = -500A \operatorname{sen} 500t + 500B \cos 500t \qquad (3)$$

Sustituyendo estas expresiones de $i$ e $i'$ en (1) se obtiene,

$$(-500A \operatorname{sen} 500t + 500B\cos 500t) + 250(A\cos 500t + B \operatorname{sen} 500t) = 750 \operatorname{sen} 500t$$

Igualando los coeficientes de sen $500t$ y cos $500t$, resultan

$$-500A + 250B = 750 \quad \text{y} \quad 500B + 250A = 0 \qquad (4)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se deduce $A = -1{,}2$ y $B = 0{,}6$. Entonces,

$$i_p = -1{,}2 \cos 500t + 0{,}6 \operatorname{sen} 500t = 1{,}34 \operatorname{sen}(500t - 63{,}4^\circ) \qquad (5)$$

La intensidad de corriente completa es

$$i = ce^{-250t} + 1{,}34 \operatorname{sen}(500t - 63{,}4^\circ) \qquad (6)$$

Para $t = 0$, $i = 0 = c(1) + 1{,}34 \operatorname{sen}(-63{,}4^\circ)$ y $c = 1{,}2$. Por tanto,

$$i = 1{,}2e^{-250t} + 1{,}34 \operatorname{sen}(500t - 63{,}4^\circ) \qquad (7)$$

En la Fig. 16-30 se representan $i_c$, $i_p$ y su suma $i$. Después de sobrepasado el régimen transitorio (aproximadamente para $t = 5\tau$), la intensidad de corriente es senoidal y retrasa respecto de la tensión aplicada en un ángulo $\theta = \text{arc tg } \omega L/R = 63{,}4°$.

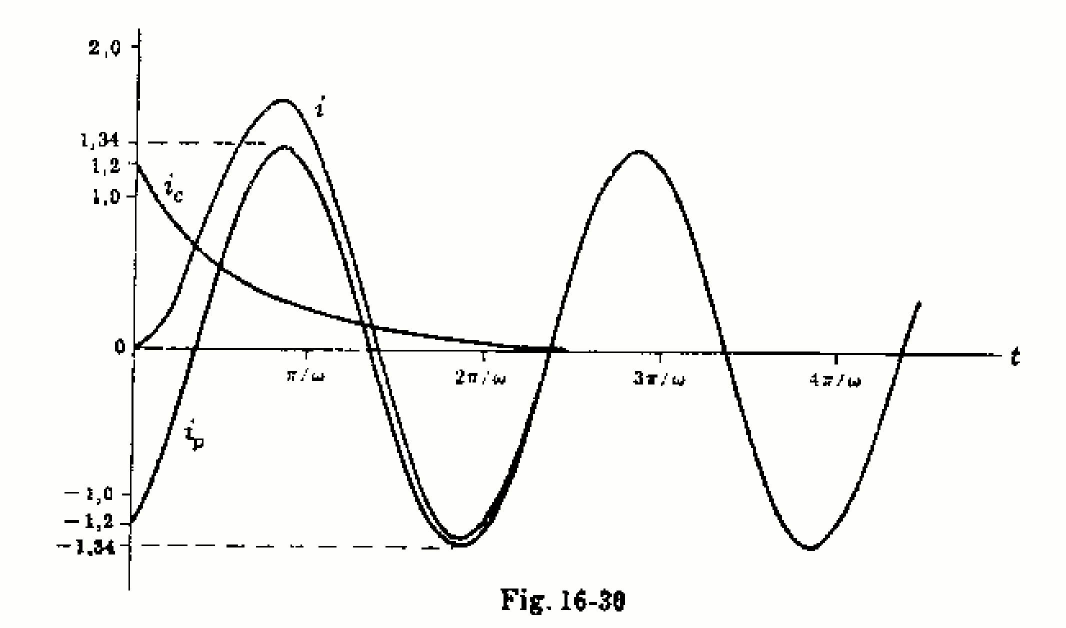



**Fig. 16-30**

**16-13** En relación con el circuito del Problema 16-12, ¿a qué ángulo $\phi$ deberá cerrarse el circuito para que la intensidad de corriente adquiera directamente el régimen permanente sin transitorio?

Si $\phi \neq 0$, de la Ecuación (6) del Problema 16-12,

$$i = ce^{-250t} + 1{,}34 \text{ sen } (500t + \phi - 63{,}4°)$$

Para $t = 0$, $0 = c(1) + 1{,}34 \text{ sen } (\phi - 63{,}4°)$. Ahora bien, el transitorio es cero si la constante $c$ es cero; esto ocurre si $\phi = (63{,}4° + n180°)$, siendo $n = 0, 1, 2, \ldots$

**16-14** Un circuito serie $RC$, con $R = 100$ ohmios y $C = 25$ microfaradios, tiene una fuente de tensión senoidal $v = 250 \text{ sen } (500t + \phi)$ voltios que se aplica en el instante en que $\phi = 0°$. Hallar la intensidad de corriente suponiendo que no hay carga inicial en el condensador.

Al cerrar el circuito, la ecuación diferencial es

$$100i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i\,dt = 250 \text{ sen } 500t \quad \text{o bien} \quad (D + 400)i = 1250 \cos 500t \qquad (1)$$

La función complementaria es $i_c = ce^{-400t}$.

Para determinar la corriente particular se hace que el segundo miembro de la ecuación del operador sea la parte real de $1250\,e^{j500t}$ y se admite, por tanto, la intensidad de corriente particular

$$i_p = \mathbf{K}\,e^{j500t} \qquad (2)$$

Entonces,

$$i_p' = j500\,\mathbf{K}\,e^{j500t} \qquad (3)$$

Llevando estos valores a (1),

$$j500\,\mathbf{K}\,e^{j500t} + 400(\mathbf{K}\,e^{j500t}) = 1250\,e^{j500t} \qquad (4)$$

de donde $\mathbf{K} = 1{,}955\underline{/-51{,}3°}$. Este valor de $\mathbf{K}$ se sustituye en la Ecuación (2), pero como la tensión de entrada es la parte real de $1250e^{j500t}$, la intensidad es la parte real de (2) e $i_p = 1{,}955 \cos (500t - 51{,}3°)$. La corriente completa es

$$i = ce^{-400t} + 1{,}955 \cos (500t - 51{,}3°) \qquad (5)$$

Para $t = 0$, la Ecuación (1) es $100i = 250 \text{ sen } 0$ o bien, $i = 0$. Mediante la Ecuación (5), con $t = 0$ se obtiene $c = -1{,}22$ y, por tanto,

$$i = -1{,}22e^{-400t} + 1{,}955 \cos (500t - 51{,}3°) = -1{,}22e^{-400t} + 1{,}955 \text{ sen } (500t + 38{,}7°)$$

**16-15** En el circuito serie $RC$ de la Fig. 16-31 se aplica la fuente de tensión senoidal $v = 250$ sen $(500t + \phi)$ voltios al cerrar el circuito en el instante en que $\phi = 45°$. Hay una carga inicial $q_0 = 5000 \cdot 10^{-6}$ culombios en el condensador, con la polaridad señalada en el diagrama. Hallar la corriente completa.

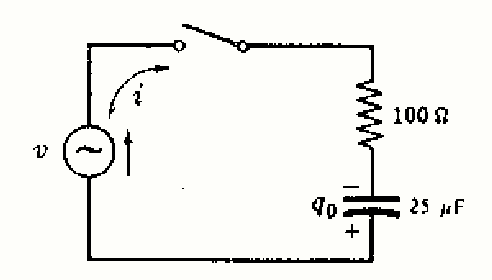



Fig. 16-31

El circuito y la tensión senoidal son los mismos que en el Problema 16-14, excepto que $\phi = 45°$. Por tanto, la forma operacional de la ecuación diferencial es

$$(D + 400)i = 1250 \cos (500t + 45°) \qquad (1)$$

La función complementaria es también la misma que en el problema anterior, y la intensidad de corriente particular está defasada 45°, esto es, $i_p = 1{,}955$ sen $(500t + 83{,}7°)$. La corriente completa es, pues,

$$i = ce^{-400t} + 1{,}955 \text{ sen } (500t + 83{,}7°) \qquad (2)$$

Para $t = 0$ hay dos tensiones que tienden a hacer circular una corriente. El condensador cargado posee una tensión equivalente $V = q_0/C = (5000 \times 10^{-6})/(25 \times 10^{-6}) = 200$ V y la fuente tiene una tensión instantánea $v = 250$ sen $45° = 176{,}7$ V. El examen del circuito muestra que ambas tensiones tienen la misma polaridad y, por tanto, la corriente inicial es $i_0 = (200 + 176{,}7)/100 = 3{,}77$ A. Utilizando ahora la Ecuación (2) con $i = 3{,}77$ para $t = 0$ se obtiene $c = 1{,}83$, con lo que la intensidad de corriente buscada es

$$i = 1{,}83e^{-400t} + 1{,}955 \text{ sen } (500t + 83{,}7°)$$

**16-16** El circuito serie $RLC$ de la Fig. 16-32 tiene una fuente de tensión senoidal $v = 100$ sen $(1000t + \phi)$ voltios. Si se cierra el interruptor cuando $\phi = 90°$, hallar la intensidad de corriente supuesta cero la carga inicial del condensador.

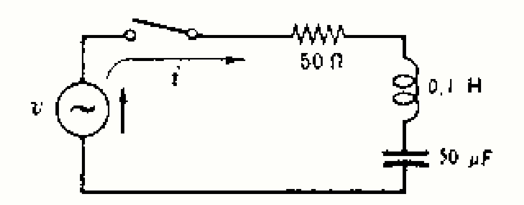



Fig. 16-32

La ecuación del circuito, una vez cerrado el interruptor, es

$$50i + 0{,}1\frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 100 \text{ sen } (1000t + 90°)$$

o bien
$$(D^2 + 500D + 2 \times 10^5)i = 10^6 \cos (1000t + 90°) \qquad (1)$$

Las raíces de la ecuación característica son $D_1 = -250 + j371$ y $D_2 = -250 - j371$.

La corriente complementaria es $i_c = e^{-250t}(c_1 \cos 371t + c_2 \text{ sen } 371t)$ y la particular, hallada por el método empleado en el Problema 16-14, es $i_p = 1{,}06$ sen $(1000t + 32°)$. La corriente completa es, por tanto,

$$i = e^{-250t}(c_1 \cos 371t + c_2 \text{ sen } 371t) + 1{,}06 \text{ sen } (1000t + 32°) \qquad (2)$$

De (1), para $t = 0$, $i_0 = 0$ y $di/dt = 1000$. Sustituyendo en (2), $c_1 = -0{,}562$. Derivando (2) se obtiene

$$\frac{di}{dt} = e^{-250t}(-371c_1 \text{ sen } 371t + 371c_2 \cos 371t)$$
$$+ (c_1 \cos 371t + c_2 \text{ sen } 371t)(-250\,e^{-250t}) + 1{,}06(1000) \cos (1000t + 32°) \qquad (3)$$

Sustituyendo $t = 0$, $c_1 = -0{,}562$ y $di/dt = 1000$ en (3) resulta $c_2 = -0{,}104$. La Ecuación (2) se convierte en

$$i = e^{-250t}(-0{,}562 \cos 371t - 0{,}104 \text{ sen } 371t) + 1{,}06 \text{ sen } (1000t + 32°)$$

**16-17** Un circuito serie $RLC$, con $R = 100$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 50$ microfaradios, tiene una fuente de tensión senoidal $v = 100$ sen $(1000t + \phi)$ voltios. Si se cierra el interruptor cuando $\phi = 90°$, hallar la corriente supuesta nula la carga inicial del condensador.

La ecuación diferencial que corresponde al cierre del circuito es

$$100i + 0{,}1\frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 100 \text{ sen } (1000t + 90°)$$

o bien
$$(D^2 + 1000D + 2 \times 10^5)i = 10^6 \cos (1000t + 90°) \qquad (1)$$

Las raíces de la ecuación característica son $D_1 = -276{,}5$ y $D_2 = -723{,}5$.

La función complementaria es $i_c = c_1 e^{-276{,}5t} + c_2 e^{-723{,}5t}$ y la solución particular, obtenida por el método del Problema 16-14, $i_p = 0{,}781$ sen $(1000t + 51{,}4°)$. La corriente completa es, por tanto,

$$i = c_1\, e^{-276{,}5t} + c_2\, e^{-723{,}5t} + 0{,}781 \text{ sen } (1000t + 51{,}4°) \qquad (2)$$

Para determinar las constantes $c_1$ y $c_2$ se calculan $i$ y $di/dt$ para $t = 0$ en (1). Sustituyendo los valores que resultan, esto es, $i_0 = 0$ y $di/dt = 1000$ en (2) se obtiene

$$i_0 = 0 = c_1(1) + c_2(1) + 0{,}781 \text{ sen } 51{,}4° \quad \text{o bien} \quad c_1 + c_2 = -0{,}610 \qquad (3)$$

Derivando (2) y sustituyendo $t = 0$ y $di/dt = 1000$,

$$di/dt = 1000 = -276{,}5c_1 - 723{,}5c_2 + 781 \cos 51{,}4° \quad \text{o bien} \quad 276{,}5c_1 + 723{,}5c_2 = -513 \qquad (4)$$

Resolviendo el sistema formado por (3) y (4), $c_1 = 0{,}161$ y $c_2 = -0{,}771$. Por tanto,

$$i = 0{,}161e^{-276{,}5t} - 0{,}771e^{-723{,}5t} + 0{,}781 \text{ sen } (1000t + 51{,}4°)$$

**16-18** En un circuito de dos mallas, Fig. 16-33, se cierra el interruptor en el instante $t = 0$. Determinar las corrientes transitorias en las mallas, $i_1$ e $i_2$, y la tensión transitoria en el condensador $v_C$.

Fig. 16-33

Aplicando las leyes de Kirchhoff a las dos mallas se tiene

$$20i_1 - 10i_2 = 50 \quad \text{o bien} \quad 2Di_1 = Di_2 \qquad (1)$$

$$-10i_1 + 10i_2 + \frac{1}{2\times10^{-6}}\int i_2\, dt = 0 \quad \text{o bien} \quad -Di_1 + (D + 5\times10^5)i_2 = 0 \qquad (2)$$

De la Ecuación (1), $Di_1 = \frac{1}{2}Di_2$. Sustituyendo en (2),

$$-(\tfrac{1}{2}Di_2) + (D + 5\times10^5)i_2 = 0 \quad \text{o bien} \quad (D + 10^5)i_2 = 0 \qquad (3)$$

La solución de la Ecuación (3) contiene solamente una función complementaria, ya que la ecuación es homogénea. Por tanto,

$$i_2 = c\, e^{-10^5 t} \qquad (4)$$

Poniendo $t = 0$ en la Ecuación (2), $-10i_1 + 10i_2 = 0$ o bien $i_1 = i_2$. En consecuencia, la Ecuación (1) para $t = 0$ se convierte en $20i_1 - 10i_1 = 50$, de donde $i_1 = i_2 = 5$ A. Sustituyendo este valor de $i_2$ en (4) se obtiene $c = 5$. Por tanto,

$$i_2 = 5\, e^{-10^5 t} \qquad (5)$$

La corriente transitoria $i_1$ se obtiene ahora sustituyendo (5) en la Ecuación (1). Entonces,

$$20i_1 - 10(5\, e^{-10^5 t}) = 50 \qquad \text{o} \qquad i_1 = 2.5 + 2{,}5\, e^{-10^5 t}$$

La tensión transitoria en el condensador, $v_C$, se obtiene integrando, respecto del tiempo, la intensidad de la corriente en la malla $i_2$:

$$v_C = \frac{1}{C}\int i_2\, dt = \frac{1}{2\times10^{-6}}\int 5\, e^{-10^5 t}\, dt = 25(1 - e^{-10^5 t})$$

**16-19** En el circuito de dos mallas de la Fig. 16-34 se cierra el interruptor en el instante $t = 0$ y la fuente de tensión es $v = 150$ sen $1000t$ voltios. Hallar las corrientes de malla $i_1$ e $i_2$ (véase el esquema).

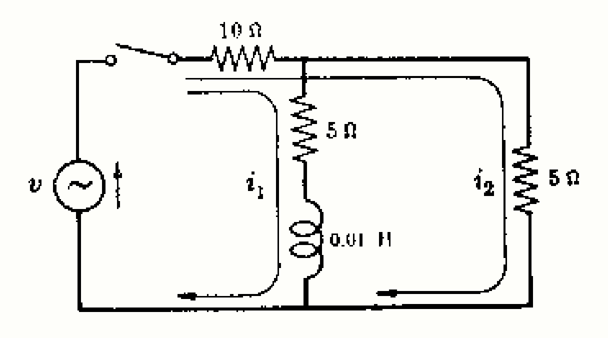


Fig. 16-34

Las leyes de Kirchhoff, aplicadas a las mallas, proporcionan el sistema de ecuaciones

$$10i_2 + 10i_1 + 0.01\frac{di_1}{dt} = 150 \text{ sen } 1000t$$

o bien $(D + 1500)i_1 + 1000i_2 = 15.000$ sen $1000t$ (1)

$$15i_2 + 10i_1 = 150 \text{ sen } 1000t \qquad (2)$$

De la Ecuación (2),
$$i_2 = 10 \text{ sen } 1000t - \tfrac{2}{3}i_1 \qquad (3)$$

Sustituyendo en la Ecuación (1) se obtiene la ecuación diferencial

$$(D + 833)i_1 = 5000 \text{ sen } 1000t \qquad (4)$$

La solución completa, según el método del Problema 16-14, es

$$i_1 = c\,e^{-833t} + 3{,}84 \text{ sen } (1000t - 50{,}2^\circ) \qquad (5)$$

Llevando ahora esta expresión de $i_1$ a la Ecuación (3) se deduce

$$i_2 = -\tfrac{2}{3}c\,e^{-833t} - 2{,}56 \text{ sen } (1000t - 50{,}2) + 10 \text{ sen } 1000t$$

$$= -\tfrac{2}{3}c\,e^{-833t} + 8{,}58 \text{ sen } (1000t + 13{,}25^\circ) \qquad (6)$$

La intensidad de la corriente de malla $i_1$ circula por una bobina y tiene que anularse para $t = 0$. Sustituyendo en la Ecuación (5), $0 = c(1) + 3{,}84$ sen $(-50{,}2^\circ)$, de donde $c = 2{,}95$. El sistema de ecuaciones en las corrientes de malla es, por tanto,

$$i_1 = 2{,}95e^{-833t} + 3{,}84 \text{ sen } (1000t - 50{,}2^\circ) \quad \text{e} \quad i_2 = -1{,}97e^{-833t} + 8{,}58 \text{ sen } (1000t + 13{,}25^\circ)$$

# Problemas propuestos

**16-20** En el circuito serie $RL$ de la Fig. 16-35 se cierra el interruptor $S_1$ en el instante $t = 0$. Después de 4 milisegundos se abre el interruptor $S_2$. Hallar la intensidad de corriente en los intervalos $0 < t < t'$ y $t' < t$, siendo $t' = 4$ milisegundos.
*Sol.* $i = 2(1 - e^{-500t})$; $i = 1{,}06e^{-1500(t-t')} + 0{,}667$.

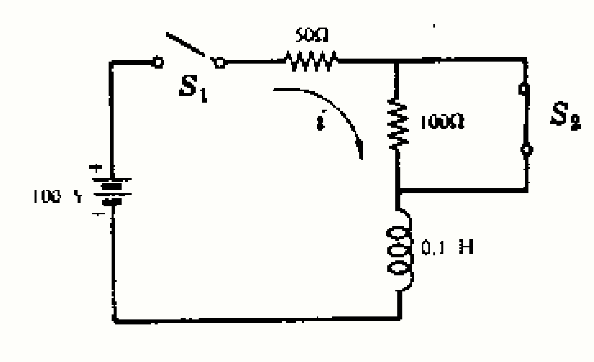


Fig. 16-35

**16-21** Se aplica, cerrando un interruptor, una tensión constante a un circuito serie $RL$. La tensión entre los extremos de $L$ es 25 voltios para $t = 0$ y cae a 5 voltios para $t = 0{,}025$ segundos. Si $L = 2$ henrios, ¿cuál debe ser el valor de $R$?
*Sol.* 128,8 Ω.

**16-22** En el circuito de la Fig. 16-36 se cierra el interruptor $S_1$ en el instante $t = 0$ y se abre $S_2$ para $t = 0{,}2$ segundos. Determinar las expresiones de la corriente transitoria en los dos intervalos.
*Sol.* $i = 10(1 - e^{-10t})$; $i = 6{,}97e^{-60(t-t')} + 1{,}67$.

**16-23** En el circuito de la Fig. 16-37 se cierra el circuito en la posición 1 en el instante $t = 0$ y se pasa a la posición 2 después de transcurrido 1 milisegundo. Hallar el tiempo para el cual la corriente es cero e invierte su sentido. *Sol.* 1,261 ms.

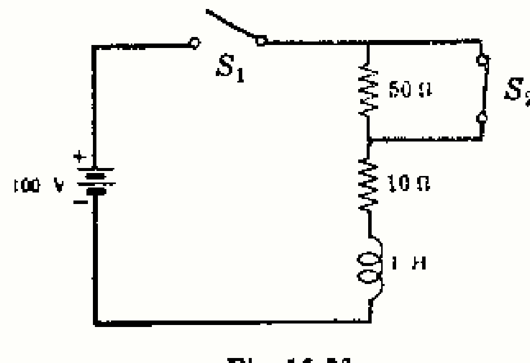


Fig. 16-36

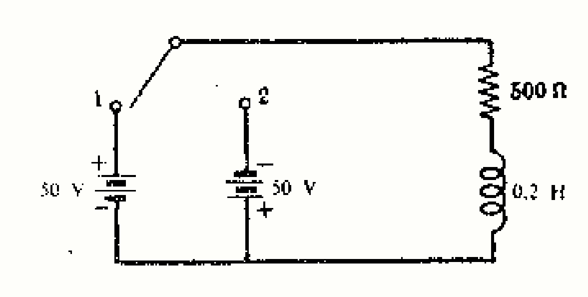


Fig. 16-37

**16-24** En el circuito de la Fig. 16-38 se ha cerrado el interruptor en la posición 1 el tiempo suficiente para que se establezca el régimen permanente de corriente. Si se pasa el interruptor a la posición 2 existe una corriente transitoria en las dos resistencias de 50 ohmios durante un corto tiempo. Determinar la energía disipada en las resistencias durante este régimen transitorio. *Sol.* 8 J.

**16-25** El circuito *RC* de la Fig. 16-39 tiene en el condensador una carga inicial $q_0 = 800 \times 10^{-6}$ culombios, con la polaridad señalada en el esquema. Hallar los regímenes transitorios de corriente y carga que se originan al cerrar el circuito. *Sol.* $i = -10e^{-2,5 \times 10^4 t}$ A; $q = 400(1 + e^{-2,5 \times 10^4 t}) \cdot 10^{-6}$ C.

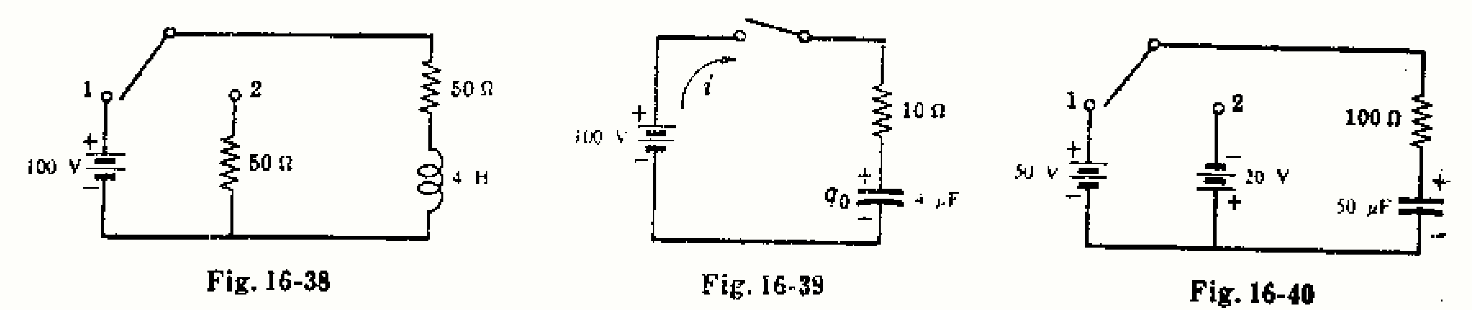



Fig. 16-38 Fig. 16-39 Fig. 16-40

**16-26** Un condensador de 2 microfaradios y una carga inicial $q_0 = 100 \cdot 10^{-6}$ culombios se conecta entre los terminales de una resistencia de 100 ohmios en el instante $t = 0$. Calcular el tiempo en el que la tensión de régimen transitorio en la resistencia cae de 40 a 10 voltios. *Sol.* 277,4 μs.

**16-27** En el circuito de la Fig. 16-40 se pone el interruptor en la posición 1 en el instante $t = 0$ y se conmuta a la posición 2 después de una constante de tiempo 1 τ. Hallar las expresiones en el régimen transitorio, de la corriente en ambos intervalos $0 < t < t'$ y $t' < t$. *Sol.* $i = 0,5e^{-200t}$; $i = -0,516e^{-200(t-t')}$ A.

**16-28** En relación con el Problema 16-27 resolver la ecuación diferencial referida a la carga. Deducir de las funciones carga en régimen transitorio las intensidades correspondientes y comparar los resultados.

**16-29** En el circuito de la Fig. 16-41 se pone el interruptor en la posición 1 el tiempo suficiente para que se establezca el régimen permanente y se conmuta después a 2. Se establece una corriente de régimen transitorio, disipándose durante éste una energía determinada en las dos resistencias. Obtener esta energía y compararla con la almacenada en el condensador antes de conmutar el interruptor. *Sol.* 0,20 J.

**16-30** En el circuito de la Fig. 16-42 el condensador $C_1$ tiene la carga inicial $q_0 = 300 \cdot 10^{-6}$ culombios. Si se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, hallar la corriente y la carga en el régimen transitorio y la tensión final del condensador $C_1$. *Sol.* $i = 2,5e^{-2,5 \times 10^4 t}$ A; $q = 200(1 + 0,5e^{-2,5 \times 10^4 t}) \cdot 10^{-6}$ C; 33,3 V.

**16-31** Hallar, en el problema anterior, las tensiones de régimen transitorio $v_{C_1}$, $v_{C_2}$ y $v_R$. Demostrar que su suma es nula. *Sol.* $v_{C_1} = 33,3 + 16,7e^{-2,5 \times 10^4 t}$; $v_{C_2} = -33,3(1 - e^{-2,5 \times 10^4 t})$; $v_R = -50e^{-2,5 \times 10^4 t}$.

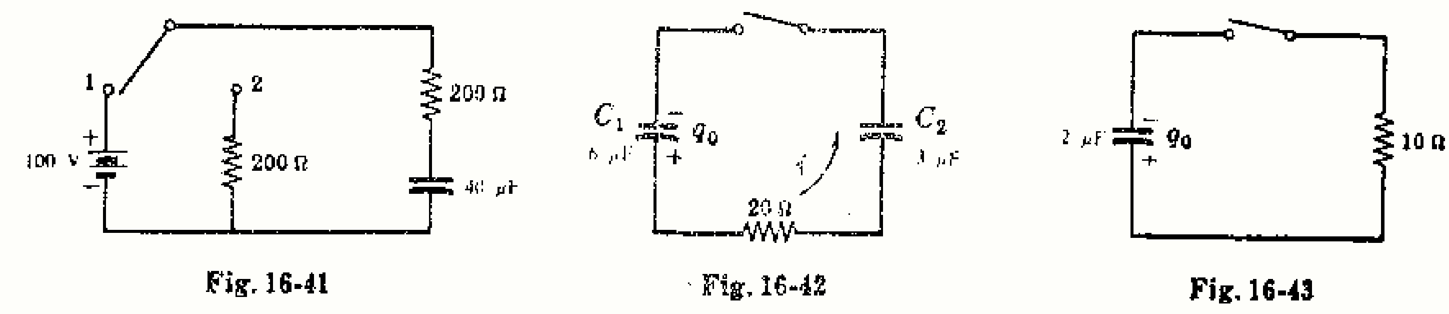



Fig. 16-41 Fig. 16-42 Fig. 16-43

**16-32** En el circuito serie *RC* de la Fig. 16-43 el condensador tiene una carga inicial $q_0$ y el interruptor se cierra en el instante $t = 0$. Determinar $q_0$ sabiendo que la potencia de régimen transitorio en la resistencia es $p_R = 360e^{-10^5 t}$ vatios. *Sol.* $120 \cdot 10^{-6}$ C.

**16-33** Un circuito serie *RLC*, con $R = 200$ ohmios, $L = 0,1$ henrios y $C = 100$ microfaradios, se le aplica en el instante $t = 0$ una tensión constante de 200 voltios. Determinar la intensidad de corriente suponiendo que el condensador no tiene carga inicial. *Sol.* $i = 1,055e^{-52t} - 1,055e^{-1948t}$ A.

**16-34** Un circuito serie *RLC*, con $R = 200$ ohmios y $L = 0,1$ henrios, adquiere un amortiguamiento crítico para un valor determinado de la capacitancia. Determinar la capacidad *C* del condensador. *Sol.* 10 μF.

**16-35** Hallar la pulsación natural de un circuito serie *RLC* en el que $R = 200$ ohmios, $L = 0,1$ henrios y $C = 5$ microfaradios. *Sol.* 1000 rad/s.

**16-36** A un circuito serie *RLC*, con $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 500$ microfaradios, se le aplica en el instante $t = 0$ una tensión constante $V = 10$ voltios. Determinar la corriente en el régimen transitorio.
*Sol.* $i = 0{,}72e^{-25t}$ sen $139t$.

**16-37** La tensión senoidal aplicada a un circuito serie *RL* es $v = 100\cos(100t + \phi)$ voltios. Los valores de *R* y *L* son 300 ohmios y 1,0 henrios. Si se cierra el circuito para $\phi = 45°$, obtener el transitorio resultante para la corriente. *Sol.* $i = -0{,}282e^{-300t} + 0{,}316\cos(100t + 26{,}6°)$.

**16-38** El circuito serie *RL* de la Fig. 16-44 está funcionando en régimen senoidal permanente con el interruptor en la posición 1. Se conmuta el interruptor a la posición 2 cuando la fuente de tensión es $v = 100\cos(100t + 45°)$ voltios. Obtener la corriente en régimen transitorio y representar el último semiciclo del régimen permanente junto con el régimen transitorio, para que se observe el paso del uno al otro. *Sol.* $i = 0{,}282e^{-300t}$.

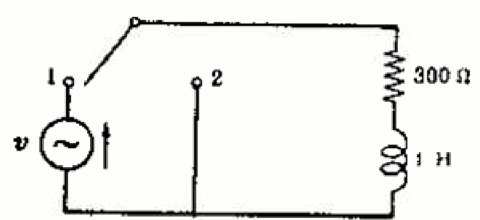


Fig. 16-44

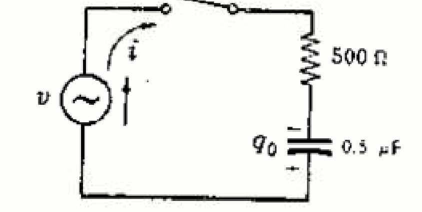


Fig. 16-45

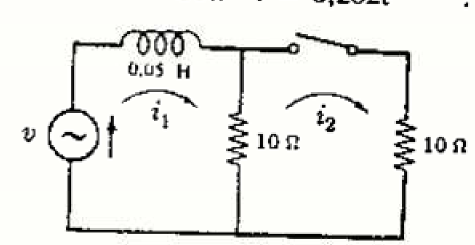


Fig. 16-46

**16-39** En un circuito serie *RC*, Fig. 16-45, el condensador tiene una carga inicial $q_0 = 25 \times 10^{-6}$ culombios con la polaridad indicada en el esquema. En el instante en que $\phi = 30°$ se aplica la tensión senoidal $v = 100$ sen $(1000t + \phi)$ voltios. Obtener la corriente en el régimen transitorio.
*Sol.* $i = 0{,}1535e^{-4\times10^3 t} + 0{,}0484$ sen $(1000t + 106°)$.

**16-40** En el problema anterior, ¿qué carga inicial debería tener el condensador para que al cerrar el interruptor la corriente pasara directamente al régimen permanente sin transición?
*Sol.* $13{,}37 \times 10^{-6}$ C, + en la placa superior.

**16-41** Demostrar que un circuito serie *RLC* con una fuente de tensión $v = V_{max}$ sen $(\omega t + \phi)$ voltios tiene una solución particular de la ecuación diferencial dada por

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi + \text{arc tg}\,\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right)$$

**16-42** A un circuito serie *RLC*, con $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 500$ microfaradios, se le aplica en el instante en que $\phi = 0°$ la tensión senoidal $v = 100$ sen $(250t + \phi)$ voltios. Hallar la corriente resultante.
*Sol.* $i = e^{-25t}(5{,}42\cos 139t - 1{,}89\,\text{sen}\,139t) + 5{,}65\,\text{sen}\,(250t - 73{,}6°)$.

**16-43** En un circuito serie *RLC*, con $R = 200$ ohmios, $L = 0{,}5$ henrios y $C = 100$ microfaradios, hay una fuente de tensión $v = 300$ sen $(500t + \phi)$ voltios. Si se cierra el interruptor en el instante que $\phi = 30°$, determinar la corriente resultante. *Sol.* $i = 0{,}517e^{-341{,}4t} - 0{,}197e^{-58{,}6t} + 0{,}983\,\text{sen}\,(500t - 19°)$.

**16-44** Un circuito serie *RLC*, con $R = 50$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 50$ microfaradios, tiene la fuente de tensión senoidal $v = 100$ sen $(500t + \phi)$ voltios. Si se cierra el circuito en el instante en que $\phi = 45°$, determinar la corriente resultante.
*Sol.* $i = e^{-250t}(-1{,}09\cos 371t - 1{,}025\,\text{sen}\,371t) + 1{,}96\,\text{sen}\,(500t + 33{,}7°)$.

**16-45** En un circuito de dos mallas, Fig. 16-46, la fuente de tensión en la malla 1 viene dada por $v = 100$ sen $(200t + \phi)$ voltios. Determinar el régimen transitorio de las corrientes $i_1$ e $i_2$ si el circuito se cierra en el instante en que $\phi = 0°$.
*Sol.* $i_1 = 3{,}01e^{-100t} + 8{,}96\,\text{sen}\,(200t - 63{,}4°)$; $i_2 = 1{,}505e^{-100t} + 4{,}48\,\text{sen}\,(200t - 63{,}4°)$

**16-46** En el circuito de dos mallas de la Fig. 16-47 hallar las corrientes $i_1$ e $i_2$ al cerrar el interruptor en el instante $t = 0$.
*Sol.* $i_1 = 0{,}101e^{-100t} + 9{,}899e^{-9950t}$; $i_2 = -5{,}05e^{-100t} + 5 + 0{,}5e^{-9950t}$.

**16-47** En el circuito de dos mallas de la Fig. 16-48 se cierra el interruptor en el instante $t = 0$. Determinar las corrientes $i_1$ e $i_2$. *Sol.* $i_1 = 1{,}67e^{-6{,}67t} + 5$; $i_2 = -0{,}555e^{-6{,}67t} + 5$.

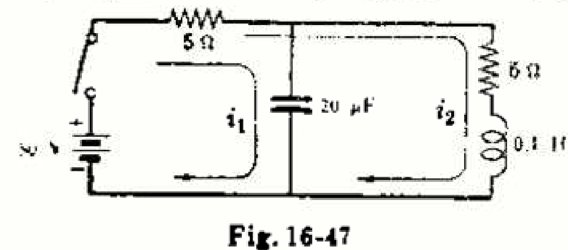


Fig. 16-47

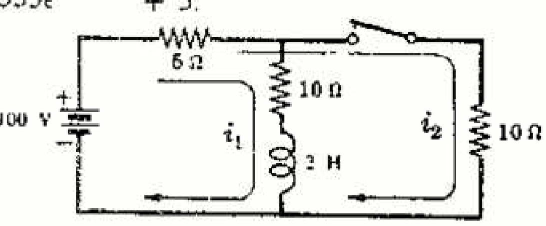


Fig. 16-48

# Capítulo 17

# Análisis del régimen transitorio por el método de la transformada de Laplace

## INTRODUCCION

En el Capítulo 16 hemos estudiado la corriente en el régimen transitorio en circuitos que contienen elementos capaces de almacenar energía. Aplicando las leyes de Kirchhoff a dichos circuitos resultan una o más ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo, según la configuración del circuito. Estas ecuaciones las hemos resuelto por los métodos clásicos. Sin embargo, en muchas situaciones, no conviene emplear esos métodos, razón por la cual vamos a ver otro método, que se llama de la transformada de Laplace, que proporciona la solución directa de una ecuación diferencial en determinadas circunstancias. Además, en el caso de algunas funciones de forma irregular, no se pueden manejar con facilidad por los métodos clásicos y el método de Laplace, en cambio, proporciona una solución muy elegante.

Este capítulo solo muestra las aplicaciones básicas del método de la transformada de Laplace. Se prescinde de las demostraciones matemáticas rigurosas y de aquellas aplicaciones más complejas, remitiendo al lector a los textos consagrados a capítulo tan importante de la matemática aplicada.

## LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea $f(t)$ una función de $t$ definida para todo $t > 0$; la transformada de Laplace, que se expresa con el símbolo $\mathcal{L}[f(t)]$, se define por

$$\mathcal{L}[f(t)] \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{s}) \;=\; \int_0^\infty f(t)\, e^{-\mathbf{s}t}\, dt \qquad (1)$$

en donde el parámetro $\mathbf{s}$ puede ser un número real o complejo. En las aplicaciones a la teoría de circuitos, $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$. La operación $\mathcal{L}[f(t)]$ transforma una función $f(t)$ en el *dominio del tiempo* en una función $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ en el *dominio de la pulsación compleja* o *dominio de la variable* $\mathbf{s}$. Ambas funciones, $f(t)$ y $\mathbf{F}(\mathbf{s})$, forman un par de transformadas. Existen tablas en donde se encuentran estos pares de funciones. Las transformadas de la Tabla 17-1 son suficientes para los fines que se persiguen en este capítulo.

Las condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace son que la función $f(t)$ sea (*a*) continua a intervalos y (*b*) de orden exponencial. Una función $f(t)$ es de orden exponencial si $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$ para todo $t > t_0$, siendo $A$ y $t_0$ constantes positivas. Si se cumplen estas condiciones, la integral de la transformación directa es convergente para todo $\sigma > \alpha$, y existe $\mathbf{F}(\mathbf{s})$. En el análisis de circuitos, todas las funciones cumplen las condiciones (*a*) y (*b*).

**Ejemplo 1.**

La función representada en la Fig. 17-1 se llama *función escalón* y se define por $f(t) = A$, $t > 0$. Hallar su transformada de Laplace.

Aplicando la ecuación (*1*) a la función $f(t) = A$ tendremos

$$\mathcal{L}[A] \;=\; \int_0^\infty A e^{-\mathbf{s}t}\, dt \;=\; \left[-\frac{A}{\mathbf{s}} e^{-\mathbf{s}t}\right]_0^\infty \;=\; \frac{A}{\mathbf{s}}$$

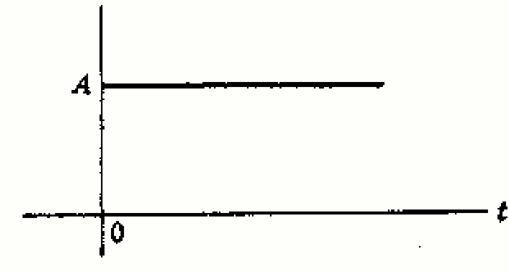



Fig. 17-1

**Ejemplo 2.**

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{-at}$, siendo $a$ una constante.

$$\mathcal{L}[e^{-at}] \;=\; \int_0^\infty e^{-at} e^{-\mathbf{s}t}\, dt \;=\; \int_0^\infty e^{-(a+\mathbf{s})t}\, dt \;=\; \left[-\frac{1}{(a+\mathbf{s})} e^{-(a+\mathbf{s})t}\right]_0^\infty \;=\; \frac{1}{\mathbf{s}+a}$$

**Ejemplo 3.** Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = \text{sen}\,\omega t$.

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,\omega t\} = \int_0^\infty \text{sen}\,\omega t\, e^{-st}\,dt = \left[\frac{-s(\text{sen}\,\omega t)e^{-st} - e^{-st}\omega\cos\omega t}{s^2+\omega^2}\right]_0^\infty = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

**Ejemplo 4.** Hallar la transformada de Laplace de la función derivada, $df/dt$.

$$\mathcal{L}[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt$$

Integrando por partes, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ siendo $u = e^{-st}$, $dv = df$, $v = f$,

$$\mathcal{L}[df/dt] = \left[e^{-st}f\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(-se^{-st})\,dt = -f(0+) + s\int_0^\infty fe^{-st}\,dt = -f(0+) + s\mathbf{F}(s)$$

en donde $f(0+)$ es el valor de la función cuando se aproxima a cero por la derecha, es decir, el valor de la función para $t = (0+)$.

**Ejemplo 5.** Hallar la transformada de Laplace de la función integral, $\int f(t)\,dt$.

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \int_0^\infty \int f(t)\,dt\; e^{-st}\,dt$$

Integrando por partes, haciendo $u = \int f(t)\,dt$ y $dv = e^{-st}\,dt$,

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \left[\int f(t)\,dt\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{s}\int f(t)\,dt\Big|_{0+} + \frac{1}{s}\mathbf{F}(s)$$

en donde $\int f(t)\,dt\Big|_{0+}$ es el valor de la integral en $0+$, que se puede escribir también $f^{-1}(0+)$. Así, pues, la transformada de Laplace de una integral es

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathbf{F}(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0+)$$

Los pares de transformadas obtenidos figuran en la Tabla 17-1.

## APLICACION AL ANALISIS DE CIRCUITOS

En el circuito serie $RC$ representado en la Fig. 17-2 el condensador tiene una carga inicial $q_0$ con la polaridad indicada en el esquema. Al cerrar el interruptor, debido al generador de tensión constante $V$, y a dicha carga inicial, circula una corriente de intensidad variable $i$, de manera que la ecuación diferencial del circuito es

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad (2)$$

Llamando $I(s)$ a la intensidad de corriente en el dominio de la variable s y aplicando la transformada de Laplace a cada término de la ecuación (2) resulta

$$\mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int i\,dt\right] = \mathcal{L}[V] \qquad (3)$$

$$R\,I(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{f^{-1}(0+)}{Cs} = \frac{V}{s} \qquad (4)$$

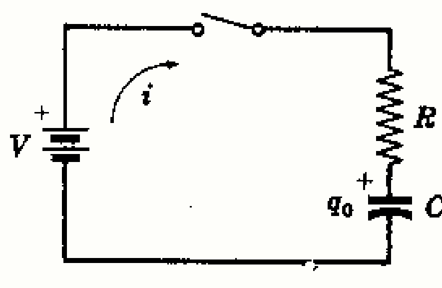



Fig. 17-2

Ahora bien, $f^{-1}(0+) = \int i\,dt\Big|_{0+} = q(0+)$. La carga inicial $q_0$ es positiva en la armadura superior del condensador, la misma que la del borne superior del generador $V$. Por tanto, el signo es positivo. Introduciendo $q_0$ en la ecuación (4),

$$R\,I(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{q_0}{Cs} = \frac{V}{s} \qquad (5)$$

Agrupando términos y sacando factor común $I(s)$,

Tabla 17-1

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

| | $f(t)$ | $\mathbf{F}(s)$ |
|---|---|---|
| 1. | $A \qquad t \geq 0$ | $\dfrac{A}{s}$ |
| 2. | $At \qquad t \geq 0$ | $\dfrac{A}{s^2}$ |
| 3. | $e^{-at}$ | $\dfrac{1}{s+a}$ |
| 4. | $te^{-at}$ | $\dfrac{1}{(s+a)^2}$ |
| 5. | $\operatorname{sen} \omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 6. | $\cos \omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 7. | $\operatorname{sen}(\omega t+\theta)$ | $\dfrac{s \operatorname{sen}\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$ |
| 8. | $\cos(\omega t+\theta)$ | $\dfrac{s\cos\theta - \omega \operatorname{sen}\theta}{s^2+\omega^2}$ |
| 9. | $e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$ | $\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 10. | $e^{-at}\cos\omega t$ | $\dfrac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 11. | $\operatorname{senh}\omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$ |
| 12. | $\cosh\omega t$ | $\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$ |
| 13. | $df/dt$ | $s\mathbf{F}(s) - f(0+)$ |
| 14. | $\int f(t)\,dt$ | $\dfrac{\mathbf{F}(s)}{s} + \dfrac{f^{-1}(0+)}{s}$ |
| 15. | $f(t-t_1)$ | $e^{-t_1 s}\mathbf{F}(s)$ |
| 16. | $f_1(t) + f_2(t)$ | $\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s)$ |

$$I(\mathrm{s})\left(R + \frac{1}{C\mathrm{s}}\right) \;=\; \frac{V}{\mathrm{s}} - \frac{q_0}{C\mathrm{s}} \tag{6}$$

con lo que

$$I(\mathrm{s}) \;=\; \frac{1}{\mathrm{s}}(V - q_0/C)\frac{1}{(R + 1/\mathrm{s}C)} \;=\; \frac{V - q_0/C}{R}\,\frac{1}{(\mathrm{s} + 1/RC)} \tag{7}$$

La ecuación (7), en el dominio de la variable s, tiene su correspondiente $i$ en el dominio del tiempo $t$. La operación por la cual $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ se transforma en $f(t)$ se llama transformada inversa de Laplace, y se representa por el símbolo $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(\mathrm{s})] = f(t)$. En la Tabla 17-1 se observa que la función $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ del par de transformadas 3 equivale al término $1/(\mathrm{s} + 1/RC)$ de la ecuación (7). Así, pues, de la definición de la transformada inversa de Laplace y de la tabla se deduce

$$\mathcal{L}^{-1}[I(\mathrm{s})] \;=\; i \;=\; \left(\frac{V - q_0/C}{R}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s} + 1/RC}\right] \;=\; \frac{V - q_0/C}{R}\,e^{-t/RC} \tag{8}$$

La ecuación (8), en el dominio del tiempo, es la corriente transitoria que comienza a circular en cuanto se cierra el interruptor en un circuito serie $RC$ cuyo condensador contiene una carga inicial $q_0$. En la ecuación (5), en el dominio de la variable s, ya se habían introducido las condiciones iniciales y, en consecuencia, la ecuación que resulta de la transformación inversa contiene dichas constantes.

Obsérvese que por simples operaciones algebraicas en (6) y (7), la función $I(\mathrm{s})$ se ha reducido a uno de los tipos que aparecen en la tabla, facilitándose de este modo la obtención de la transformada inversa de Laplace.

En la Fig. 17-3 se representa la función del tiempo con una corriente inicial $(V - q_0/C)/R$. Si $q_0/C = V$ no existe régimen transitorio, ya que la carga inicial del condensador produce una tensión igual a la tensión aplicada $V$. Si la carga inicial $q_0$ es de polaridad opuesta, cambia el signo asociado a $q_0/C$, con lo que la intensidad de corriente inicial podría ser muy grande.

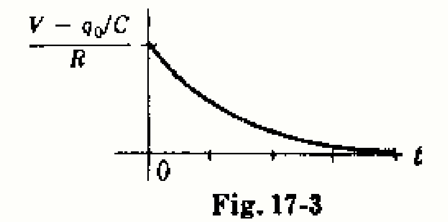


Fig. 17-3

Al cerrar el interruptor en el circuito serie $RL$ de la Figura 17-4, debido al generador de tensión $V$, circula una corriente de intensidad variable $i$ de manera que, según las leyes de Kirchhoff,

$$Ri + L\frac{di}{dt} \;=\; V \tag{9}$$

Aplicando directamente la transformada de Laplace a cada término resulta

$$\mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[L\frac{di}{dt}\right] \;=\; \mathcal{L}[V] \tag{10}$$

$$R\,I(\mathrm{s}) + \mathrm{s}L\,I(\mathrm{s}) - L\,i(0+) \;=\; V/\mathrm{s} \tag{11}$$

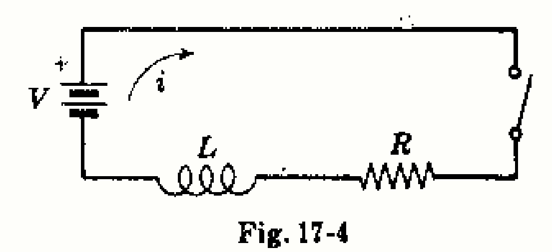


Fig. 17-4

La corriente inicial $i(0+)$ en un circuito serie $RL$, que es cero antes de cerrar el interruptor, también lo es para $t = 0+$. Sustituyendo $i(0+) = 0$ en la ecuación (11),

$$I(\mathrm{s})\,(R + \mathrm{s}L) \;=\; V/\mathrm{s} \tag{12}$$

de donde,

$$I(\mathrm{s}) \;=\; \frac{V}{\mathrm{s}}\frac{1}{(R + \mathrm{s}L)} \;=\; \frac{V}{L}\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)\frac{1}{(\mathrm{s} + R/L)} \tag{13}$$

La función en la variable s de la ecuación (13) no aparece directamente en la Tabla 17-1; sin embargo, si se escribe en la forma $A/\mathrm{s} + B/(\mathrm{s} + R/L)$, teniendo en cuenta los pares 1 y 3, el par 16 indica que la función del tiempo total es la suma de dos funciones del tiempo, es decir, $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}_1(\mathrm{s}) + \mathbf{F}_2(\mathrm{s})] = f_1(t) + f_2(t)$. Para obtener la suma deseada se descompone el segundo miembro de (13), prescindiendo de la constante $V/L$, en una suma de dos fracciones

$$\frac{1}{\mathrm{s}(\mathrm{s} + R/L)} \;=\; \frac{A}{\mathrm{s}} + \frac{B}{(\mathrm{s} + R/L)} \;=\; \frac{A(\mathrm{s} + R/L) + B\mathrm{s}}{\mathrm{s}(\mathrm{s} + R/L)} \tag{14}$$

De los numeradores se deduce la siguiente ecuación en la variable s:

$$1 \;=\; (A + B)\mathrm{s} + AR/L \tag{15}$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado en s resulta

$$A + B = 0, \quad A = L/R, \quad B = -L/R \tag{16}$$

Mediante las fracciones simples indicadas, con $A$ y $B$ determinados, la ecuación (13) se convierte en

$$I(s) = \frac{V}{L}\left(\frac{L/R}{s} + \frac{-L/R}{s + R/L}\right) = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right) \tag{17}$$

Aplicando las transformaciones 1 y 3 de la Tabla 17-1 se obtiene la expresión de la transformada inversa, es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \frac{V}{R}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + R/L}\right]\right\} \tag{18}$$

con lo que

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{19}$$

La ecuación (19) es el conocido crecimiento exponencial de la intensidad al valor $V/R$ del régimen permanente.

## METODOS DE DESARROLLO

En el análisis de circuitos es necesario, con mucha frecuencia, expresar un cociente como suma de fracciones simples con objeto de hallar la transformada inversa de Laplace, ya que en el dominio de la variable s la corriente suele venir definida como cociente de dos polinomios en s,

$$I(s) = P(s)/Q(s) \tag{20}$$

en donde $Q(s)$ es de mayor grado que $P(s)$. Ya hemos visto un ejemplo de desarrollo de un cociente en la ecuación (14).

Vamos a examinar ahora la aplicación del método de desarrollo en fracciones simples a los diferentes casos que se presentan con los cocientes de dos polinomios. Asimismo, veremos otro importante método basado en la fórmula del desarrollo de Heaviside. Su aplicación conduce, por otro camino, al cálculo de la transformada inversa de Laplace de un cociente de dos polinomios.

### 1. Desarrollo en fracciones parciales.

La ecuación (20) se puede escribir como una suma de fracciones cada una de las cuales tenga por denominador uno de los divisores de $Q(s)$ y por numerador una constante. En el desarrollo del cociente $P(s)/Q(s)$ se deben considerar las raíces de $Q(s)$. Estas pueden ser reales o complejas, lo cual da lugar a los siguientes casos.

*Caso 1.* Raices reales simples de $Q(s)$.

Consideremos la siguiente expresión de la intensidad de corriente en el dominio de la variable **s**.

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s - 1}{s^2 + 3s + 2} \tag{21}$$

Descomponiendo en factores $Q(s)$, la ecuación (21) adquiere la forma

$$I(s) = \frac{s - 1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} \tag{22}$$

Para $s = -2$ y $s = -1$ la expresión anterior tiende a infinito; estos valores de s se llaman *polos simples* de la función. El coeficiente de un polo simple $s = s_0$ viene dado por $I(s)(s - s_0)\big|_{s=s_0}$ Por tanto, para hallar el coeficiente $A$, multiplicamos los dos miembros de (22) por $(s + 2)$:

$$\frac{s-1}{(s+2)(s+1)}(s+2) = A + \frac{B}{(s+1)}(s+2) \tag{23}$$

Sustituyendo $s = -2$,
$$A = \left.\frac{s-1}{s+1}\right|_{s=-2} = 3$$

Análogamente,
$$B = \left.\frac{s-1}{s+2}\right|_{s=-1} = -2$$

Sustituyendo estos valores en (22), la intensidad de corriente en el dominio de la variable s es

$$I(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+1} \tag{24}$$

La transformada inversa de Laplace de $I(s)$, de la Tabla 17-1, es $i = 3e^{-2t} - 2e^{-t}$.

*Otro método.* Multiplicando los dos miembros de (22) por $(s+2)(s+1)$:

$$s - 1 = A(s+1) + B(s+2) = (A+B)s + A + 2B$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado en s, $A + B = 1$ y $A + 2B = -1$. Por tanto, $A = 3$ y $B = -2$, que son los mismos valores que se obtuvieron anteriormente. Este método conduce siempre a un sistema de ecuaciones que se ha de resolver para deducir los coeficientes, mientras que en el primer método se obtienen ecuaciones independientes para cada coeficiente.

*Caso 2.* Raíces reales múltiples de $Q(s)$.

Consideremos la siguiente expresión de la intensidad de corriente en el dominio de la variable s:

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2+6s+9)} = \frac{1}{s(s+3)^2} \tag{25}$$

Entonces,
$$\frac{1}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2} \tag{26}$$

Multiplicando los dos miembros de (26) por s y haciendo $s = 0$,

$$A = \left.\frac{1}{(s+3)^2}\right|_{s=0} = \frac{1}{9}$$

En el caso de raíces múltiples, el coeficiente del término de segundo grado viene dado por $I(s)(s-s_0)^2|_{s=s_0}$. Por consiguiente,

$$C = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-3} = -\frac{1}{3}$$

El coeficiente del término lineal viene dado por la expresión $\left.\frac{d}{ds}[I(s)(s-s_0)^2]\right|_{s=s_0}$. Es decir,

$$B = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)\right|_{s=-3} = \left.-\frac{1}{s^2}\right|_{s=-3} = -\frac{1}{9}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (26) se obtiene la intensidad de corriente en el dominio de la variable s,

$$I(s) = \frac{\frac{1}{9}}{s} - \frac{\frac{1}{9}}{s+3} - \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} \tag{27}$$

con lo que la transformada inversa de Laplace es $i = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{3}te^{-3t}$.

*Otro método.* Multiplicando los dos miembros de (26) por $s(s+3)^2$ resulta

$$1 = A(s+3)^2 + Bs(s+3) + Cs = (A+B)s^2 + (6A+3B+C)s + 9A$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado en s, $A + B = 0$, $6A + 3B + C = 0$ y $9A = 1$; por tanto, $A = \frac{1}{9}$, $B = -\frac{1}{9}$ y $C = -\frac{1}{3}$, que coincide con lo que obtuvimos anteriormente.

*Caso 3.* Raíces complejas de $Q(s)$.

Consideremos la siguiente expresión de la intensidad de corriente en el dominio de la variable s:

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)} \tag{28}$$

Como las raíces de $Q(s)$ son complejas conjugadas, los numeradores de las fracciones también han de ser conjugados. Es decir,

$$\frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)} = \frac{A}{s+2+j} + \frac{A^*}{s+2-j} \qquad (29)$$

Multiplicando los dos miembros de (29) por $(s + 2 + j)$ y haciendo $s = -2 - j$ resulta

$$A = \left.\frac{1}{s+2-j}\right|_{s=-2-j} = j\tfrac{1}{2} \qquad y \qquad A^* = -j\tfrac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (29), la intensidad de corriente en el dominio de la variable s es

$$I(s) = \frac{j\frac{1}{2}}{s+2+j} + \frac{-j\frac{1}{2}}{s+2-j} \qquad (30)$$

La transformada inversa de Laplace es $i = e^{-2t}$ sen $t$.

*Otro método.* Multiplicando los dos miembros de (29) por $(s + 2 + j)(s + 2 - j)$ se obtiene

$$1 = A(s+2-j) + A^*(s+2+j)$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado en s, $A + A^* = 0$ y $A(2 - j) + A^*(2 + j) = 1$; por tanto, $A = j\frac{1}{2}$ y $A^* = -j\frac{1}{2}$.

**2. Fórmula del desarrollo de Heaviside.**

La fórmula de Heaviside establece que la transformada inversa de Laplace del cociente $I(s) = P(s)/Q(s)$ es

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} \qquad (31)$$

en donde los coeficientes $a_k$ son las $n$ raíces distintas de $Q(s)$.

Aplicando este desarrollo de Heaviside a la expresión de la intensidad de corriente en el dominio de la variable s del caso 1,

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} \qquad (32)$$

Ahora bien, $P(s) = s - 1$, $Q(s) = s^2 + 3s + 2$ y $Q'(s) = 2s + 3$. Las raíces son $a_1 = -2$ y $a_2 = -1$. De (31) se obtiene

$$i = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{-2t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} = \frac{-3}{-1}e^{-2t} + \frac{-2}{1}e^{-t} = 3e^{-2t} - 2e^{-t}$$

**TEOREMA DEL VALOR INICIAL**

Del Ejemplo 4,

$$\mathcal{L}[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt = s\mathbf{F}(s) - f(0+) \qquad (33)$$

Haciendo el límite de la ecuación (33) cuando $s \to \infty$,

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt = \lim_{s\to\infty} \{s\mathbf{F}(s) - f(0+)\} \qquad (34)$$

En el integrando aparece la función $e^{-st}$, que tiende hacia cero cuando $s \to \infty$. Por tanto,

$$\lim_{s\to\infty} \{s\mathbf{F}(s) - f(0+)\} = 0 \qquad (35)$$

Como $f(0+)$ es una constante podremos escribir la expresión (35) en la forma

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} \{s\mathbf{F}(s)\} \qquad (36)$$

La ecuación (36) constituye el enunciado matemático del teorema del valor inicial. Por consiguiente, para hallar el valor inicial de una función del tiempo, $f(t)$, se multiplica por s la función correspondiente $\mathbf{F}(s)$ en el dominio de la variable s y se hace el límite cuando $s \to \infty$.

**Ejemplo 6.**

En el circuito serie $RC$ de la Fig. 17-2 la expresión de la intensidad de corriente, en el dominio de la variable s, es $I(s) = \frac{V - q_0/C}{R}\left(\frac{1}{(s + 1/RC)}\right)$ [véase ecuación (7)]. Hallar la intensidad de corriente inicial $i(0+)$ aplicando el teorema del valor inicial.

De la ecuación (36).

$$i(0+) = \lim_{s\to\infty}\left\{\frac{V - q_0/C}{R}\left(\frac{s}{(s + 1/RC)}\right)\right\} = \frac{V - q_0/C}{R}$$

Este resultado se pone de manifiesto en la Figura 17-3.

## TEOREMA DEL VALOR FINAL

En el Ejemplo 4,

$$\mathcal{L}[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt = s\mathbf{F}(s) - f(0+) \tag{37}$$

Haciendo el límite de la ecuación (37) cuando $s \to 0$,

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt = \lim_{s\to 0}\{s\mathbf{F}(s) - f(0+)\} \tag{38}$$

Como $\lim_{s\to 0}\int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty df = f(\infty) - f(0)$ y $\lim_{s\to 0} f(0+) = f(0+)$, la ecuación (38) se convierte en

$$f(\infty) - f(0) = -f(0+) + \lim_{s\to 0}\{s\mathbf{F}(s)\} \tag{39}$$

o bien

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0}\{s\mathbf{F}(s)\} \tag{40}$$

La ecuación (40) constituye el enunciado matemático del teorema del valor final. Por consiguiente, para hallar el valor final de una función del tiempo, $f(t)$, se multiplica por s la función correspondiente $\mathbf{F}(s)$ en el dominio de la variable s y se hace el límite cuando $s \to 0$. Sin embargo, la ecuación (40) solo se puede aplicar cuando todas las raíces del denominador de $s\mathbf{F}(s)$ tienen las partes reales negativas. Esta restricción excluye las funciones senoidales, ya que la función seno está indeterminada en el infinito.

**Ejemplo 7.**

En el circuito serie $RL$ representado en la Fig. 17-4 la intensidad de corriente en el dominio de la variable s es $I(s) = \frac{V}{R}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right\}$ [véase ecuación (17)]. Hallar la intensidad final aplicando el teorema del valor final.

De la ecuación (40),

$$i(\infty) = \lim_{s\to 0}\frac{V}{R}\left\{\frac{s}{s} - \frac{s}{s + R/L}\right\} = V/R$$

## ANALISIS DE CIRCUITOS EN EL DOMINIO DE LA VARIABLE s DE LAPLACE

La ecuación del circuito serie $RLC$ representado en la Fig. 17-5 es

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = v \tag{41}$$

Esta ecuación integrodiferencial ha sido resuelta en el Capitulo 16 por los métodos clásicos al efecto.

En régimen permanente senoidal, las impedancias complejas de los tres elementos del circuito $R$, $L$ y $C$, en función de $\omega$, son $R$, $j\omega L$ y $1/j\omega C$, respectivamente. Transformando la ecuación del circuito, escrita en el dominio del tiempo, al dominio de la pulsación, las corrientes y tensiones se convierten en fasores. En estas condiciones, la ecuación del circuito serie $RLC$ de la Fig. 17-6 es

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} + (1/j\omega C)\mathbf{I} = \mathbf{V} \tag{42}$$

La ventaja que se deriva de la transformación es que la ecuación transformada se puede tratar algebraicamente despejando en ella el fasor intensidad de corriente $\mathbf{I}$. Las diferentes caídas de tensión son los productos de la impedancia de cada elemento particular del circuito por dicho fasor intensidad.

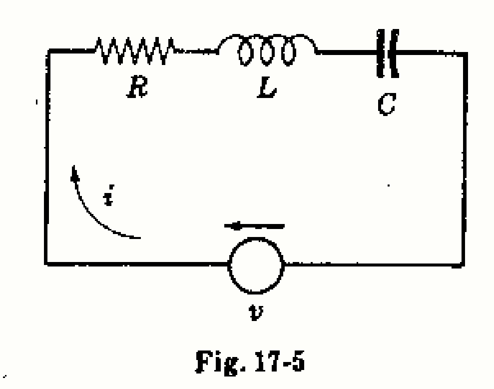


Fig. 17-5

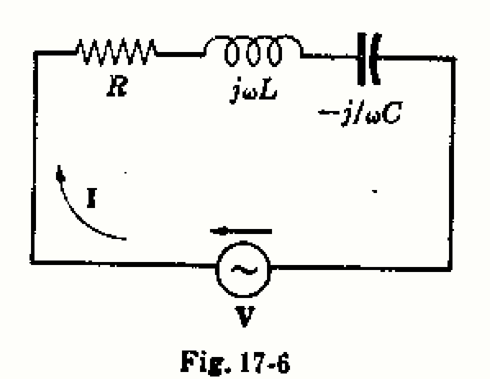


Fig. 17-6

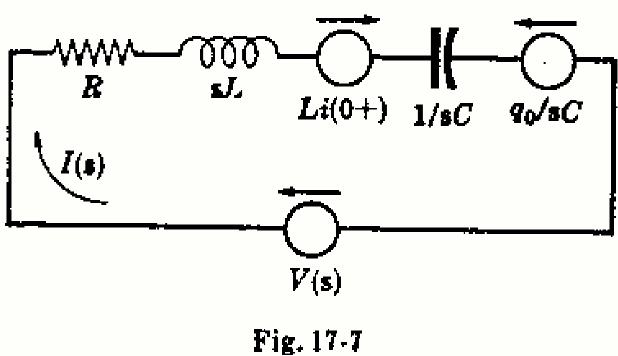


Fig. 17-7

En el método de la transformada de Laplace, a la caída de tensión en una resistencia $Ri$, en el dominio del tiempo, corresponde $RI(\mathrm{s})$ en el dominio de la variable **s**. Análogamente, a la caída de tensión en una bobina, $L(di/dt)$ corresponde $\mathrm{s}LI(\mathrm{s}) - Li(0+)$, y a la caída de tensión en un condensador, $\frac{1}{C}\int i\,dt$, corresponde $\frac{1}{\mathrm{s}C}I(\mathrm{s}) + \frac{q_0}{\mathrm{s}C}$.

Por consiguiente, el circuito serie de la Fig. 17-7 satisface la ecuación

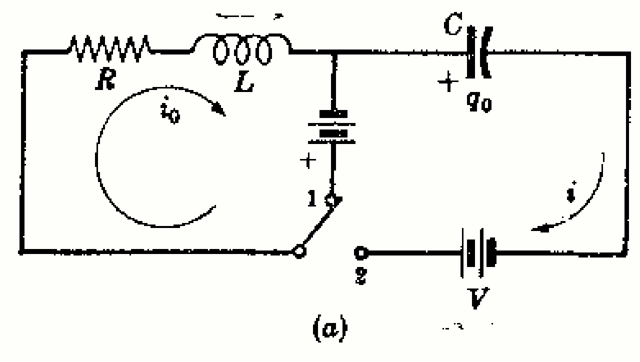
$$R\,I(\mathrm{s}) + \mathrm{s}L\,I(\mathrm{s}) - L\,i(0+) + \frac{1}{\mathrm{s}C}I(\mathrm{s}) + \frac{q_0}{\mathrm{s}C} = V(\mathrm{s}) \qquad (43)$$

o bien

$$I(\mathrm{s})\{R + \mathrm{s}L + 1/\mathrm{s}C\} = V(\mathrm{s}) - q_0/\mathrm{s}C + L\,i(0+) \qquad (44)$$

En la ecuación *(44)* el término $R + \mathrm{s}L + 1/\mathrm{s}C$, o impedancia $Z(\mathrm{s})$ en el dominio de la variable **s**, es la relación entre la excitación y la respuesta. Se observa que $Z(\mathrm{s})$ tiene la misma forma que la impedancia compleja en régimen permanente senoidal, $R + j\omega L + 1/j\omega C$. El sistema de ecuaciones que resulta al aplicar los métodos de las corrientes de malla y tensiones en los nudos en el análisis de circuitos se transforma fácilmente al dominio de la variable **s**, teniendo en cuenta los signos y las condiciones iniciales $Li(0+)$ y $q_0/\mathrm{s}C$.

Consideremos el circuito representado en la Fig. 17-8(*a*) por el que circula una corriente de intensidad $i_0$ cuando el interruptor está en la posición 1. En el instante $t = 0$, el conmutador pasa a la posición 2, introduciendo en el circuito un generador de tensión constante $V$ y una carga inicial $q_0$ en el condensador. El sentido positivo de la corriente $i$ es el de las agujas del reloj, como aparece en el esquema.



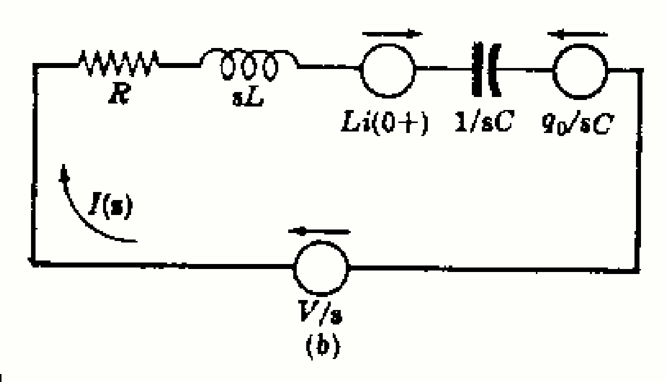



Fig. 17-8

La tensión constante del generador se transforma en $V/\mathrm{s}$, y la intensidad de corriente que circula en $I(\mathrm{s})$, como se indica en la Fig. 17-8(*b*). Los términos que constituyen las condiciones iniciales representan generadores cuyo sentido aparece en el esquema del circuito y la ecuación correspondiente es idéntica a la ecuación *(44)*. Es evidente que si la corriente inicial $i_0$ circulara en sentido contrario, o la carga $q_0$ tuviera polaridad opuesta, los signos de los términos $Li(0+)$ y $q_0/\mathrm{s}C$, respectivamente, cambiarían de igual forma. Los ejemplos siguientes ponen de manifiesto cómo las ecuaciones en el dominio de variable **s** son análogos a las ecuaciones fasoriales que vimos anteriormente. Todos los teoremas de circuitos estudiados en régimen permanente senoidal tienen su expresión en el dominio de la variable **s**.

**Ejemplo 8.**

En el circuito de dos mallas de la Fig. 17-9 se eligen las corrientes de malla en el dominio de la variable s como se representa en el propio esquema. Si se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, deducir las expresiones de $I_1(s)$ e $I_2(s)$.

Al cerrar el interruptor se aplica al circuito la tensión $V/s$ del generador, y el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla es

$$R_1 I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

y

$$(R_1 + R_2 + sL) I_2(s) - R_1 I_1(s) = L\, i(0+)$$

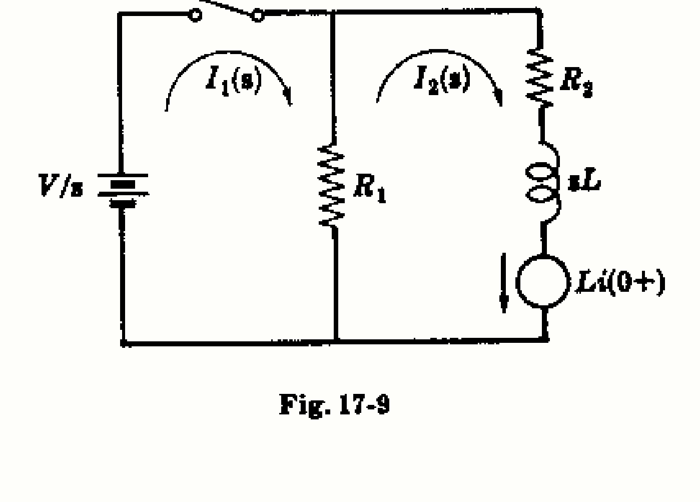



Fig. 17-9

Como la intensidad de corriente inicial en la bobina es cero, el sistema anterior, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para despejar los valores de $I_1(s)$ e $I_2(s)$ se resuelve el sistema por el método de sustitución o por la regla de Cramer; en cualquier caso, se obtiene

$$I_1(s) = \frac{V}{s}\left[\frac{R_1 + R_2 + sL}{R_1(R_2 + sL)}\right] \qquad \text{e} \qquad I_2(s) = \frac{V}{s}\frac{1}{(R_2 + sL)}$$



**Ejemplo 9.**

Escribir la ecuación, en el dominio de la variable s, de la tensión correspondiente al nudo principal del circuito representado en la Figura 17-10.

El nudo 1 y el de referencia se eligen como se indica en el esquema; al cerrar el interruptor, la ecuación del nudo es

$$\frac{V_1(s) - V/s - L\,i(0+)}{sL} + \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{R_2} = 0$$

o

$$(1/sL + 1/R_1 + 1/R_2)\, V_1(s) = \frac{V/s + L\,i(0+)}{sL}$$

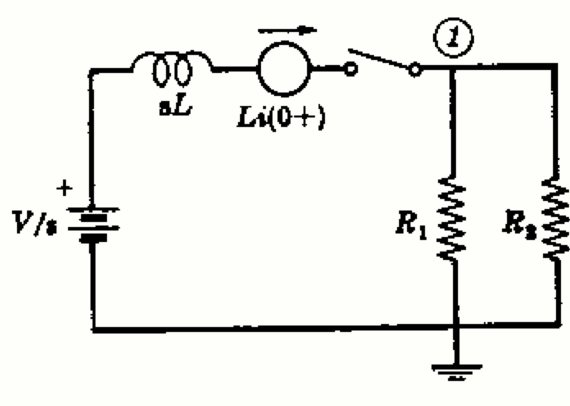



Fig. 17-10

La intensidad de corriente inicial por la bobina es cero; por tanto, la ecuación de la tensión en el nudo, $V_1(s)$, es

$$V_1(s) = \frac{V}{s}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + sLR_2 + sLR_1}\right)$$

**Ejemplo 10.**

Escribir el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla, en el dominio de la variable s, del circuito representado en la Fig. 17-11 en el caso de que la carga inicial del condensador sea $q_0$.

Se eligen las corrientes de malla como se indica en el esquema. Aplicando las leyes de Kirchhoff a las dos mallas,

$$(R_1 + R_2)\, I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

y

$$(R_1 + 1/sC)\, I_2(s) - R_1 I_1(s) = -q_0/sC$$

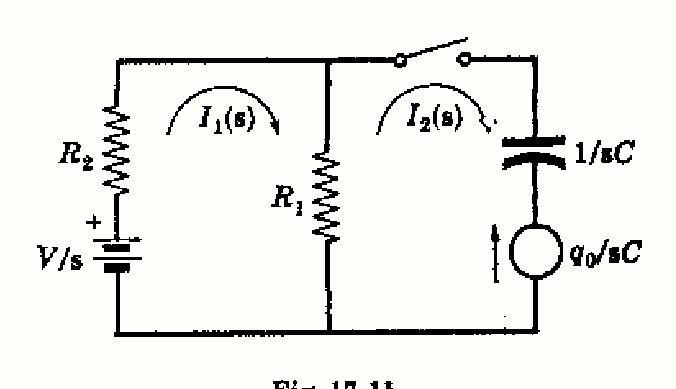



Fig. 17-11

Este sistema de ecuaciones, en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + 1/sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ -q_0/sC \end{bmatrix}$$

# Problemas resueltos

**17-1** Hallar la transformada de Laplace de la función $e^{-at}\cos\omega t$, siendo $a$ una constante.

Por definición, $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$, aplicada a la función dada, resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] &= \int_0^\infty \cos\omega t\, e^{-(s+a)t}\,dt\\ &= \left[\frac{-(s+a)\cos\omega t\, e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t}\,\omega\,\text{sen}\,\omega t}{(s+a)^2+\omega^2}\right]_0^\infty\\ &= \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\end{aligned}$$

**17-2** Si $\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s)$, demostrar que $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \mathbf{F}(s+a)$. Aplicar este resultado al Problema 17-1.

Por definición, $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \mathbf{F}(s)$. Entonces,

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}[f(t)e^{-st}]\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}\,dt = \mathbf{F}(s+a) \qquad (1)$$

Como $\mathcal{L}[\cos\omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, (véase Tabla 17-1), de (1) se deduce $\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$, como se obtuvo en el Problema 17-1.

**17-3** Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1 - e^{-at}$, siendo $a$ una constante.

Tendremos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1-e^{-at}] &= \int_0^\infty (1-e^{-at})e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt\\ &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st} + \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}\end{aligned}$$

**17-4** Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}\right]$.

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{1}{s(s^2-a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

en donde los coeficientes son

$$A = \frac{1}{s^2-a^2}\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \qquad B = \frac{1}{s(s-a)}\bigg|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2} \qquad C = \frac{1}{s(s+a)}\bigg|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

Ahora bien, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1/2a^2}{s+a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1/2a^2}{s-a}\right]$.

Buscando en la Tabla 17-1 las funciones del tiempo correspondientes,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}e^{-at} + \frac{1}{2a^2}e^{at}\\ &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{a^2}(\cosh at - 1)\end{aligned}$$

**17-5** Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right]$.

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

Entonces, $A = \left.\dfrac{s+1}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = \dfrac{1}{4}$ y $C = \left.\dfrac{s+1}{s}\right|_{s=-2} = \dfrac{1}{2}$

El coeficiente del término de segundo grado es

$$B = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{s}\right]\Bigg|_{s=-2} = -\frac{1}{s^2}\Bigg|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

Ahora bien, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\frac{1}{4}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-\frac{1}{4}}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right]$

Buscando en la Tabla 17-1 las funciones del tiempo correspondientes,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

**17-6** En el circuito serie *RC* representado en la Fig. 17-12 la carga inicial del condensador es $q_0 = 2500 \times 10^{-6}$ culombios. En el instante $t = 0$ se cierra el interruptor, con lo que al circuito se le aplica una fuente de tensión constante $V = 100$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente que circula aplicando el método de la transformada de Laplace.

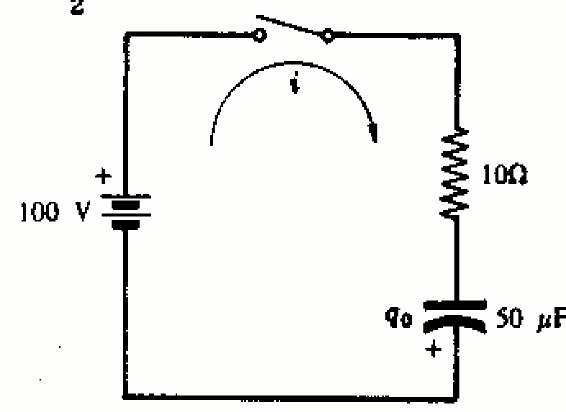



Fig. 17-12

La ecuación del circuito en el dominio del tiempo, después de cerrar el interruptor, es

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \quad \text{o bien} \quad 10i + \frac{1}{50\times10^{-6}}\int i\,dt = 100 \qquad (1)$$

Aplicando la transformada de Laplace a los términos de (*1*) se obtiene la ecuación en el dominio de la variable s,

$$10\,I(s) + \frac{I(s)}{50\times10^{-6}\,s} + \frac{q_0}{50\times10^{-6}\,s} = \frac{100}{s} \qquad (2)$$

Como se muestra en el circuito, la polaridad de la carga $q_0$ es opuesta a la correspondiente de la fuente; por tanto, la ecuación en el dominio de la variable s es

$$10\,I(s) + \frac{I(s)}{50\times10^{-6}\,s} - \frac{2500\times10^{-6}}{50\times10^{-6}\,s} = \frac{100}{s} \qquad (3)$$

Agrupando términos $$I(s)\left\{\frac{10s + 2\times10^4}{s}\right\} = \frac{150}{s} \qquad (4)$$

o bien $$I(s) = \frac{15}{s + 2\times10^3} \qquad (5)$$

Aplicando ahora la transformación inversa de Laplace resulta la función del tiempo

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15}{s+2\times10^3}\right] = 15e^{-2\times10^3 t}$$

Si la carga inicial $q_0$ fuera positiva en la armadura superior del condensador el signo de $q_0/sC$ en la ecuación (*3*) sería positivo. En estas condiciones, el segundo miembro de la ecuación (*4*) sería 50/s, con lo que circularía una corriente de intensidad $i = 5e^{-2\times10^3 t}$ A.

**17-7** En el circuito *RL* representado en la Fig. 17-13 el interruptor permanece en la posición 1 hasta que se establece el régimen permanente, y el instante $t = 0$ pasa a la posición 2. Hallar la intensidad de la corriente que circula.

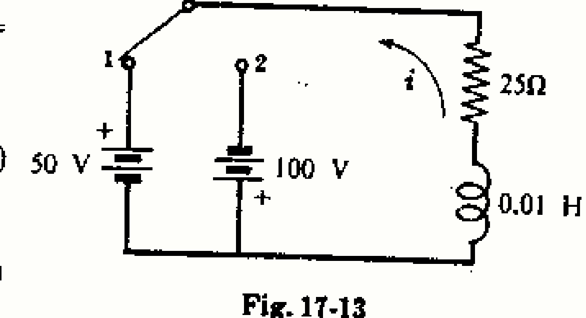


Fig. 17-13

Supongamos que el sentido de circulación de la corriente es el que aparece en el esquema. La intensidad inicial es $i_0 = -50/25 = -2$ A.

La ecuación en el dominio del tiempo es

$$25i + 0{,}01(di/dt) = 100 \qquad (1)$$

Aplicando la transformación de Laplace en (1),

$$25\,I(s) + 0{,}01s\,I(s) - 0{,}01\,i(0+) = 100/s \qquad (2)$$

Sustituyendo $i(0+)$ por su valor,

$$25\,I(s) + 0{,}01s\,I(s) + 0{,}01(2) = 100/s \qquad (3)$$

de donde $$I(s) = \frac{100}{s(0{,}01s+25)} - \frac{0{,}02}{0{,}01s+25} = \frac{10^4}{s(s+2500)} - \frac{2}{s+2500} \qquad (4)$$

Desarrollando $\dfrac{10^4}{s(s+2500)}$ de la ecuación (4) en fracciones simples,

$$\frac{10^4}{s(s+2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2500} \qquad (5)$$

Entonces, $$A = \frac{10^4}{s+2500}\bigg|_{s=0} = 4 \qquad \text{y} \qquad B = \frac{10^4}{s}\bigg|_{s=-2500} = -4$$

Sustituyendo en la ecuación (4),

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2500} - \frac{2}{s+2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s+2500} \qquad (6)$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (6) es $i = 4 - 6e^{-2500t}$

**17-8** En el circuito serie $RL$ representado en la Fig. 17-14 se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, con lo que al circuito se aplica un generador de tensión exponencial $v = 50e^{-100t}$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente que circula.

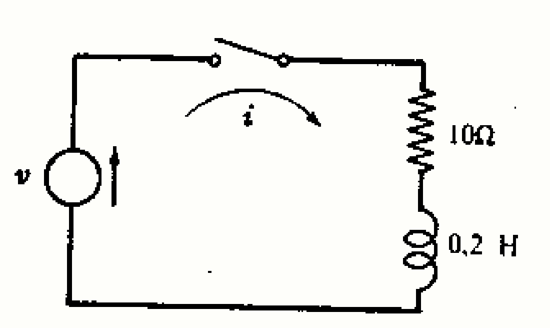


Fig. 17-14

La ecuación de este circuito, en el dominio del tiempo, es

$$Ri + L(di/dt) = v \qquad (1)$$

En el dominio de la variable s, la ecuación (1) adquiere la forma

$$R\,I(s) + sL\,I(s) - L\,i(0+) = V(s) \qquad (2)$$

Sustituyendo en (2) las constantes del circuito y la transformada de la fuente $V(s) = 50/(s+100)$,

$$10I(s) + s(0{,}2)I(s) = \frac{50}{s+100} \quad \text{o bien} \quad I(s) = \frac{250}{(s+100)(s+50)} \qquad (3)$$

Mediante la fórmula del desarrollo de Heaviside, $\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{P(s)}{Q(s)}\right] = \displaystyle\sum_{n=1,2} \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} e^{a_n t}$, donde

$P(s) = 250$, $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$, $Q'(s) = 2s + 150$, $a_1 = -100$ y $a_2 = -50$. Por tanto,

$$i = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{250}{-50}e^{-100t} + \frac{250}{50}e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t}$$

**17-9** Al circuito serie $RC$ representado en la Fig. 17-15 se le aplica un generador de tensión senoidal $v = 180$ sen $(2000t + \phi)$ voltios y el condensador tiene una carga inicial $q_0 = 1250 \times 10^{-6}$ culombios con la polaridad indicada. Hallar la intensidad de la corriente que circula por el circuito si se cierra el interruptor en el instante en que $\phi = 90°$.

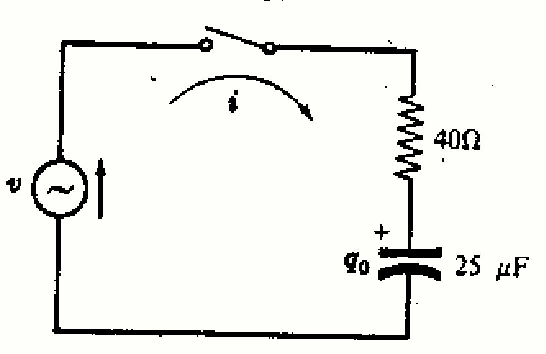


Fig. 17-15

La ecuación del circuito, en el dominio del tiempo, es

$$40i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 180\,\text{sen}\,(2000t + 90°) \qquad (1)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación *(1)* resulta la ecuación en el dominio de la variable s,

$$40\,I(s) + \frac{1}{25\times 10^{-6}\,s}\,I(s) + \frac{q_0}{25\times 10^{-6}\,s} = 180\left\{\frac{s \text{ sen } 90^\circ + 2000 \cos 90^\circ}{s^2 + 4\times 10^6}\right\} \qquad (2)$$

Introduciendo en *(2)* el valor de la carga inicial $q_0$,

$$40\,I(s) + \frac{4\times 10^4}{s}\,I(s) + \frac{1250\times 10^{-6}}{25\times 10^{-6}\,s} = \frac{180\,s}{s^2 + 4\times 10^6}$$

o bien

$$I(s) = \frac{4{,}5\,s^2}{(s^2 + 4\times 10^6)(s + 10^3)} - \frac{1{,}25}{s + 10^3} \qquad (3)$$

Aplicando la fórmula del desarrollo de Heaviside al término $\dfrac{4{,}5\,s^2}{(s^2 + 4\times 10^6)(s+10^3)}$ de *(4)* resulta $P(s) = 4.5\,s^2$, $Q(s) = s^3 + 10^3\,s^2 + 4\times 10^6\,s + 4\times 10^9$, $Q'(s) = 3\,s^2 + 2\times 10^3\,s + 4\times 10^6$, $a_1 = -j2\times 10^3$, $a_2 = j2\times 10^3$ y $a_3 = -10^3$. En estas condiciones,

$$i = \frac{P(-j2\times 10^3)}{Q'(-j2\times 10^3)}\,e^{-j2\times 10^3 t} + \frac{P(j2\times 10^3)}{Q'(j2\times 10^3)}\,e^{j2\times 10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)}\,e^{-10^3 t} - 1{,}25e^{-10^3 t}$$

$$= (1{,}8 - j0{,}9)e^{-j2\times 10^3 t} + (1{,}8 + j0{,}9)e^{j2\times 10^3 t} - 0{,}35e^{-10^3 t} \qquad (4)$$

$$= -1{,}8 \text{ sen } 2000t + 3{,}6 \cos 2000t - 0{,}35e^{-10^3 t}$$

$$= 4{,}02 \text{ sen } (2000t + 116{,}6^\circ) - 0{,}35e^{-10^3 t}$$

Para $t = 0$, la corriente viene dada por el cociente entre la tensión instantánea —tensión de la fuente más tensión de la carga del condensador— y la resistencia. Esto es,

$$i_0 = \left(180 \text{ sen } 90^\circ - \frac{1250\times 10^{-6}}{25\times 10^{-6}}\right)\Big/ 40 = 3{,}25 \text{ A}$$

Si hubiéramos hecho $t = 0$ en la ecuación *(4)* se habría obtenido el mismo resultado.

**17-10** En el circuito serie *RL* representado en la Fig. 17-16 la tensión senoidal del generador viene dada por $v = 100$ sen $(500t + \phi)$ voltios. Hallar la intensidad de corriente que circula si se cierra el interruptor en el instante en que $\phi = 0$.

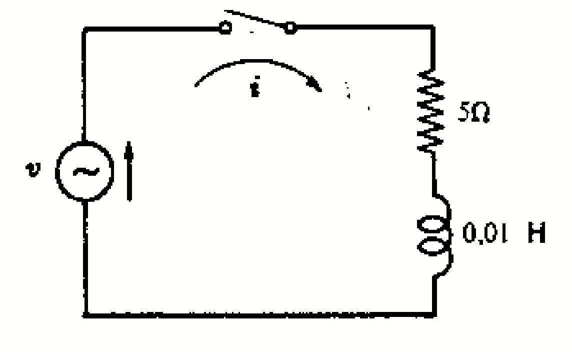



**Fig. 17-16**

La ecuación general de un circuito serie *RL*, en el dominio de la variable s, es

$$R\,I(s) + sL\,I(s) - L\,i(0+) = V(s) \qquad (1)$$

La transformada de la fuente para $\phi = 0$ es $V(s) = \dfrac{500(100)}{s^2 + (500)^2}$.

Como no existe corriente inicial en la bobina, $L\,i(0+) = 0$. Sustituyendo las constantes del circuito en la ecuación *(1)*,

$$5\,I(s) + 0{,}01\,I(s) = \frac{5\times 10^4}{s^2 + 25\times 10^4} \quad \text{de donde} \quad I(s) = \frac{5\times 10^6}{(s^2 + 25\times 10^4)(s + 500)}. \qquad (2)$$

Desarrollando *(2)* en fracciones simples,

$$I(s) = 5\left(\frac{-1 + j}{s + j500}\right) + 5\left(\frac{-1 - j}{s - j500}\right) + \frac{10}{s + 500} \qquad (3)$$

Entonces, la transformada inversa de *(3)* es

$$i = 10 \text{ sen } 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14{,}14 \text{ sen } (500t - \pi/4)$$

**17-11** En el Problema 17-10, si la función de tensión se escribe en la forma

$$v = 100e^{j500t} \qquad (1)$$

se introduce un término coseno en el generador. Hallar la intensidad de corriente por el circuito del Problema 17-10 mediante la ecuación *(1)*.

**Para** $v = 100e^{j500t}$, $V(s) = 100/(s - j500)$, y la ecuación en el dominio de la variable s es

$$5\,I(s) + 0{,}01\,I(s) = 100/(s - j500) \quad \text{y} \quad I(s) = 10^4/(s - j500)(s + 500) \qquad (2)$$

Desarrollando en fracciones simples, $I(s) = \dfrac{10 - j10}{s - j500} + \dfrac{-10 + j10}{s + 500}$ (3)

Aplicando ahora la transformada inversa de Laplace a la ecuación (3), la intensidad de corriente en función del tiempo es

$$\begin{aligned} i &= (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{-500t} \\ &= 14{,}14 e^{j(500t - \pi/4)} + (-10 + j10)e^{-500t} \\ &= 14{,}14\{\cos(500t - \pi/4) + j \operatorname{sen}(500t - \pi/4)\} + (-10 + j10)e^{-500t} \end{aligned} \quad (4)$$

Como el generador de tensión del Problema 17-10 solo contiene la parte imaginaria de (1), la intensidad que circula es la parte imaginaria de la ecuación (4),

$$i = 14{,}14 \operatorname{sen}(500t - \pi/4) + 10e^{-500t}$$

**17-12** En el circuito serie $RLC$ representado en la Fig. 17-17 no existe carga inicial en el condensador. Si se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, hallar la intensidad de corriente que circula.

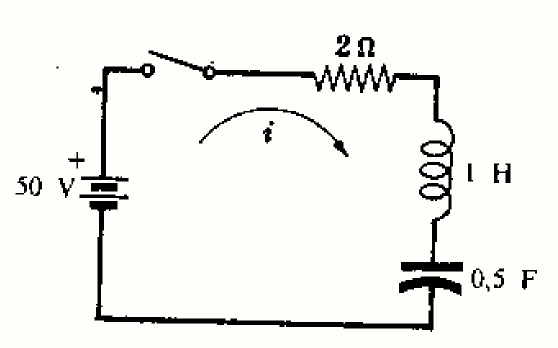



Fig. 17-17

La ecuación del circuito, escrita en el dominio del tiempo, es

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \quad (1)$$

Aplicando la transformada de Laplace a los términos de (1), se deduce la ecuación en el dominio de la variable s,

$$R\,I(s) + sL\,I(s) - L\,i(0+) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{q_0}{sC} = \frac{V}{s} \quad (2)$$

Las condiciones iniciales son $L\,i(0+) = 0$ y $q_0/sC = 0$. Sustituyendo las constantes del circuito en (2) resulta

$$2\,I(s) + 1s\,I(s) + \frac{1}{0{,}5s}I(s) = \frac{50}{s} \quad (3)$$

de donde
$$I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)} \quad (4)$$

Desarrollando (4) en fracciones simples,

$$I(s) = \frac{j25}{(s + 1 + j)} - \frac{j25}{(s + 1 - j)} \quad (5)$$

y aplicando la transformada inversa de Laplace a (5) se deduce el valor de la intensidad de corriente en el dominio del tiempo,

$$i = j25\{e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}\} = 50e^{-t}\operatorname{sen} t$$

**17-13** En el circuito de dos mallas representado en la Fig. 17-18 se eligen las dos corrientes de malla como se indica en el esquema. Escribir, en forma matricial, el sistema de ecuaciones en el dominio de la variable s y construir el circuito correspondiente.

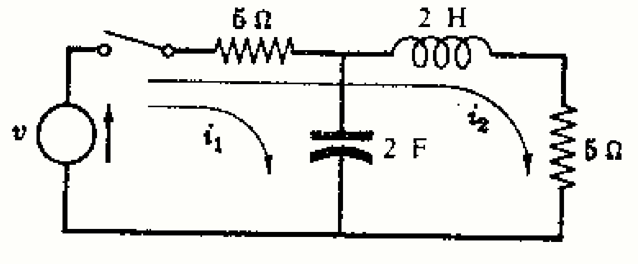



Fig. 17-18

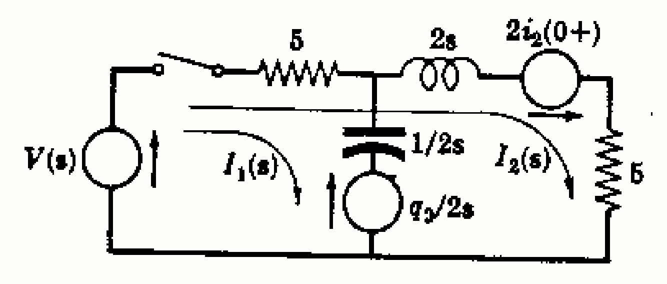



Fig. 17-19

El sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo es

$$5i_1 + \frac{1}{2}\int i_1\,dt + 5i_2 = v \qquad \text{y} \qquad 10i_2 + 2(di_2/dt) + 5i_1 = v \quad (1)$$

Aplicando la transformada de Laplace en (1) resulta el sistema correspondiente en el dominio de la variable s,

$$5\,I_1(s) + \frac{1}{2s}I_1(s) + \frac{q_0}{2s} + 5\,I_2(s) = V(s) \qquad 10\,I_2(s) + 2s\,I_2(s) - 2\,i_2(0+) + 5\,I_1(s) = V(s) \quad (2)$$

Ahora se puede determinar el circuito pedido en el dominio de la variable s mediante las matrices $Z(s)$, $I(s)$ y $V(s)$. (Véase Figura 17-19.)

$$\begin{bmatrix} 5 + 1/2s & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) - q_0/2s \\ V(s) + 2i_2(0+) \end{bmatrix}$$

**17-14** En el circuito de dos mallas representado en la Figura 17-20 hallar las intensidades de corriente que circulan al cerrar el interruptor.

El sistema de ecuaciones del circuito, en el dominio del tiempo, es

$$10i_1 + 0{,}02\frac{di_1}{dt} - 0{,}02\frac{di_2}{dt} = 100$$
$$0{,}02\frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0{,}02\frac{di_1}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Fig. 17-20

Aplicando la transformación de Laplace en (1),

$$(10 + 0{,}02s)\,I_1(s) - 0{,}02s\,I_2(s) = 100/s \qquad (5 + 0{,}02s)\,I_2(s) - 0{,}02s\,I_1(s) = 0 \qquad (2)$$

De la segunda ecuación de (2) se obtiene

$$I_2(s) = I_1(s)\left(\frac{s}{s+250}\right) \qquad (3)$$

y sustituyendo en la primera ecuación del dominio de la variable s,

$$(10 + 0{,}02s)I_1(s) - 0{,}02s\left\{I_1(s)\left(\frac{s}{s+250}\right)\right\} = \frac{100}{s} \qquad (4)$$

de donde

$$I_1(s) = 6{,}67\left\{\frac{s+250}{s(s+166{,}7)}\right\} \qquad (5)$$

De la segunda ecuación de (2) se obtiene

$$I_1(s) = \frac{10}{s} - \frac{3{,}33}{s+166{,}7} \quad \text{con lo que} \quad i_1 = 10 - 3{,}33e^{-166{,}7t} \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) en la ecuación (3) resulta la ecuación en el dominio de la variable s,

$$I_2(s) = 6{,}67\left\{\frac{s+250}{s(s+166{,}7)}\right\}\frac{s}{s+250} = 6{,}67\left(\frac{1}{s+166{,}7}\right) \quad \text{con lo que} \quad i_2 = 6{,}67e^{-166{,}7t} \qquad (7)$$

**17-15** Aplicar los teoremas del valor inicial y final a las ecuaciones $I_1(s)$ e $I_2(s)$, en el dominio de la variable s, del Problema 17-14.

Las ecuaciones en el dominio de la variable s del Problema 17-14 son

$$I_1(s) = 6{,}67\left\{\frac{s+250}{s(s+166{,}7)}\right\} \qquad \text{e} \qquad I_2(s) = 6{,}67\left(\frac{1}{s+166{,}7}\right)$$

El valor inicial de $i_1$ viene dado por

$$i_1(0) = \lim_{s\to\infty}[s\,I_1(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[6{,}67\left(\frac{s+250}{s+166{,}7}\right)\right] = 6{,}67 \text{ A}$$

y el valor final es

$$i_1(\infty) = \lim_{s\to 0}[s\,I_1(s)] = \lim_{s\to 0}\left[6{,}67\left(\frac{s+250}{s+166{,}7}\right)\right] = 6{,}67(250/166{,}7) = 10 \text{ A}$$

El valor inicial de $i_2$ viene dado por

$$i_2(0) = \lim_{s\to\infty}[s\,I_2(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[6{,}67\left(\frac{s}{s+166{,}7}\right)\right] = 6{,}67 \text{ A}$$

y el valor final es

$$i_2(\infty) = \lim_{s\to 0}[s\,I_2(s)] = \lim_{s\to 0}\left[6{,}67\left(\frac{s}{s+166{,}7}\right)\right] = 0$$

Examinemos el circuito representado en la Fig. 17-20 para comprobar cada uno de los valores inicial y final. En el instante de cerrar el interruptor, la bobina presenta una impedancia infinita y la corriente tiene una intensidad $i_1 = i_2 = 100/(10 + 5) = 6{,}67$ A. En cambio, en el régimen permanente, la bobina es un cortocircuito; es decir, $i_1 = 10$ A, $i_2 = 0$.

**17-16** Hallar la impedancia equivalente del circuito representado en la Fig. 17-20 y construir el circuito con esta impedancia.

En el dominio de la variable s, la bobina de 0,02 H tiene una impedancia $Z(s) = 0{,}02s$, con la que se puede operar igual que con $j\omega L$ en el régimen permanente senoidal. Así, pues, la impedancia equivalente vista desde el generador es

$$Z(s) \;=\; 10 + \frac{0{,}02s(5)}{0{,}02s+5} \;=\; \frac{0{,}3s+50}{0{,}02s+5} \;=\; 15\left(\frac{s+166{,}7}{s+250}\right) \qquad (1)$$

El circuito de la Fig. 17-21 muestra la impedancia equivalente. La intensidad de la corriente que circula es

$$I_1(s) \;=\; \frac{V(s)}{Z(s)} \;=\; \frac{100}{s}\left\{\frac{s+250}{15(s+166{,}7)}\right\} \;=\; 6{,}67\left\{\frac{s+250}{s(s+166{,}7)}\right\} \qquad (2)$$

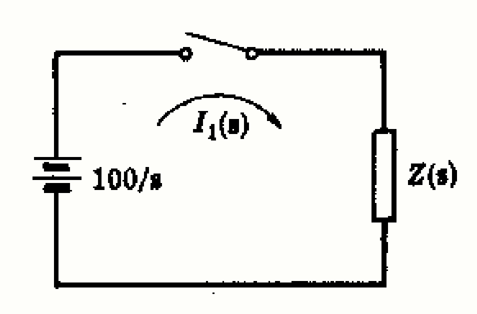



Fig. 17-21

Esta expresión es idéntica a la expresión (5) del Problema 17-14, con lo que la función del tiempo es $i_1 = 10 - 3{,}33e^{-166{,}7t}$.

**17-17** En el circuito de dos mallas representado en la Figura 17-22 no existe carga inicial en el condensador. Hallar las intensidades de las corrientes de malla $i_1$ e $i_2$ que circularán al cerrar el interruptor en el instante $t = 0$.

El sistema de ecuaciones del circuito, en el dominio del tiempo, es

$$10i_1 + \frac{1}{0{,}2}\int i_1\,dt + 10i_2 \;=\; 50$$
$$50i_2 + 10i_1 \;=\; 50 \qquad (1)$$

Fig. 17-22

y el correspondiente en el dominio de la variable s,

$$10\,I_1(s) + \frac{1}{0{,}2s}I_1(s) + 10\,I_2(s) \;=\; 50/s \qquad 50\,I_2(s) + 10\,I_1(s) \;=\; 50/s \qquad (2)$$

o bien en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 10 + 1/0{,}2s & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 50/s \\ 50/s \end{bmatrix}$$

de donde $I_1(s) = 5/(s + 0{,}625)$ e $i_1 = 5e^{-0{,}625t}$.

Para hallar $i_2$ se sustituye el valor de $i_1$ en la segunda ecuación (1) del dominio del tiempo:

$$50i_2 + 10(5e^{-0{,}625t}) = 50, \qquad \text{de donde} \qquad i_2 = 1 - e^{-0{,}625t}$$

**17-18** En el Problema 17-17 hallar la impedancia equivalente del circuito en el dominio de la variable s y calcular la intensidad de corriente total y las corrientes en las ramas.

La impedancia equivalente, en el dominio de la variable s, es

$$Z(s) \;=\; 10 + \frac{40(1/0{,}2s)}{40 + 1/0{,}2s} \;=\; \frac{80s+50}{8s+1} \;=\; 10\left(\frac{s+5/8}{s+1/8}\right) \qquad (1)$$

En la Fig. 17-23 se representa el circuito equivalente por el que circula una corriente de intensidad

$$I(s) \;=\; \frac{V(s)}{Z(s)} \;=\; \frac{50}{s}\left\{\frac{s+1/8}{10(s+5/8)}\right\} \;=\; 5\,\frac{s+1/8}{s(s+5/8)} \qquad (2)$$

Desarrollando la expresión (2) en fracciones simples,

$$I(s) \;=\; \frac{1}{s} + \frac{4}{s+5/8} \qquad \text{de donde} \qquad i \;=\; 1 + 4e^{-5t/8} \qquad (3)$$

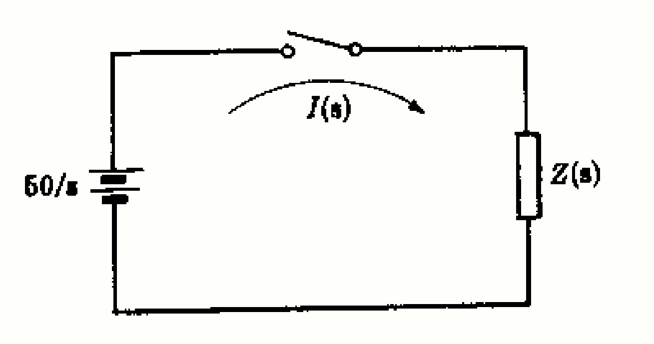



Fig. 17-23

Fig. 17-24

Ahora bien, las corrientes $I_1(s)$ e $I_2(s)$ se deducen fácilmente mediante la regla de las corrientes derivadas. En la Figura 17-24,

$$I_1(s) \quad = \quad I(s)\left(\frac{40}{40+1/0{,}2s}\right) \quad = \quad \frac{5}{s+5/8} \qquad \text{de donde} \quad i_1 = 5e^{-0{,}625t}$$

$$I_2(s) \quad = \quad I(s)\left(\frac{1/0{,}2\,s}{40+1/0{,}2s}\right) \quad = \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5/8} \qquad \text{de donde} \quad i_2 = 1 - e^{-0{,}625t}$$

**17-19** En el circuito representado en la Fig. 17-25 se cierra el interruptor en el instante $t = 0$ y no existe carga inicial en los condensadores. Hallar la intensidad de corriente resultante $i$ que se muestra en el esquema.

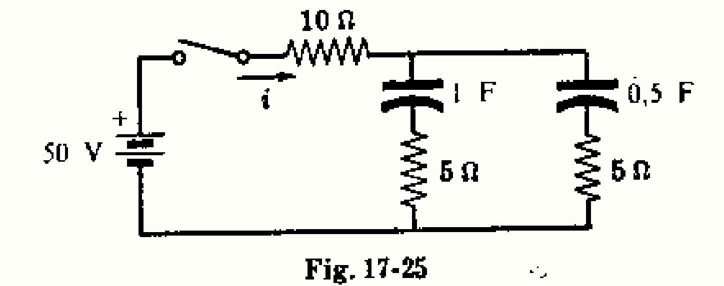



Fig. 17-25

La impedancia equivalente del circuito, en el dominio de la variable s, es

$$Z(s) = 10 + \frac{(5+1/s)(5+1/0{,}5s)}{(10+1/s+1/0{,}5s)} = \frac{125s^2+45s+2}{s(10s+3)} \tag{1}$$

y la intensidad de corriente,

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s}\,\frac{s(10s+3)}{(125s^2+45s+2)} = \frac{4(s+0{,}3)}{(s+0{,}308)(s+0{,}052)} \tag{2}$$

Desarrollando la corriente en el dominio de la variable s en fracciones simples,

$$I(s) = \frac{1/8}{s+0{,}308} + \frac{31/8}{s+0{,}052} \qquad \text{de donde} \qquad i = \frac{1}{8}e^{-0{,}308t} + \frac{31}{8}e^{-0{,}052t}$$

**17-20** Aplicar los teoremas del valor inicial y final a la corriente, en el dominio de la variable s, del Problema 17-19.

Como $I(s) = \dfrac{1/8}{s+0{,}308} + \dfrac{31/8}{s+0{,}052}$, la corriente inicial es

$$i(0) \quad = \quad \lim_{s\to\infty}\,[s\,I(s)] \quad = \quad \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s+0{,}308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s+0{,}052}\right)\right] \quad = \quad 4 \text{ A}$$

y la corriente final es

$$i(\infty) \quad = \quad \lim_{s\to 0}\,[s\,I(s)] \quad = \quad \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s+0{,}308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s+0{,}052}\right)\right] \quad = \quad 0$$

Examinando el circuito representado en la Fig. 17-25 se deduce que, inicialmente, la resistencia total del mismo es $R = 10 + 5(5)/10 = 12{,}5$ y, por consiguiente, $i(0) = 50/12{,}5 = 4$ A. En el régimen permanente, pues, los dos condensadores se cargan a la tensión equivalente de 50 V y la intensidad de corriente por ellos es nula.

# Problemas propuestos

**17-21** Hallar la transformada de Laplace de cada una de las funciones siguientes:
(*a*) $f(t) = At$ (*c*) $f(t) = e^{-at}$ sen $\omega t$ (*e*) $f(t) = \cosh \omega t$
(*b*) $f(t) = te^{-at}$ (*d*) $f(t) = \text{senh}\ \omega t$ (*f*) $f(t) = e^{-at}\ \text{senh}\ \omega t$

*Sol.* (*a*)-(*e*) Véase Tabla 17-1, (*f*) $\dfrac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$

**17-22** Hallar la inversa de las transformadas de Laplace de cada una de las funciones siguientes:

(*a*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s+1)}$ (*d*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{3}{s(s^2+6s+9)}$ (*g*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{2s}{(s^2+4)(s+5)}$

(*b*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{1}{s^2+7s+12}$ (*e*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{s+5}{s^2+2s+5}$

(*c*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{5s}{s^2+3s+2}$ (*f*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+13}$

*Sol.* (*a*) $2e^{-2t} - e^{-t}$ (*d*) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} - te^{-3t}$ (*g*) $\frac{10}{29}\cos 2t + \frac{4}{29}\,\text{sen}\,2t - \frac{10}{29}e^{-5t}$
(*b*) $e^{-3t} - e^{-4t}$ (*e*) $e^{-t}(\cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t)$
(*c*) $10e^{-2t} - 5e^{-t}$ (*f*) $2e^{-2t}\cos 3t$

**17-23** Un circuito serie *RL*, con $R = 10$ ohmios y $L = 0{,}2$ henrios, se le aplica en el instante $t = 0$ una tensión constante $V = 50$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente por el circuito aplicando el método de la transformada de Laplace. *Sol.* $i = 5 - 5e^{-50t}$ A.

**17-24** En el circuito serie *RL* representado en la Fig. 17-26 se mantiene cerrado el interruptor en la posición 1 hasta que se establece el régimen permanente y se pasa a la posición 2 en el instante $t = 0$. Hallar la intensidad de corriente que circula. *Sol.* $i = 5e^{-50t}$ A.

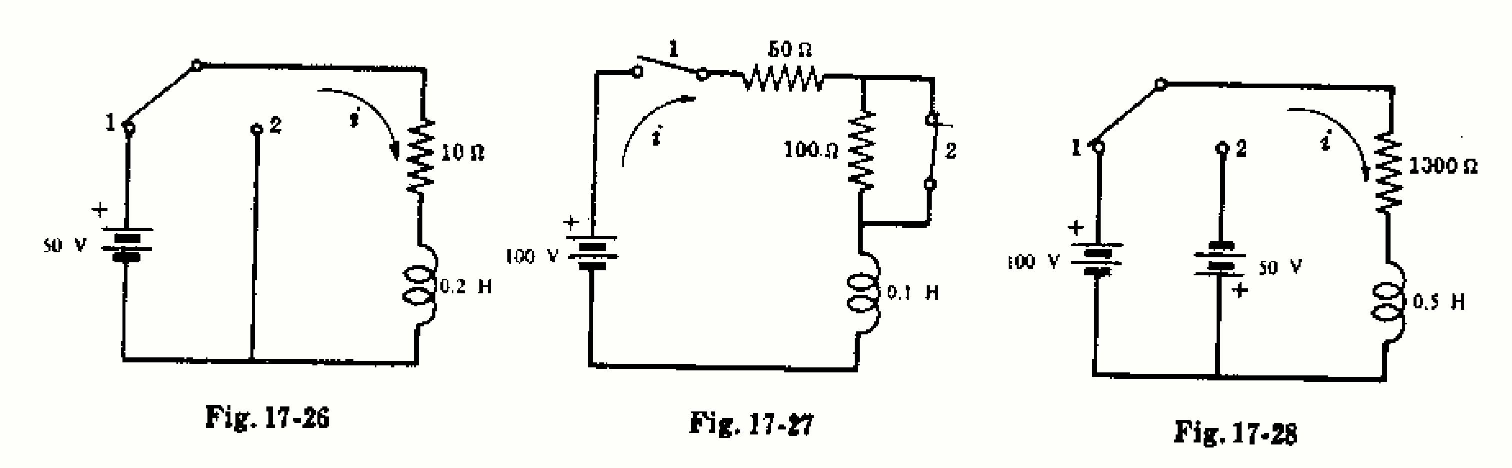



Fig. 17-26 Fig. 17-27 Fig. 17-28

**17-25** En el circuito representado en la Fig. 17-27 se cierra el interruptor 1 en el instante $t = 0$, y en el instante $t = t' = 4$ milisegundos se abre el interruptor 2. Hallar la intensidad de corriente en el régimen transitorio considerando los intervalos $0 < t < t'$ y $t' < t$. *Sol.* $i = 2(1 - e^{-500t})$ A; $i = 1{,}06e^{-1500(t-t')} + 0{,}667$ A.

**17-26** En el circuito serie *RL* representado en la Fig. 17-28 se cierra el interruptor en la posición 1 en el instante $t = 0$, y en el instante $t = t' = 50$ microsegundos se pasa a la posición 2. Hallar la intensidad de corriente en el régimen transitorio considerando los intervalos $0 < t < t'$ y $t > t'$.
*Sol.* $i = 0{,}1(1 - e^{-2000t})$ A; $i = 0{,}06e^{-2000(t-t')} - 0{,}05$ A.

**17-27** El condensador de un circuito serie *RC* con $R = 10$ ohmios y $C = 4$ microfaradios tiene una carga inicial $q_0 = 800 \times 10^{-6}$ culombios en el instante en que se cierra el interruptor y se aplica una tensión $V = 100$ voltios. Hallar la intensidad de corriente en el régimen transitorio si la polaridad del condensador es (*a*) del mismo sentido que la polaridad de la fuente, (*b*) de sentido contrario.
*Sol.* (*a*) $i = -10e^{-25\times10^3 t}$ A; (*b*) $i = 30e^{-25\times10^3 t}$ A.

**17-28** El condensador de un circuito serie *RC*, con $R = 1000$ ohmios y $C = 4$ microfaradios, tiene una cierta carga inicial $q_0$ en el instante en que se cierra y se aplica una tensión $V = 50$ voltios. Sabiendo que la intensidad de corriente es $i = 0{,}075e^{-50t}$ amperios, hallar la carga $q_0$ y su polaridad.
*Sol.* $500 \times 10^{-6}$ C, de polaridad opuesta a la correspondiente de la fuente.

**17-29** En el circuito *RC* representado en la Fig. 17-29 se cierra el interruptor en la posición 1 en el instante $t = 0$ y en el instante $t = t' = 1\ \tau$ (constante de tiempo) se pasa a la posición 2. Hallar la intensidad de corriente en el régimen transitorio considerando los intervalos $0 < t < t'$ y $t > t'$.
*Sol.* $i = 0{,}5e^{-200t}$ A; $i = 0{,}516e^{-200(t-t')}$ A.

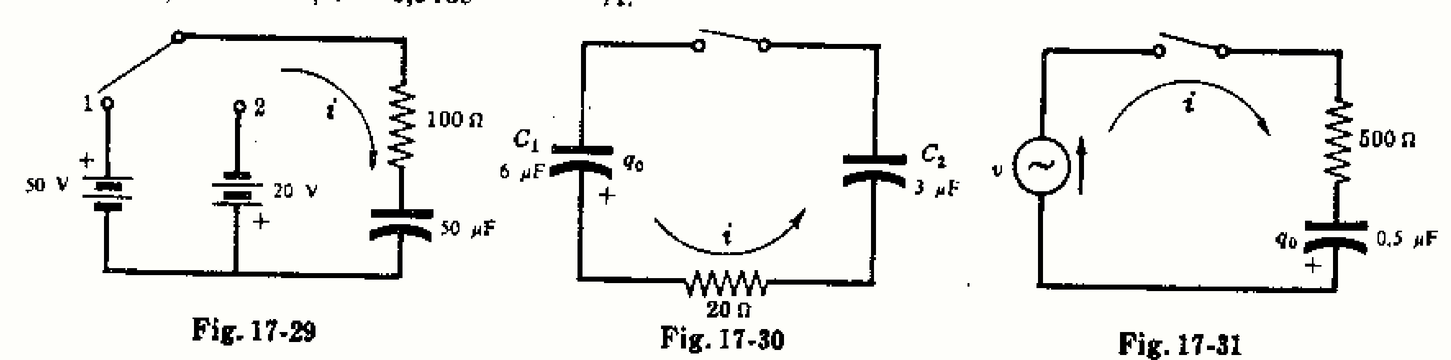



Fig. 17-29 Fig. 17-30 Fig. 17-31

**17-30** En el circuito representado en la Fig. 17-30 el condensador, de capacidad $C_1$, tiene una carga inicial $q_0 = 300 \times 10^{-6}$ culombios en el instante en que se cierra el interruptor. Hallar la intensidad de corriente en el régimen transitorio. *Sol.* $i = 2{,}5e^{-2{,}5\times 10^4 t}$ A.

**17-31** En el circuito serie *RC* representado en la Fig. 17-31 la carga inicial del condensador es $q_0 = 25 \times 10^{-6}$ culombios y la fuente aplicada tiene una tensión $v = 100$ sen $(1000t + \phi)$ voltios. Hallar la intensidad de corriente que circula si el interruptor se cierra en el instante en que $\phi = 30°$.
*Sol.* $i = 0{,}1535e^{-4000t} + 0{,}0484$ sen $(1000t + 106°)$ A.

**17-32** En un circuito serie *RLC*, con $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 500$ microfaradios, se aplica en el instante $t = 0$ una tensión constante $V = 10$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente que circula.
*Sol.* $i = 0{,}72e^{-25t}$ sen $139t$ A.

**17-33** En el circuito serie *RLC* representado en la Fig. 17-32 la carga inicial del condensador es $q_0 = 10^{-3}$ culombios y el interruptor se encuentra en la posición 1 hasta que se establece el régimen permanente. Hallar la intensidad de la corriente transitoria que circula por el circuito al pasar por el interruptor de la posición 1 a 2 en el instante $t = 0$.
*Sol.* $i = e^{-25t}(2 \cos 222t - 0{,}45$ sen $222t)$ A.

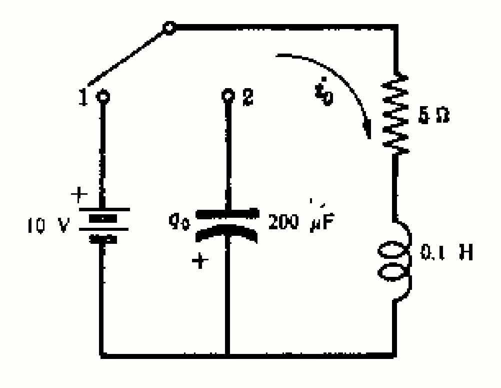



Fig. 17-32

**17-34** A un circuito serie *RLC*, con $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}2$ henrios y $C = 1$ faradio, se le aplica una tensión $v = 10e^{-100t}$ voltios, en el instante $t = 0$. Hallar la intensidad de corriente que circula.
*Sol.* $i = -0{,}666e^{-100t} + 0{,}670e^{-24{,}8t} - 0{,}004e^{-0{,}2t}$ A.

**17-35** Un circuito serie *RLC*, con $R = 200$ ohmios, $L = 0{,}5$ henrios y $C = 100$ microfaradios, contiene un generador de tensión senoidal $v = 300$ sen $(500t + \phi)$ voltios. Hallar la intensidad de la corriente transitoria que circula al cerrar el interruptor en el instante en que $\phi = 30°$.
*Sol.* $i = 0{,}517e^{-341{,}4t} - 0{,}197e^{-58{,}6t} + 0{,}938$ sen $(500t - 19°)$ A.

**17-36** Un circuito serie *RLC*, con $R = 5$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 500$ microfaradios, contiene un generador de tensión senoidal $v = 100$ sen $(250t + \phi)$ voltios. Hallar la intensidad de corriente que circula si se cierra el interruptor en el instante en que $\phi = 0°$.
*Sol.* $i = e^{-25t}(5{,}42 \cos 139t + 1{,}89$ sen $139t) + 5{,}65$ sen $(250t - 73{,}6°)$ A.

**17-37** En el circuito de dos mallas representado en la Fig. 17-33 se eligen las corrientes como se indica en el esquema. Escribir el sistema de ecuaciones del circuito en el dominio del tiempo, transformarlo en el correspondiente en el dominio de la variable *s* y obtener las intensidades de corriente transitorias $i_1$ e $i_2$.
*Sol.* $i_1 = 2{,}5(1 + e^{-10^5 t})$ A; $i_2 = 5e^{-10^5 t}$ A.

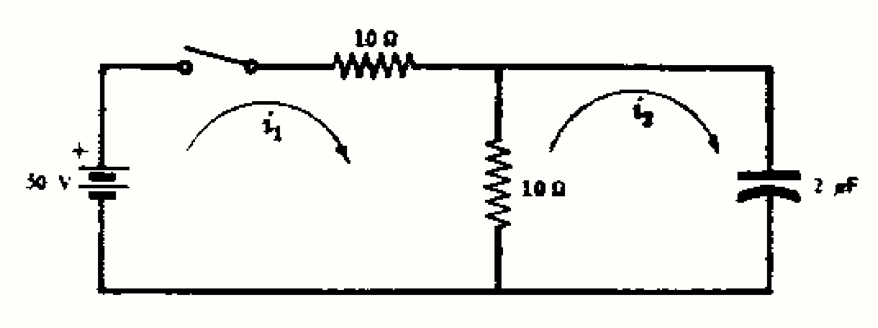



Fig. 17-33

**17-38** En el circuito de dos mallas representado en la Fig. 17-34 hallar las intensidades de corriente $i_1$ e $i_2$ que circulan al cerrar el interruptor en el instante $t = 0$.
*Sol.* $i_1 = 0{,}101e^{-100t} + 9{,}899e^{-9950t}$ A; $i_2 = -5{,}05e^{-100t} + 5 + 0{,}5e^{-9950t}$ A.

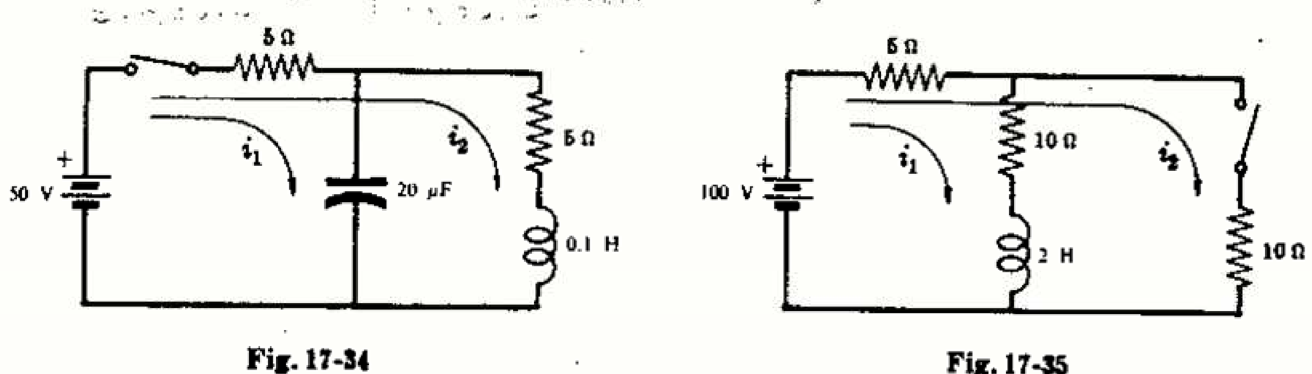



Fig. 17-34 Fig. 17-35

**17-39** En el circuito representado en la Fig. 17-35 el generador de 100 voltios hace circular una corriente continua por la primera malla y el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ introduciendo la resistencia de 10 ohmios en paralelo con la rama que contiene la asociación en serie de $R = 10$ ohmios y $L = 2$ henrios. Hallar las intensidades de corriente que resultan. *Sol.* $i_1 = 1{,}67e^{-6{,}67t} + 5$ A; $i_2 = -0{,}555e^{-6{,}67t} + 5$ A.

**17-40** El circuito de dos mallas representado en la Fig. 17-36 contiene un generador de tensión senoidal $v = 100$ sen $(200t + \phi)$ voltios. En el instante $t = 0$, en que el ángulo $\phi = 0$, se cierra el interruptor poniendo en paralelo la segunda resistencia de 10 ohmios con la primera. Hallar las intensidades de las corrientes de malla que circulan con los sentidos marcados en el circuito.
*Sol.* $i_1 = 3{,}01e^{-100t} + 8{,}96$ sen $(200t - 63{,}4°)$ A; $i_2 = 1{,}505e^{-100t} + 4{,}48$ sen $(200t - 63{,}4°)$ A.

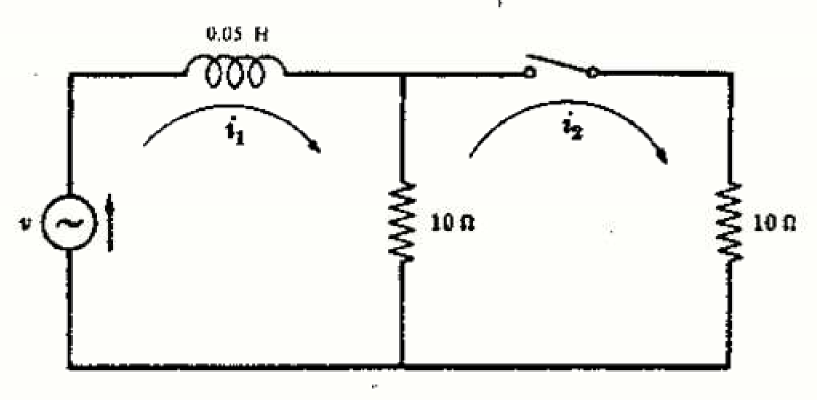



Fig. 17-36

# INDICE